

Chapitre IV

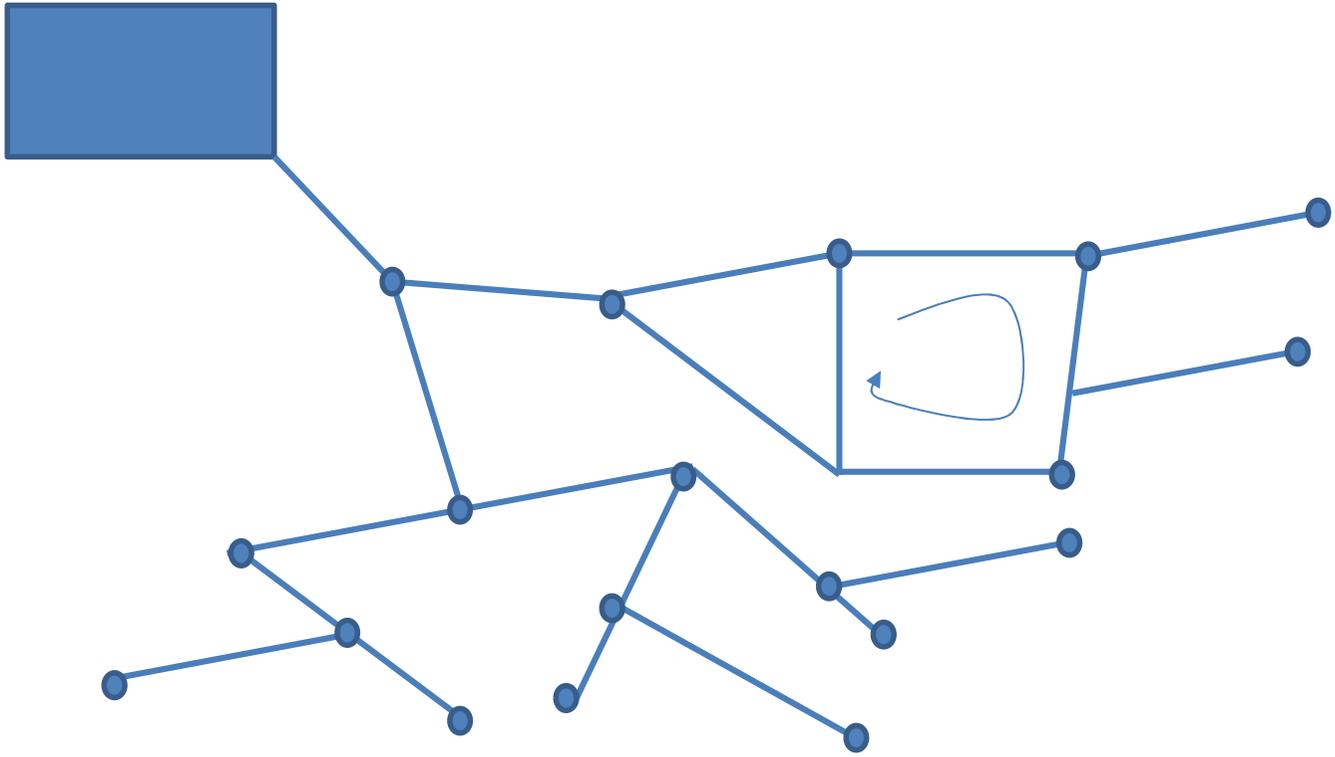
Ecoulements dans les conduites en charge

1. Les réseaux hydrauliques

1.1 Notion de réseau hydraulique

On appelle réseau hydraulique un système d'écoulement canalisé dont l'organisation topologique est connue. Les éléments du réseau sont:

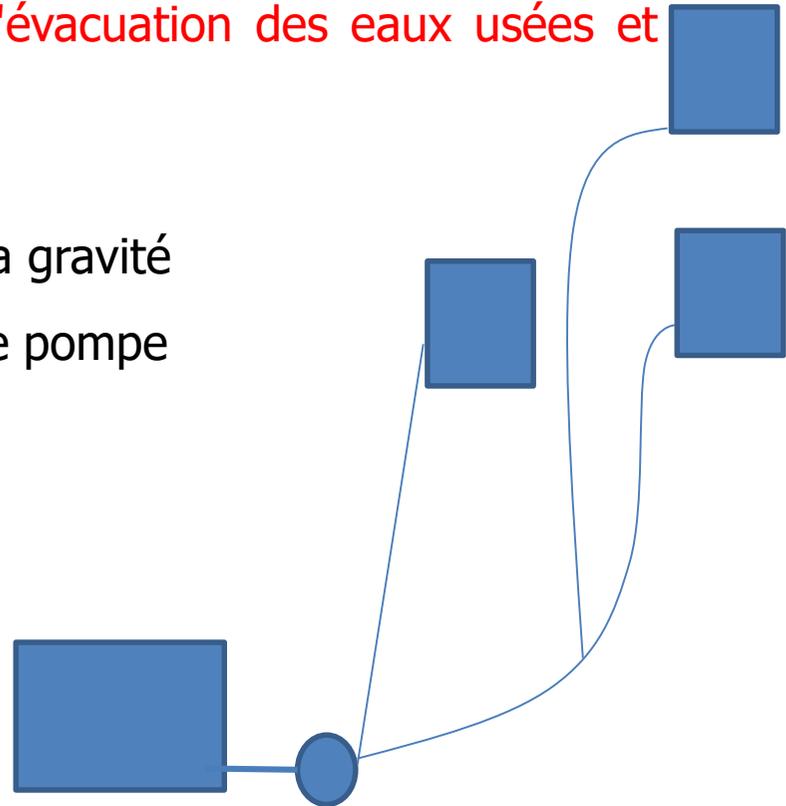
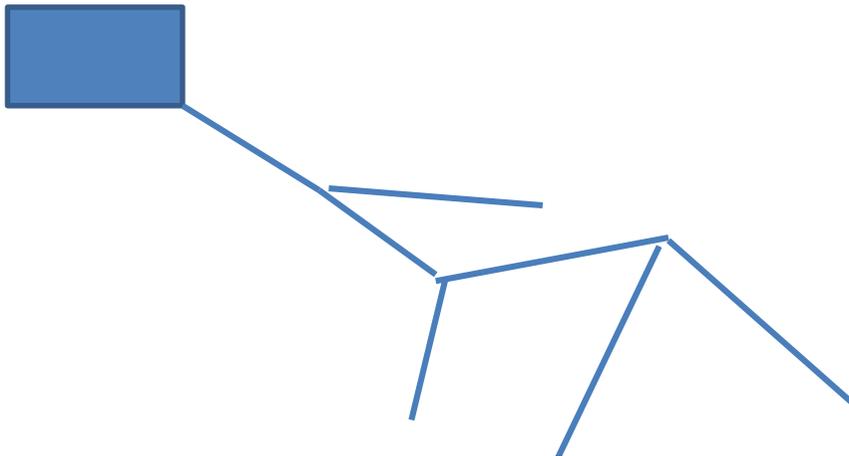
- ❑ Les nœuds d'entrée et de sortie du système et de localisation ponctuelle d'ouvrages
- ❑ Les tronçons limité par un nœud d'origine et par un nœud d'extrémité représentant une portion de collecteur ayant les mêmes caractéristiques
- ❑ Les branches ensemble de tronçons consécutifs assurant la continuité de l'écoulement
- ❑ Les mailles constituées par un ensemble de tronçons fermé sur même
- ❑ Cette décomposition permet de distinguer:
 - ✓ les réseaux ramifiés
 - ✓ Les réseaux maillés



1.2 Écoulement en charge – écoulement à surface libre

Les écoulement dans les réseaux urbains peuvent être:

- En charge (réseaux d'alimentation en eau potable) : les écoulement sont à section pleine et sous pression
- À surface libre (réseaux de collecte et d'évacuation des eaux usées et des eaux pluviales) en général gravitaires
- Les écoulements en charges peuvent être:
 - ✓ gravitaires : écoulement sous l'effet de la gravité
 - ✓ provoqués par refoulement à l'aide d'une pompe



1.3 Régime permanent – régime transitoire

En régime permanent l'étude de l'écoulement dans les réseaux hydrauliques est simple, elle permet de déterminer les caractéristiques hydrauliques (débits, cotes piézométriques en fonction d'une seule variable : l'espace

En réalité les écoulement dans les réseaux urbains ne sont pas permanent : les débits sont variables dans le temps ce qui introduit, par rapport au régime permanent la variable temps

