

3 - Etudier la régularité de la contrainte

La fonction $g(x, y) = 4x + 3y - 5$ est affine, donc la contrainte est un ensemble régulier.

4 - Rechercher les points critiques du P3

a. Calcul du Lagrangien

Les fonctions f et g sont continues et différentiables (de classe C^1).

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(4x + 3y - 5)$$

b. Rechercher les points critiques du Lagrangien

$$\nabla L(x, y, \lambda) = \begin{cases} 2x + 4\lambda \\ 2y + 3\lambda \\ 4x + 3y - 5 \end{cases}$$

Pour trouver les points critiques du L , il faut résoudre le système d'équation :

$$\begin{cases} 2x + 4\lambda = 0 & (L1) \\ 2y + 3\lambda = 0 & (L2) \\ 4x + 3y - 5 = 0 & (L3) \end{cases}$$

$$(L1) \Leftrightarrow \lambda = -\frac{x}{2}$$

$$(L2) \Leftrightarrow \lambda = -\frac{2}{3}y$$

$$\text{Ainsi : } -\frac{x}{2} = -\frac{2}{3}y \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}y$$

$$(L3) \Leftrightarrow 4\left(\frac{4}{3}y\right) + 3y - 5 = 0 \Leftrightarrow \frac{16}{3}y + 3y - 5 = 0 \Leftrightarrow 16y + 9y - 15 = 0 \Leftrightarrow 25y - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{3}{5} \Rightarrow x = \frac{4}{5} \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{5}$$

Le lagrangien admet un point critique $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, -\frac{2}{5})$. Puisque la contrainte C est régulière, alors $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ est un point critique du problème P2.

5 - f est strictement convexe et C est convexe, donc le problème P2 admet un minimum global égal à $f(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}) = 1$ au point $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$.

Exercice 6 : Soit le problème d'optimisation (P3) suivant :

$$\begin{aligned} \text{Min } f(x, y) &= x^4 + y^4 \\ \text{s.c. } x^2 + y^2 &= 1 \quad (C) \end{aligned}$$

- 1- Montrer que P3 admet au moins une solution.
- 2- Est-elle unique ?
- 3- Etudier la régularité de la contrainte
- 4- Trouvez les points critiques de ce problème.
- 5- Déterminer la(les) solutions du P3.

P3 est un problème d'optimisation en deux dimensions avec une seule contrainte :

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

1- Montrer que P3 admet au moins une solution.

Pour cela, :

- 1- il faut montrer que f est continu sur C .
- 2- il faut montrer que C est fermée.
- 3- il faut que **l'une des deux conditions suivantes soit vérifiée** :
 - a. f est coercive
 - b. C est borné.

1- Montrer que f est continu sur C .

f est un polynôme de 4^{ème} degré, donc f est continu sur R^2 , par conséquent f est **continu** sur C ($C \subset R^2$).

2- Montrer que C est fermé.

$$C = \{(x, y) \in R^2, x^2 + y^2 = 1\}$$

L'ensemble $\{1\}$ est fermé, et donc son image réciproque par la fonction $x^2 + y^2$ (qui est continue sur R^2), est un ensemble fermé.

Ainsi, l'ensemble C est **fermé**.

3- f est-elle coercive ? ou bien C est-elle borné ?

- f est-elle coercive ?

Posons : $\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}$ avec $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$

La fonction radiale Φ_f associée à f est

$$\begin{aligned} \Phi_f(r, \theta) &= r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta) + 2r^2 \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) \\ &= r^2 (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) + 2 \cos(\theta) \cdot \sin(\theta)) \\ &= r^2 (1 + 2 \cos(\theta) \cdot \sin(\theta)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} f(x, y) &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \Phi_f(r, \theta) \\ &= \lim_{r \rightarrow +\infty} r^4 (\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta)) \end{aligned}$$

Le terme $\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta)$ est strictement positif $\forall \theta \in [0, 2\pi[$.

Ainsi : $\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} f(x, y) = +\infty$ et donc f **est coercive**.

f est continue et coercive et C est fermé, donc le problème P3 admet au moins une solution.

2- La solution est-elle unique ? (un minimum global en un seul point).

