

## Examen de rattrapage

---

### Exercice 1

Trouver le point de la courbe  $y = x^2 + 1$  qui minimise la fonction  $(x - 1)^2 + y^2$ .

### Exercice 2

Une entreprise européenne fabrique deux modèles de petites voitures (jouets) : les modèles X et Y. Une unité du modèle X, le plus abordable, se vend à 1 euro. Quant au modèle Y, beaucoup plus sophistiqué, une unité se vend à 3 euros.

Quand l'entreprise fabrique  $x$  unités de petites voitures du modèle X et  $y$  unités de petites voitures du modèle Y, elle génère un coût total de fabrication (exprimé en euro) qui est donné par la fonction suivante :

$$C(x, y) = 5x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x - 1000$$

On suppose que tous les jouets fabriqués sont tous vendus sur le marché.

1. Déterminer la fonction profit net  $P(x, y)$  réalisé par l'entreprise lorsqu'elle vend  $x$  unités du modèle X et  $y$  unités du modèle Y.
2. Montrer que la fonction  $P(x, y)$  est strictement concave.

La capacité de production de l'entreprise est au total de 20 jouets par jour. Considérons comme contrainte que l'entreprise tourne à plein régime (production maximale).

3. Montrer que l'ensemble formé par cette contrainte est convexe.
4. Trouvez les quantités  $x$  et  $y$  permettant de maximiser le profit quotidien.
5. Calculer dans ce cas le profit réalisé.

En tenant compte la capacité de l'entreprise, le conseil d'administration se demande s'il est possible d'augmenter le profit en produisant autrement. Donner le problème d'optimisation à résoudre dans ce cas.

**Rappel** : Si la Hessienne d'une fonction est définie négative, alors cette fonction est strictement concave.

**Bon courage**