Cependant, quand les variations sont lentes on peut calculer l'écoulement comme une succession de régimes permanents

2. Les écoulements en charge

2.1 Charge hydraulique – théorème de Bernoulli

2.1.1 Charge hydraulique

La charge hydraulique exprime l'énergie par unité de poids de fluide et s'exprime en hauteur :

$$H = \alpha \frac{U^2}{2g} + \frac{P}{\rho g} + z$$

U : La vitesse moyenne du liquide (vitesse débitante=Q/S) [m/s]

α est le coefficient de l'énergie cinétique associé à la distribution non uniforme de la vitesse dans la section $\alpha \sim 1,05$. Il est souvent pris égal à l'unité

P : la pression en Pa

ρ : La masse volumique du liquide [kg/m³]

z : La cote

2. Les écoulements en charge

2.1 Charge hydraulique – théorème de Bernoulli

2.1.2 Théorème de Bernoulli

Le théorème de Bernoulli exprime qu'aux pertes de charge près, l'énergie du liquide se conserve. Si on note H_1 la charge dans la section S_1 et H_2 la charge dans la section S_2 , on a:

$$H_1 = H_2 + J = H_2 + \Delta H_{12}$$

$$\underbrace{\frac{P_1}{\rho g} + z_1 + \alpha_1 \frac{U_1^2}{2g}}_{H_1} = \underbrace{\frac{P_2}{\rho g} + z_2 + \alpha_2 \frac{U_2^2}{2g}}_{H_2} + \Delta H_{12}$$

$J = \Delta H_{12}$ représente l'ensemble des pertes de charge (différence de charge ΔH) entre les sections S_1 et S_2

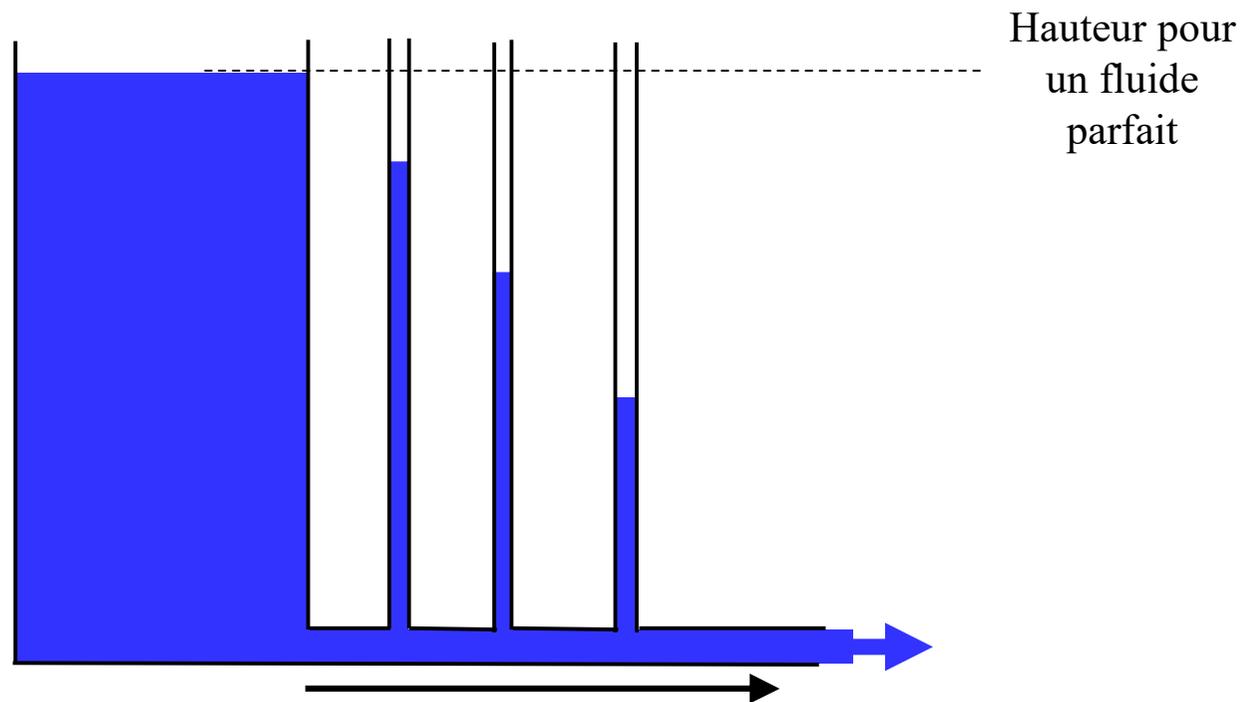
On distingue :

- **Les pertes de charge linéaires** : réparties le long de l'écoulement dues aux frottements visqueux qui dissipent l'énergie du liquide
- **Les pertes de charge singulières** (ou locales) associées aux diverses singularités placées le long de l'écoulement

2) Pertes de charge

Pertes de charge régulières

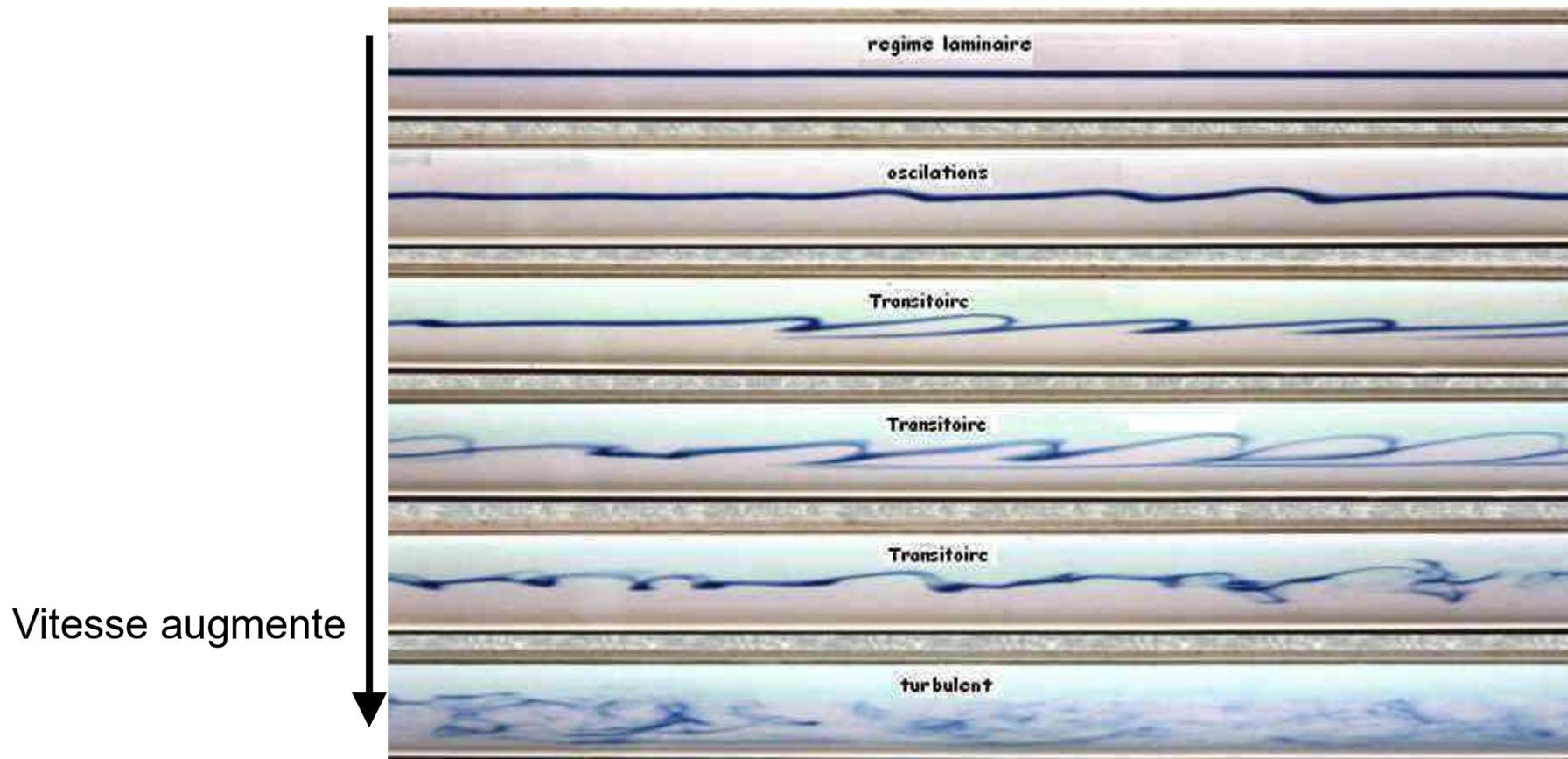
Elles sont proportionnelles à la longueur de conduite.