Rappel : En plus des hypothèses d'existence de solution, si f est **strictement convexe** et C est **convexe**, alors le problème d'optimisation admet une seule solution (un minimum global à un seul point).

L'ensemble C n'est pas convexe. C'est un cercle (démonstration graphique).

Ainsi, la solution n'est pas unique.

3- Etudier la régularité de la contrainte

La vérification de régularité (qualification) permet de vérifier si les points critiques du lagrangien X^* sont aussi des points critiques du problème d'optimisation.

L'ensemble C est régulier

Voir la réponse de la question 3 de l'exercice 4.

4- Trouver les points critiques du P3

a. Calcul du Lagrangien

Les fonctions f et g sont continues et différentiables (de classe C^1).

$$L(x, y, \lambda) = x^4 + y^4 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

b. Rechercher les points critiques du Lagrangien

$$\nabla L(x, y, \lambda) = \begin{cases} 4x^3 + 2\lambda x \\ 4y^3 + 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 1 \end{cases}$$

Pour trouver les points critiques du L , il faut résoudre le système d'équation :

$$\begin{cases} 4x^3 + 2\lambda x = 0 & (L1) \\ 4y^3 + 2\lambda y = 0 & (L2) \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 & (L3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 + \lambda x = 0 & (L1) \\ 2y^3 + \lambda y = 0 & (L2) \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 & (L3) \end{cases}$$

C'est un système d'équations de 3 équations non-linéaires.

Rappel : Si on a p contraintes g_i , donc on a 2^p cas à étudier.

On distingue dans notre problème ($p = 1$), 2 cas.

Le 1^{er} cas : $\lambda = 0$

$$\begin{cases} 2x^3 = 0 \\ 2y^3 = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ -1 = 0 \end{cases} \text{ Impossible, donc cette solution est refusée.}$$

Le 2^{ème} cas : $\lambda \neq 0$

$$(L1) \Leftrightarrow x(2x^2 + \lambda) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad 2x + \lambda = 0$$

$$(L2) \Leftrightarrow y(2y^2 + \lambda) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \quad \text{ou} \quad 2y + \lambda = 0$$

a. $\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow (-1=0)$ Impossible, donc cette solution est refusée.

b. $\begin{matrix} x = 0 \\ 2y^2 + \lambda = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow y^2 = -\frac{\lambda}{2}$

On remplace y^2 par $-\frac{\lambda}{2}$ dans (L3), on obtient : $0 + \left(-\frac{\lambda}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \lambda = -2$

$$\Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow y = 1 \text{ ou } y = -1$$

Les solutions obtenues dans ce cas (b) : $X_1(0,1)$ et $X_2(0,-1)$ avec $\lambda = -2$.

$$\text{c. } \begin{aligned} y &= 0 \\ 2x^2 + \lambda &= 0 \end{aligned} \Leftrightarrow x^2 = -\frac{\lambda}{2}$$

On remplace x^2 par $-\frac{\lambda}{2}$ dans (L3), on obtient : $(-\frac{\lambda}{2}) + 0 = 1 \Leftrightarrow \lambda = -2$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$$

Les solutions obtenues dans ce cas (c) : $X_3(1,0)$ et $X_4(-1,0)$ avec $\lambda = -2$.

$$\text{d. } \begin{aligned} 2x^2 + \lambda &= 0 \\ 2y^2 + \lambda &= 0 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} x^2 &= -\frac{\lambda}{2} \\ y^2 &= -\frac{\lambda}{2} \end{aligned}$$

On remplace dans (L3), x^2 et y^2 par $-\frac{\lambda}{2}$. On obtient : $-\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$

$$x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Les solutions obtenues dans ce cas (d) : $X_5(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $X_6(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $X_7(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ et $X_8(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ avec $\lambda = -2$.

Le lagrangien admet 8 points critiques $X_1(0, 1, -1)$, $X_2(0, -1, -1)$, $X_3(1, 0, -1)$, $X_4(-1, 0, -1)$, $X_5(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -2)$, $X_6(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -2)$, $X_7(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -2)$ et $X_8(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -2)$.