2) Pertes de charge

Type d'écoulement

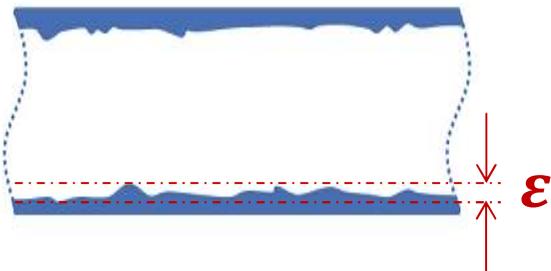
Les pertes de charge dépendent du type d'écoulement.



2) Pertes de charge

Expérimentalement on constate que les pertes de charge générales dépendent des éléments suivants:

- **longueur de la canalisation**
- **viscosité du liquide**
- **diamètre intérieur**
- **débit**
- **rugosité de la canalisation**



Rugosité: hauteur des aspérités de conduites
 ε : est la hauteur des aspérités : **rugosité absolue**, en [mm].

$k = \varepsilon / D$: est la **rugosité relative**

2.2 Pertes de charge linéaires – pertes de charge singulières

2.2.1 Pertes de charge linéaires

Les pertes de charge linéaires s'expriment par la formule générale de Darcy-Weisbach sous la forme:

$$J = \Delta H = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2g} \quad \rightarrow \quad j = \frac{J}{L} = \frac{\lambda}{D} \cdot \frac{V^2}{2g}$$

L : est la longueur de la conduite

D : une dimension de la conduite (diamètre pour les conduites circulaire

λ : Coefficient de pertes de charge linéaire

Les pertes de charge linéaires sont proportionnelles à la longueur. **j** représente ainsi la perte de charge par unité de longueur (perte de charge unitaire) en m/m

Le coefficient de pertes de charge dépend du régime de l'écoulement (nombre de Reynolds), de la rugosité de la conduite et de la viscosité du liquide

2. Les écoulements en charge

2.2. Pertes de charge linéaires – pertes de charge singulières

2.2.1 Pertes de charge linéaires

En écoulement Laminaire $Re < 2000$, le coefficient de pertes de charge se calcule à partir de la formule de Poiseuille:

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad Re = \rho \frac{VD}{\mu} = \frac{VD}{\nu}$$

Re est le nombre de Reynolds

μ la viscosité dynamique du liquide $\mu_{eau} = 10^{-3} \text{ kg/ms}$

ν la viscosité cinématique du liquide $\nu_{eau} = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

Plusieurs formules empiriques et semi empiriques permettent le calcul du coefficient de pertes de charge pour les écoulements turbulents ($Re > 2000$).

Nous rappelons ici la formule universelle de pertes de charge de Colbrook:

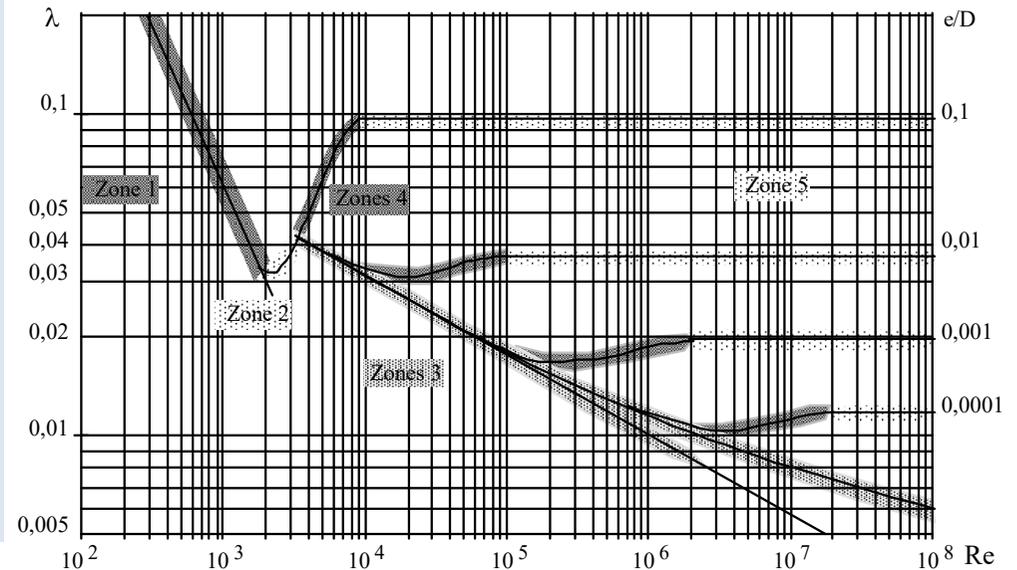
$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon}{3,7D} + \frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} \right)$$

ε est la rugosité de la conduite (hauteur des aspérités sur la paroi de la conduite)

La détermination expérimentale de λ a été effectuée par Nikuradse vers 1930. Pour cela, il réalisa une rugosité artificielle des tuyaux, en y collant, une couche uniforme et continue de grains de sables calibrés. La rugosité était donc définie à partir d'un seul paramètre ε représentant la taille des grains de sable :

$$\lambda = f(Re, \varepsilon/D)$$

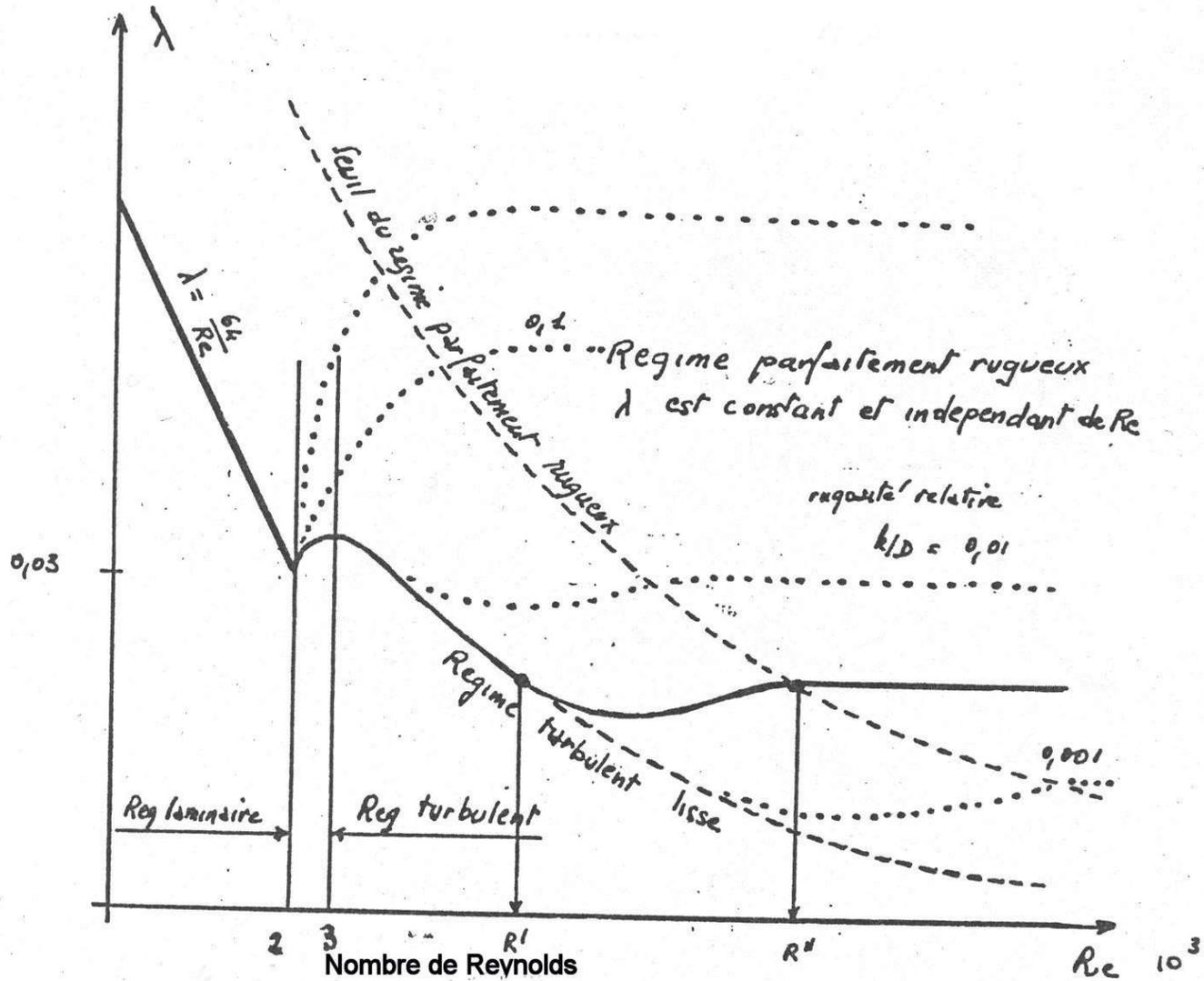
En jouant sur ε et sur D , Nikuradse fit varier ε/D de 0,1 à 0,0001 et Re de 200 à 10^8 . L'ensemble des résultats donnait dans un graphique $\log \lambda = f(\log Re, \varepsilon/D)$ le schéma suivant :



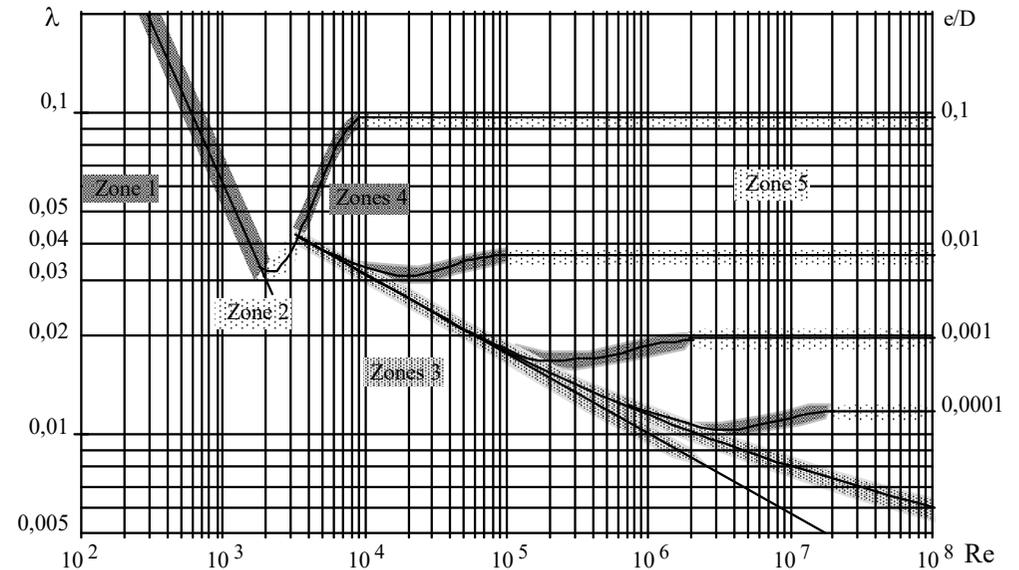
Le schéma se caractérise par trois zones rectilignes **1, 3 et 5**, de pentes respectives -1, -1/4 et 0. Les zones **2 et 4** assurent le raccordement entre les précédentes.

- ✓ Pour les zones 1, 2 et 3, λ ne dépend que de Re , la conduite sera considérée comme hydrauliquement lisse.
- ✓ Dans la zone 4, λ dépend à la fois de Re et de ε/D , on qualifiera alors l'écoulement de semi-rugueux.
- ✓ Enfin, dans la zone 5, λ ne dépend plus que de Re , la conduite se comporte alors comme hydrauliquement rugueuse.

Variation du coefficient de pertes de charge en fonction du nombre de Reynolds



, - Dans la zone 1 on a : $\lambda = \frac{64}{Re}$ oi de **Hagen Poiseuille**
valable pour $Re < 2000$.



Dans la **zone 3** deux formules ont été proposées :

- La formule de **Blasius**, simple mais valable uniquement pour $Re < 10^5$:

$$\lambda = \frac{0,316}{Re^{\frac{1}{4}}} = (100 \cdot Re)^{-\frac{1}{4}}$$

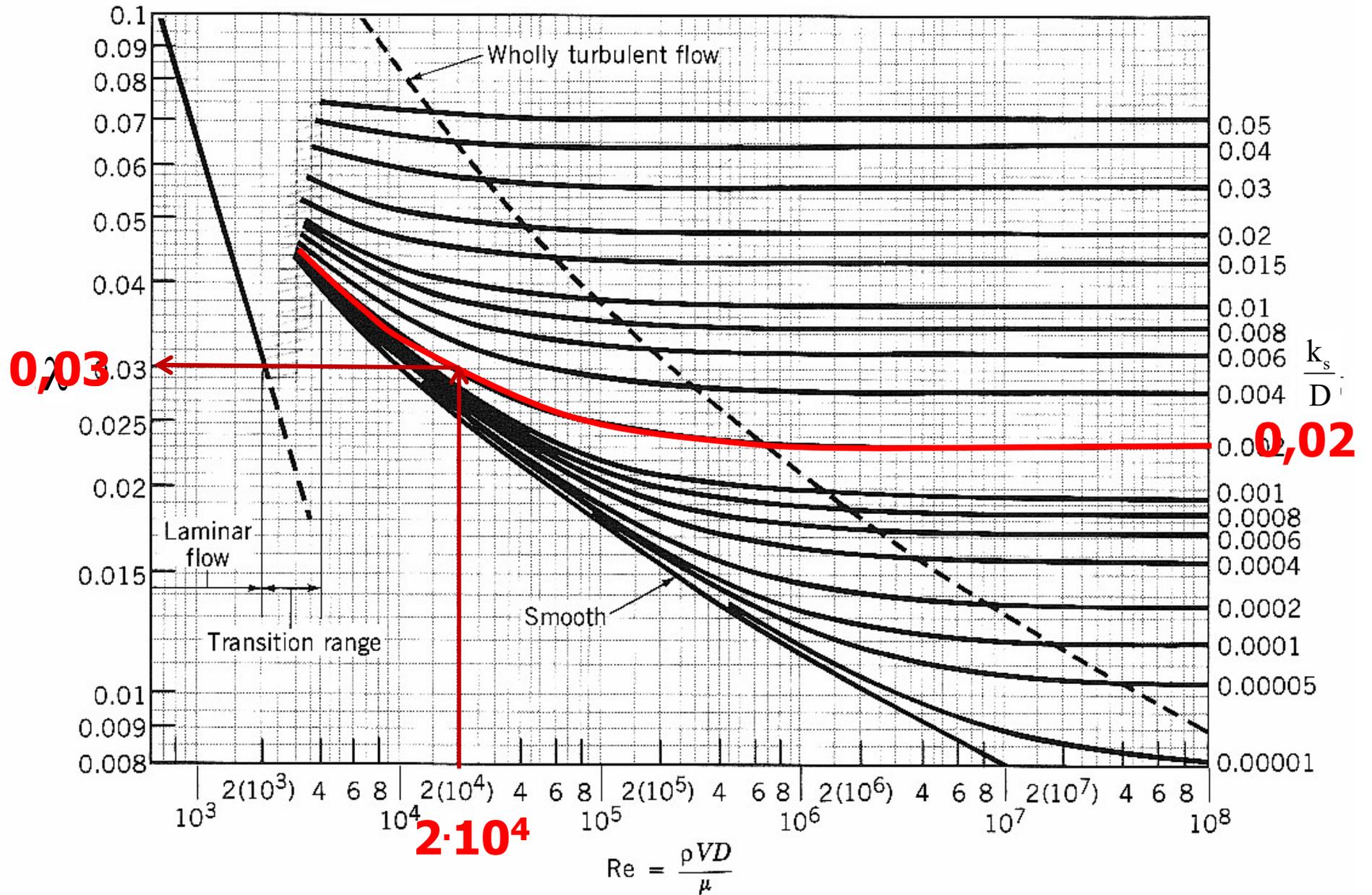
- et la première formule de **Von Karman**, située légèrement au-dessus de la droite de Blasius pour $Re > 10^5$. Cette formule implicite est d'un emploi moins commode puisque l'on a :