Nous avons démontré dans la question 3 que tout l'ensemble C est régulier. **Ainsi, les points $X_1(0, 1)$, $X_2(0, -1)$, $X_3(1, 0)$, $X_4(-1, 0)$, $X_5(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $X_6(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $X_7(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ et $X_8(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ sont des points critiques du problème P3.**

5- Déterminer la(les) solutions du P3.

$$f(X_1) = f(X_2) = f(X_3) = f(X_4) = 1$$

$$f(X_5) = f(X_6) = f(X_7) = f(X_8) = \frac{1}{2}$$

Le problème P3 admet un minimum global égal à $\frac{1}{2}$ aux points $X_5(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $X_6(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $X_7(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ et $X_8(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Exercice 7 : Soit le problème d'optimisation (P4) suivant :

$$\text{Min } f(x, y) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\text{s.c. } x + 2y + z = 1$$

$$2x - y - 3z = 4$$

- 1- f est-elle continue ? coercive ? convexe (par deux méthodes) ? justifier.
- 2- C est-elle fermée ? bornée ? convexe ? justifier.
- 3- Dédurre que P4 admet au moins une solution.
- 4- Dédurre que P4 admet une seule solution.
- 5- L'ensemble formée par la contrainte C est-il régulier (contrainte qualifiée) ? justifier.
- 6- Trouvez la solution de ce problème.

1- f est-elle continue ? coercive ? strictement convexe (par deux méthodes) ? justifier.

- f est un polynôme de 2^{ème} degré $\rightarrow f$ est continue sur R^3 (sur C aussi)
- f est-elle coercive ? il faut calculer $\lim_{\|(x,y,z)\| \rightarrow +\infty} f(x,y,z) = ?$

Posons :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \sin \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \varphi \end{cases}$$

avec $r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi[$ et $\varphi \in [0, \pi[$.

$$\begin{aligned} \lim_{\|(x,y,z)\| \rightarrow +\infty} f(x,y,z) &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \Phi_f(r, \theta, \varphi) \\ &= \lim_{r \rightarrow +\infty} r^2 \cos^2(\theta) \sin^2(\varphi) + r^2 \sin^2(\theta) \sin^2(\varphi) + r^2 \cos^2(\varphi) \\ &= \lim_{r \rightarrow +\infty} r^2 (\cos^2(\theta) \sin^2(\varphi) + \sin^2(\theta) \sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)) \end{aligned}$$

Le terme $\cos^2(\theta) \sin^2(\varphi) + \sin^2(\theta) \sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)$ est strictement positif.

Donc : $\lim_{\|(x,y,z)\| \rightarrow +\infty} f(x,y,z) = \lim_{r \rightarrow +\infty} r^2 = +\infty$

Ainsi : f est coercive.

- f est-elle strictement convexe ? Oui

Méthode 1 : f est une somme de 3 fonctions strictement convexes multipliées par des coefficients positifs (+1).

Méthode 2 : à travers la matrice Hessienne.

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(x,y,z) = \text{Hess } f(X) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} \Delta_1 = 2 > 0 \\ \Delta_2 = 2 > 0 \\ \Delta_3 = 2 > 0 \end{cases}$$

2- C est-elle fermée ? bornée ? convexe ? justifier.

- C est-elle fermée ?

$$C = \{(x,y,z) \in R^3, x + 2y + z = 1, 2x - y - 3z = 4\}$$

Cet ensemble C est fermé car c'est l'intersection de deux ensemble C_1 et C_2 fermés :

$$C_1 = \{(x,y,z) \in R^3, x + 2y + z = 1\}$$

$$C_2 = \{(x,y,z) \in R^3, 2x - y - 3z = 4\}$$

Démonstration graphique.

- C est-elle bornée ?

C_1 et C_2 sont deux plans dans un espace 3D. Son intersection forme une droite, donc C n'est pas borné.

- C est-elle convexe ? Oui, car elle forme une droite.

3- Déduire que P4 admet au moins une solution.

f est continue et co  rvice et l'ensemble C est fermé, alors le problème P4 admet au moins une solution (un minimum global en **au moins un seul** point) dans C .

4- Déduire que P4 admet une seule solution (un minimum global en un **seul** point).

En plus, f est strictement convexe et C est convexe, alors P4 admet une seule solution.