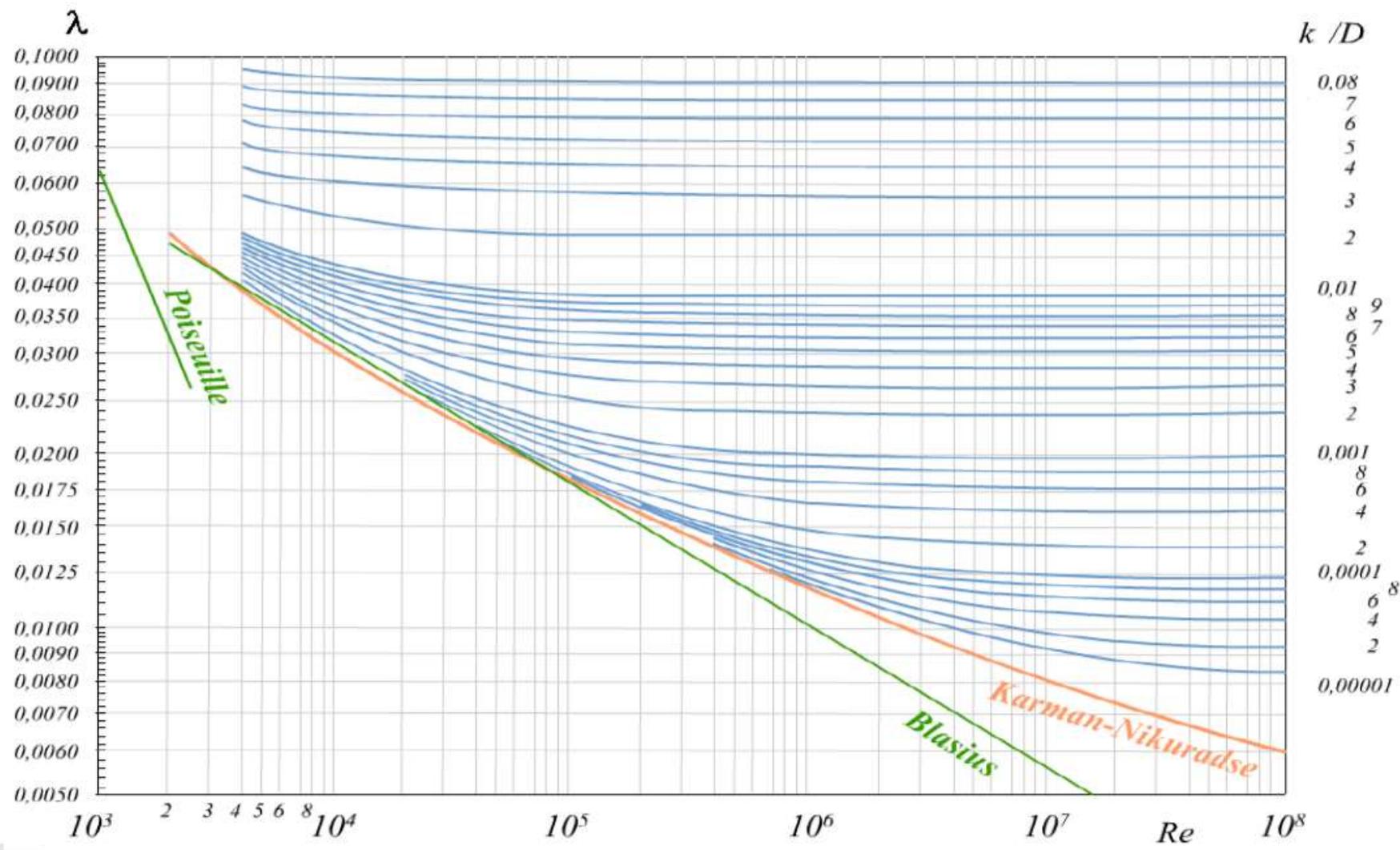
$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \cdot \log(Re\sqrt{\lambda}) - 0,8 = -2 \cdot \log\left(\frac{2,51}{Re\sqrt{\lambda}}\right)$$

- Pour la zone 5 où λ ne dépend que de $\frac{\varepsilon}{D}$ **Von Karman** a proposé sa deuxième formule explicite:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \cdot \log\left(\frac{D}{\varepsilon}\right) - 1,14 = -2 \cdot \log\left(\frac{\varepsilon}{3,71D}\right)$$

Diagramme de Moody





2.2. Pertes de charge linéaires – pertes de charge singulières

2.2.1 Pertes de charge linéaires

La formule de Hazen-Williams, utilisée surtout en Amérique du Nord, donne la vitesse d'écoulement dans une conduite en charge sous la forme:

$$V = 0,8492 \cdot C \cdot R^{0,63} \cdot j^{0,54}$$

V : Vitesse en [m/s]

R : le rayon hydraulique [m] $R = \frac{P_m}{S_m}$ périmètre mouillé/section mouillée

C : coefficient d'écoulement

j : pertes de charge par unité de longueur $j = \frac{J}{L}$

Dans les conduites circulaires de diamètre D, $R_H = \frac{D}{4}$, le débit est donné par

la formule: $Q = 0,2785 \cdot C \cdot D^{2,63} \cdot \left[\frac{J}{L}\right]^{0,54}$

2. Les écoulements en charge

2.2. Pertes de charge linéaires – pertes de charge singulières

2.2.1 Pertes de charge linéaires

Formule de Hazen-Williams:

$$Q = 0,2785 \cdot C_{HW} \cdot D^{2,63} \left[\frac{J}{L} \right]^{0,54}$$

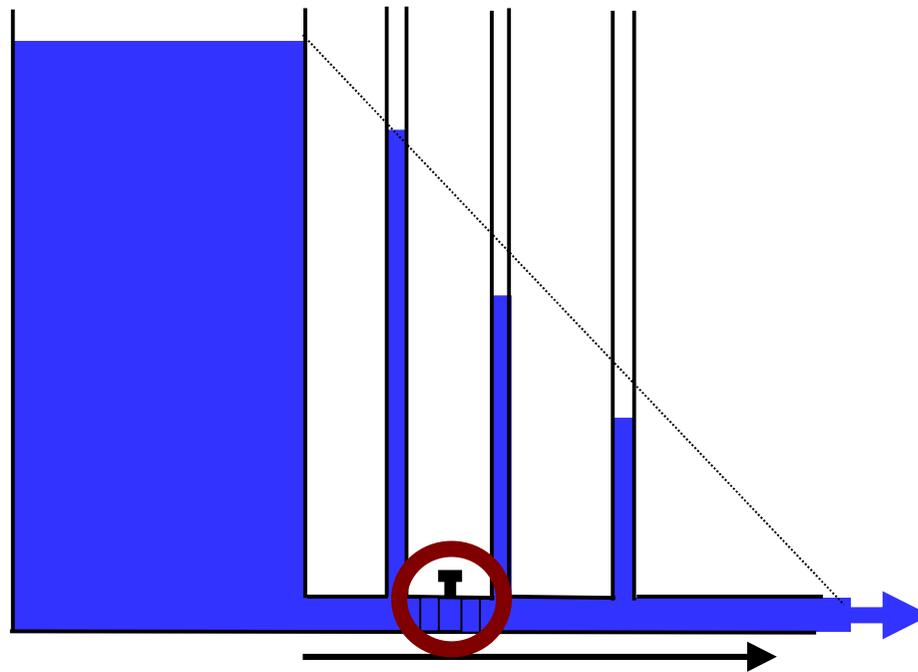
Le coefficient d'écoulement de la formule de Hazen-Williams dépend de la rugosité de la conduite. Celle-ci peut évoluer avec le vieillissement de la conduite:

Matériau	C
Fonte neuve	130
Fonte (age 10 ans)	120
Fonte (age 20 ans)	100
Béton	130
Acier neuf	120
Amiante Ciment	140
Polyvinyle de Chlorure (PVC)	150

2) Pertes de charge

Pertes de charge singulières

Il s'agit des pertes de charge dues aux accidents de parcours (grille, filtre, coude, rétrécissement, vanne ...)



2. Les écoulements en charge

2.2. Pertes de charge linéaires – pertes de charge singulières

2.2.2 Pertes de charge singulières

Les pertes de charge singulières s'expriment par une formule générale de la forme:

$$J = \xi \frac{V^2}{2g}$$

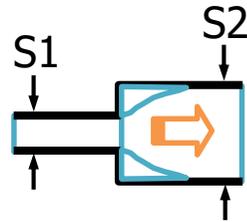
ξ : Coefficient de pertes de charge qui dépend de la nature de la singularité

Parfois, pour simplifier la représentation des réseaux, on exprime la perte de charge singulière en longueur équivalente de conduite:

$$\xi \frac{V^2}{2g} = \lambda \frac{L_{eq}}{D} \frac{V^2}{2g} \quad \rightarrow \quad L_{eq} = \frac{\xi}{\lambda} D = nD$$

Elargissement brusque

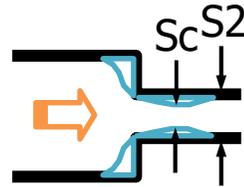
$$\xi = (1 - S_1/S_2)^2$$



Rétrécissement brusque

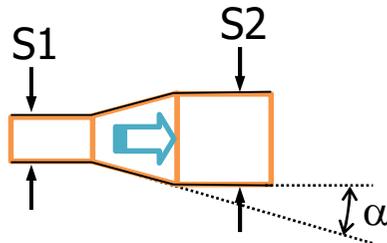
$$\xi = (1/\sigma - 1)^2$$

$$\sigma = S_c/S_2$$



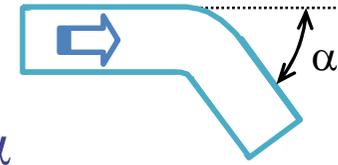
Divergent

$$\xi = (1 - S_1/S_2)^2 \sin \alpha$$



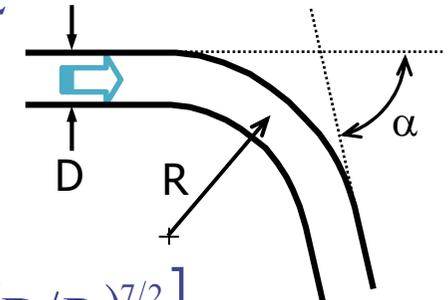
Coude brusque

$$\xi = \sin^2 \alpha + 2 \sin^4 \frac{\alpha}{2}$$



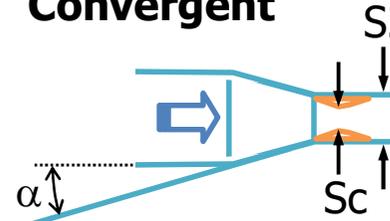
Coude arrondi

$$\xi = \frac{\alpha}{\pi} \left[0,131 + 1,847(D/R)^{7/2} \right]$$



Convergent

$$\xi = (1/\sigma - 1)^2 \sin \alpha$$



Entrée d'une canalisation

Entrée brusque

$$\xi = 0,5$$

Entrée progressive

$$\xi = 0,04$$

2.3. Ligne de charge – Ligne piézométrique

2.3.1 Ligne piézométrique

La ligne piézométrique représente la ligne des niveaux de la charge statique h_s le long de l'écoulement:

$$h_s = \frac{P}{\rho g} + z$$

Elle permet de visualiser la pression exercée par l'eau en chaque point le long de l'écoulement. Elle correspond au niveau qu'atteindrait l'eau dans un tuyau vertical connecté sur la veine transportant l'écoulement.

2.3. Ligne de charge – Ligne piézométrique

2.3.2 Ligne de charge

La ligne de charge représente la ligne des niveaux de la charge totale H le long de l'écoulement:

$$H = \frac{V^2}{2g} + \frac{P}{\rho g} + z$$

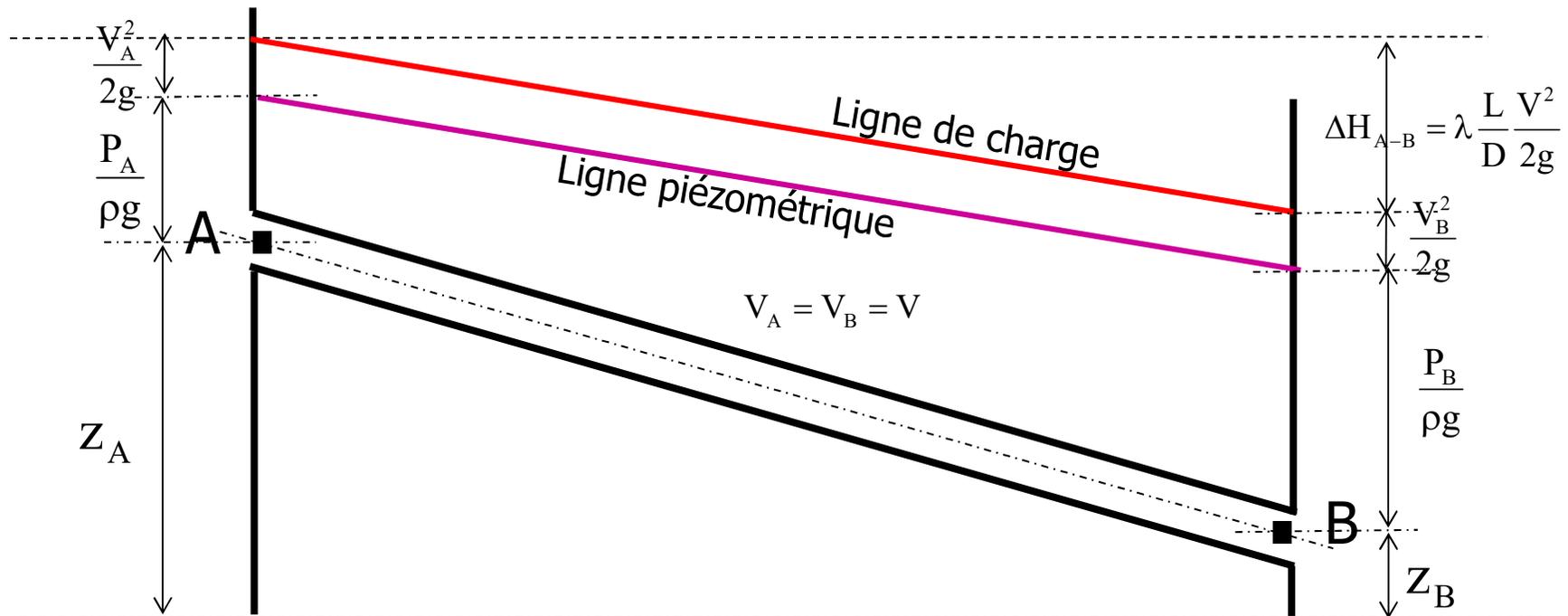
On remarquera que la différence entre la charge totale et la charge statique correspond à la charge dynamique qui représente l'énergie cinétique par unité de poids du liquide.

L'équation de Bernoulli indique que la différence de charge entre deux points le long de l'écoulement correspond aux pertes de charge linéaires et singulières

Dans une veine d'écoulement de section constante, la ligne de charge et la ligne piézométrique sont parallèles. Leur pente correspond, en tout point de l'écoulement à la perte de charge par unité de longueur

2.3. Ligne de charge – Ligne piézométrique

2.3.3 Conduite de diamètre constant



2.3. Ligne de charge – Ligne piézométrique

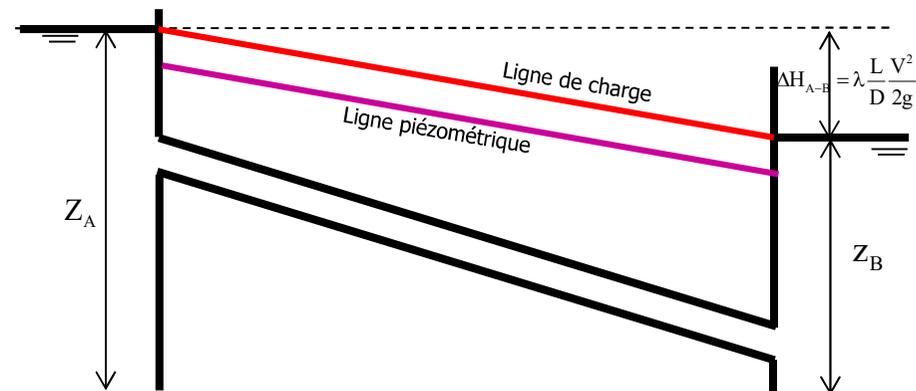
2.3.3 Conduite de diamètre constant reliant deux réservoirs à niveaux constants