5- L'ensemble formée par la contrainte C est-il régulier (contrainte qualifiée) ? justifier.

L'ensemble C est formé par deux fonctions $g_1(x, y, z) = x + 2y + z - 1$ et $g_2(x, y, z) = 2x - y - 3z - 4$ qui sont affines, alors l'ensemble C est régulier.

6- Trouvez la solution de ce problème.

a. Calcul du Lagrangien

Les fonctions f et g sont continues et différentiables (de classe C^1).

$$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda_1(x + 2y + z - 1) + \lambda_2(2x - y - 3z - 4)$$

b. Rechercher les points critiques du Lagrangien

$$\nabla L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = \begin{cases} 2x + \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ 2y + 2\lambda_1 - \lambda_2 \\ 2z + \lambda_1 - 3\lambda_2 \\ x + 2y + z - 1 \\ 2x - y - 3z - 4 \end{cases}$$

Pour trouver les points critiques du L , il faut résoudre le système d'équation :

$$\begin{cases} 2x + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 & (L1) \\ 2y + 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 & (L2) \\ 2z + \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0 & (L3) \\ x + 2y + z - 1 = 0 & (L4) \\ 2x - y - 3z - 4 = 0 & (L5) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 2x + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 & (L1) \\ 2y + 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 & (L2) \\ 2z + \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0 & (L3) \\ x + 2y + z = 1 & (L4) \\ 2x - y - 3z = 4 & (L5) \end{cases}$$

C'est un système d'équations de 5 équations linéaires. Pour le résoudre, on utilise la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{cases} 2x + 0y + 0z + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 & (L1) \\ 0x + 2y + 0z + 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 & (L2) \\ 0x + 0y + 2z + \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0 & (L3) \leftrightarrow \\ x + 2y + z + 0\lambda_1 + 0\lambda_2 = 1 & (L4) \\ 2x - y - 3z + 0\lambda_1 + 0\lambda_2 = 4 & (L5) \end{cases}$$

$2x + 0y + 0z + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$	L1
$x + 2y + 0z + \frac{5}{2}\lambda_1 + 0\lambda_2 = 0$	$L2 = L2 + \frac{1}{2}L1$
$3x + 0y + 2z + \frac{5}{2}\lambda_1 + 0\lambda_2 = 0$	$L3 = L3 + \frac{3}{2}L1$
$x + 2y + z + 0\lambda_1 + 0\lambda_2 = 1$	L4
$2x - y - 3z + 0\lambda_1 + 0\lambda_2 = 4$	L5

↔

$2x + 0y + 0z + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$	L1
$3x + 0y + 2z + \frac{5}{2}\lambda_1 = 0$	L3
$-2x + 2y - 2z = 0$	L2 = L2 - L3
$x + 2y + z = 1$	L4
$2x - y - 3z = 4$	L5

$2x + 0y + 0z + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$	L1
$3x + 0y + 2z + \frac{5}{2}\lambda_1 = 0$	L3
$-2x + 2y - 2z = 0$	L2
$5x - 4y = 4$	L5 = L5 - $\frac{3}{2}$ L2
$3y = 1$	L4 = L4 + $\frac{1}{2}$ L2

$$\rightarrow y = \frac{1}{3}, \quad x = \frac{16}{15}, \quad z = -\frac{11}{15}, \quad \lambda_1 = -\frac{52}{75}, \quad \lambda_2 = -\frac{54}{75}$$

Le lagrangien admet un point critique $(\frac{1}{3}, \frac{16}{15}, -\frac{11}{15}, -\frac{52}{75}, -\frac{54}{75})$. Et puisque nous avons démontré dans la question 6 que tout l'ensemble C est régulier), alors $X^*(\frac{1}{3}, \frac{16}{15}, -\frac{11}{15})$ est un point critique du problème P4.

Nous avons démontré aussi (dans la question 4) que le problème P4 admet une seule solution (un minimum global en un **seul** point). Ainsi, le problème P4 admet un minimum global $f(\frac{1}{3}, \frac{16}{15}, -\frac{11}{15}) = \frac{134}{75}$ à le seul point critique $X^*(\frac{1}{3}, \frac{16}{15}, -\frac{11}{15})$.