En négligeant les pertes de charge à l'entrée et à la sortie de la conduite, on a:

$$H_A = z_A \quad H_B = z_B$$

$$H_A - H_B = \lambda \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} = \frac{8\lambda L}{\pi^2 D^5 g} Q^2$$

$$Q = \pi \sqrt{\frac{(z_A - z_B)g}{\frac{8\lambda L}{D^5}}}$$

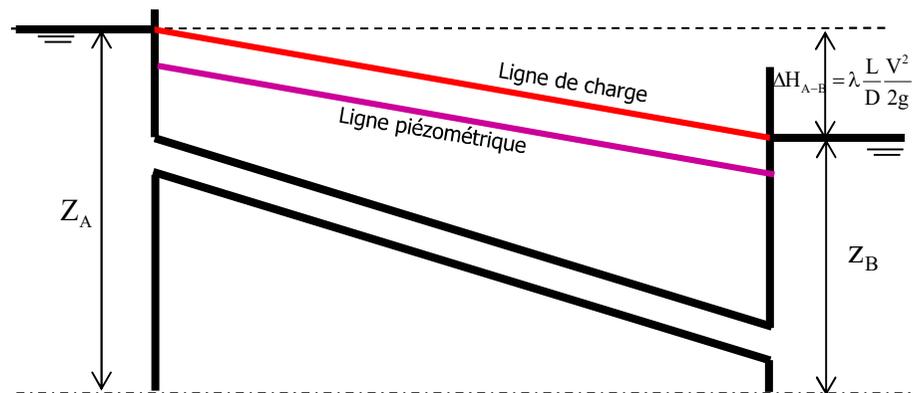


2.3. Ligne de charge – Ligne piézométrique

2.3.3 Conduite de diamètre constant reliant deux réservoirs à niveaux constants

Lorsque on prend en compte les pertes de charge à l'entrée et à la sortie de la conduite, on a:

$$H_A = z_A \quad H_B = z_B$$



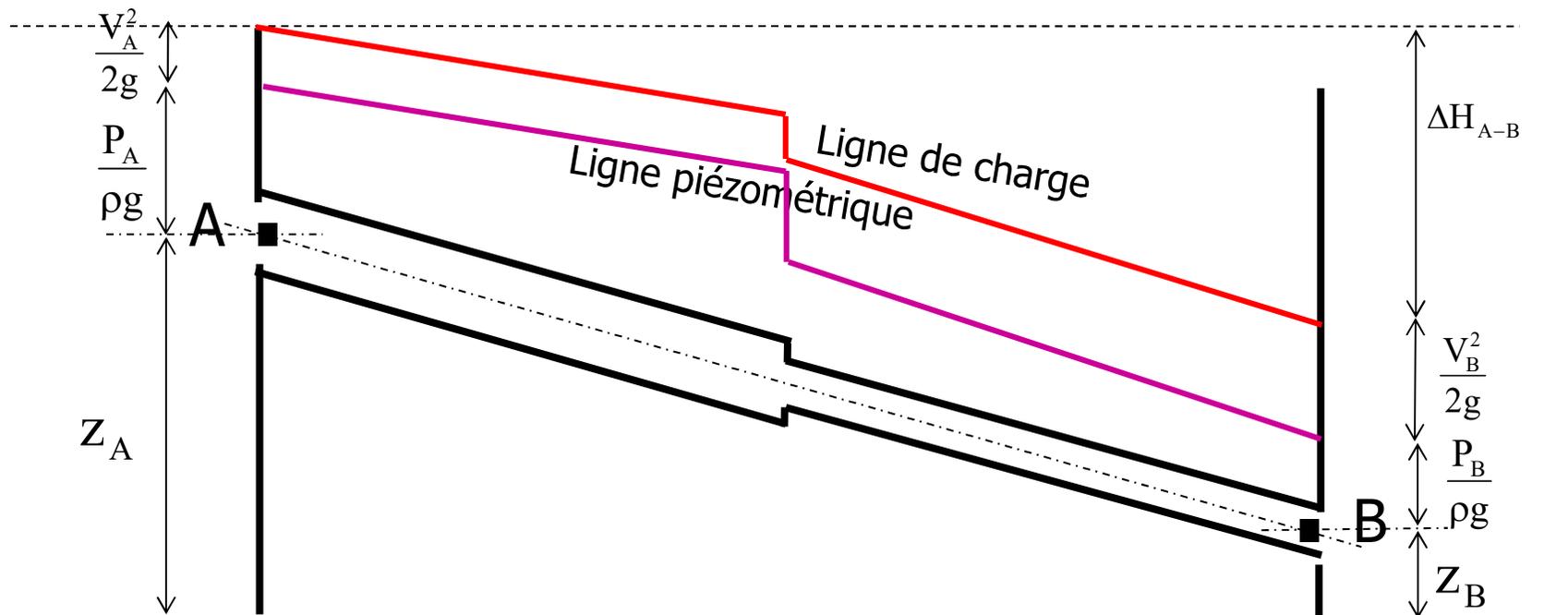
$$H_A - H_B = \left(\lambda \frac{L}{D} + \sum_i \xi_i \right) \frac{V^2}{2g} = \frac{8}{\pi^2 D^4} \left(\lambda \frac{L}{D} + \sum_i \xi_i \right) Q^2$$

$$Q = \pi \sqrt{\frac{(z_A - z_B)g}{8 \left[\frac{\lambda L}{D^5} + \frac{\sum_i \xi_i}{D^4} \right]}}$$

2. Les écoulements en charge

2.3. Ligne de charge – Ligne piézométrique

2.3.4 Conduites de diamètres différents avec pertes de charges locales



2.3. Ligne de charge – Ligne piézométrique

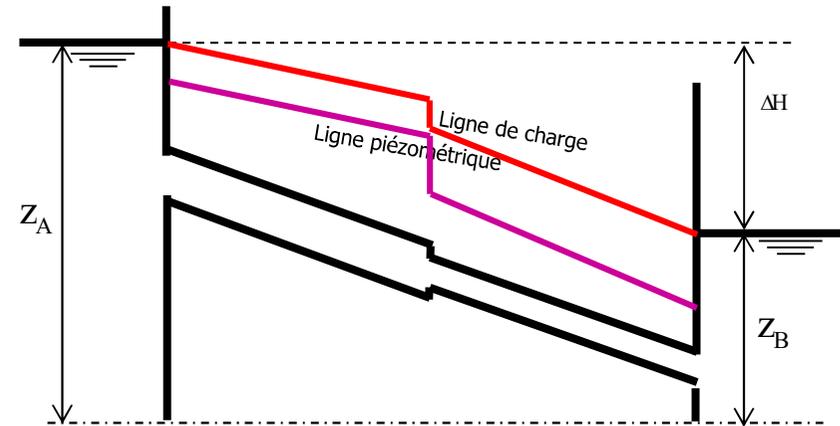
2.3.4 Conduites de diamètres différents avec pertes de charges locales reliant deux réservoirs à niveaux constants

Le même raisonnement conduit à:

$$H_A = z_A \quad H_B = z_B$$

$$H_A - H_B = \left(\lambda_1 \frac{L_1}{D_1} + \sum_i \xi_{i1} \right) \frac{V_1^2}{2g} + \left(\lambda_2 \frac{L_2}{D_2} + \sum_i \xi_{i2} \right) \frac{V_2^2}{2g}$$

$$Q = \pi \frac{D_1^2}{4} V_1 = \pi \frac{D_2^2}{4} V_2$$



$$Q = \pi \sqrt{\frac{(z_A - z_B)g}{8 \left[\frac{\lambda_1 L_1}{D_1^5} + \frac{\lambda_2 L_2}{D_2^5} + \frac{\sum_i \xi_{i,1}}{D_1^4} + \frac{\sum_i \xi_{i,2}}{D_2^4} \right]}}$$

2. Les écoulements en charge

2.3. Ligne de charge – Ligne piézométrique

2.3.4 Conduites de diamètres différents avec pertes de charges locales

D'une façon générale les pertes de charge dans une branche de réseau comprenant i tronçon de diamètre D_i en charge s'expriment par:

$$\Delta H = \left[\sum_i \lambda_i \frac{L_i}{D_i} + \sum_i \sum_j \xi_{i,j} \right] \frac{V_i^2}{2g} = \frac{8}{\pi^2 g} \left[\sum_i \lambda_i \frac{L_i}{D_i^5} + \sum_i \sum_j \frac{\xi_{i,j}}{D_i^4} \right] Q^2$$

Pour les écoulements en régime turbulent rugueux (grand nombres de Reynolds) le coefficient de pertes de charge linéaires λ_i sont constants. Il ne dépendent que des caractéristiques des conduites. Les coefficients de pertes de charges singulières ne dépendant que du type de singularité, les pertes de charge s'écrivent alors sous la forme:

$$\Delta H = \left[\sum_i R_i + \frac{8}{\pi^2 g} \sum_i \sum_j \frac{\xi_{i,j}}{D_i^4} \right] Q^2$$

Où R_i est le coefficient de résistance du tronçon i , qui ne dépend que des caractéristiques du tronçon i (Longueur, rugosité, diamètre). Le second terme ne dépend que du diamètre de la conduite et des types de singularités

2.3.5 Coefficient de résistance d'une conduite

Selon la formule de Darcy Weisbach l'expression de la perte de charge linéaire dans une conduite de diamètre D est:

$$\Delta H = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2g} = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{Q^2}{2gS^2} = \lambda \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{Q^2}{2g \left(\frac{\pi \cdot D^2}{4} \right)^2} = \frac{8\lambda \cdot L}{\pi^2 \cdot g \cdot D^5} \cdot Q^2$$

Donc $\Delta H = R \cdot Q^2$ Avec $R = \frac{8\lambda \cdot L}{\pi^2 g \cdot D^5}$

Pour les écoulements en régime turbulent rugueux (grand nombres de Reynolds) le coefficient de pertes de charge linéaires λ_i sont constants. Il ne dépendent que des caractéristiques des conduites. Les coefficients de pertes de charges singulières ne dépendant que du type de singularité, les pertes de charge s'écrivent alors sous la forme:

$$\Delta H_s = \sum \xi \frac{V^2}{2g} = \sum \xi \frac{Q^2}{2g \left(\frac{\pi \cdot D^2}{4} \right)^2} = \sum \xi \frac{8}{\pi^2 g \cdot D^4} \cdot Q^2 = R' \cdot Q^2$$

$$\Delta H = \Delta H_L + \Delta H_s = \mathfrak{R} \cdot Q^2 \text{ avec } \mathfrak{R} = R + R' = R + \frac{8}{\pi^2 g \cdot D^4} \sum_i \xi_i$$

Dans les avant projets d'hydraulique urbaine on peut être amenés à exprimer les pertes de charge singulière comme une fraction des pertes de charge linéaires de sorte que: $\mathfrak{R} = (1 + \beta)R$

2.3.5 Coefficient de résistance d'une conduite

On peut généraliser l'analyse précédente en exprimant la perte de charge linéaire sous la forme générale :

$$\Delta H = RQ^n$$

Selon la formule de Hazen Williams l'expression de la perte de charge linéaire dans une conduite de diamètre D est:

$$J = \frac{L^{1,85}}{0,2785C_{HW} D^{2,63}} Q^{1,85}$$

$$n = 1.85 \quad R = \frac{L}{(0.2785C_{HW})^{1,85} D^{4,87}}$$

2.4. Notion de conduite équivalente

2.4.1 Conduite équivalente d'un assemblage de conduites en série



- Dans un ensemble de i conduites montées en série, le débit est le même

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = \dots = Q_j$$

- La perte de charge totale est égale à la somme des pertes de charge dans chaque tronçon

$$\Delta H_T = \Delta H_{1-j} = \Delta H_1 + \Delta H_2 + \dots + \Delta H_j$$

Si on admet que la perte de charge dans chaque tronçon peut se mettre sous la forme générale

$$\Delta H_i = \mathfrak{R}_i Q^2$$

On obtient:

$$\Delta H_T = \mathfrak{R}_{eq} Q^n = (\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3 + \dots + \mathfrak{R}_j) Q^n$$

$$\mathfrak{R}_{eq} = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_3 + \dots + \mathfrak{R}_j$$

2.4.2 Conduite équivalente d'un assemblage de conduites en parallèle

- Dans un ensemble de j conduites montées en série, le débit total est la somme des débits dans chaque tronçon

$$Q_T = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_j$$

- La perte de charge totale est la même pour toutes les branches

$$\Delta H = \Delta H_1 = \Delta H_2 = \Delta H_3 = \dots = \Delta H_j$$

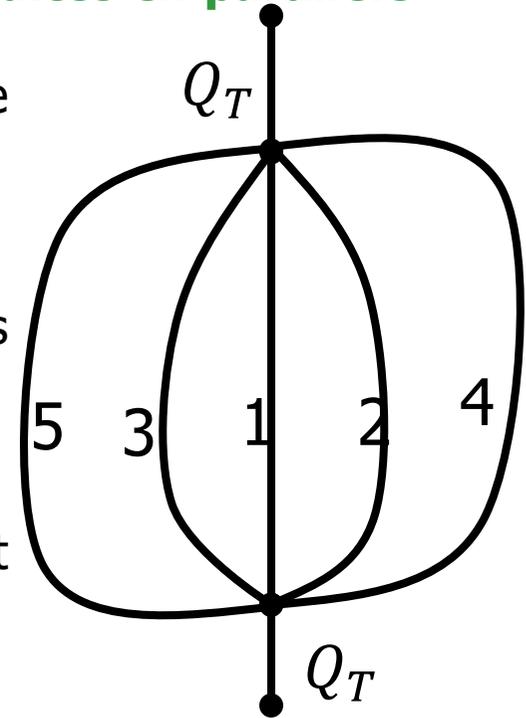
La relation de la perte de charge en fonction du débit permet d'écrire pour chaque tronçon :

$$\Delta H = \mathfrak{R}_i Q^2 \quad \longrightarrow \quad Q = K_i \Delta H^{1/2}$$

On obtient:

$$\Delta Q_T = K_{eq} \Delta H^{1/2} = (K_1 + K_2 + K_3 + \dots + K_j) \Delta H^{1/2}$$

$$K_{eq} = K_1 + K_2 + K_3 + \dots + K_j$$



2.5. Calcul de conduites simples

Une conduite de diamètre et de rugosité constante véhiculant un même débit sur toute sa longueur est appelée conduite simple.

Pour le calcul hydraulique d'un conduit nous disposons de deux équations:

A. L'équation de Bernoulli :

$$\frac{P_1}{\rho g} + z_1 + \alpha_1 \frac{U_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + z_2 + \alpha_2 \frac{U_2^2}{2g} + \Delta H_{12}$$

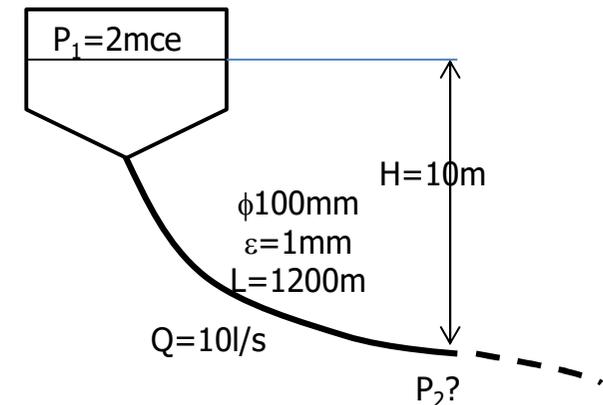
B. L'équation de continuité: $Q = Cst$

Les Trois Problèmes les plus courants sont

1) Pour une conduite donnée ou D , ε , L et Q donnés; Trouver la différence de cotes de ligne piézométrique:

$$\left(\frac{P_1}{\rho g} + z_1 \right) - \left(\frac{P_2}{\rho g} + z_2 \right) = \left(\frac{\lambda \cdot L}{D} + \sum_i \xi_i \right) \frac{V^2}{2g}$$

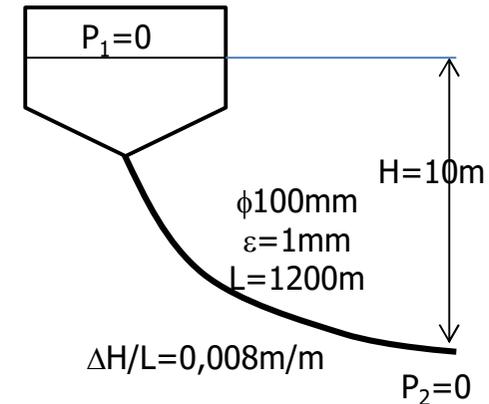
D'où on peut trouver une pression P , exp: P_2 pour P_1 , z_1 et z_2 donnés



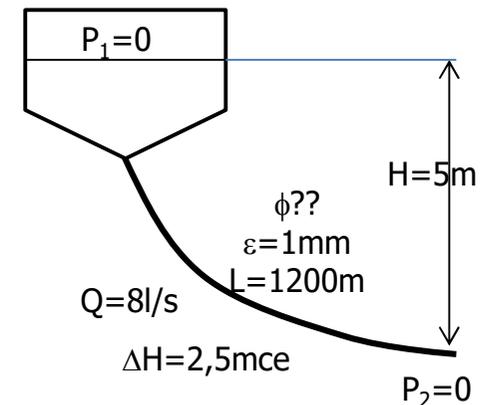
2) Pour une conduite donnée D , ε , L et une énergie disponible connue (P_1 , z_1 , z_2 et P_2 trouver le débit

$$Q: V^2 = 2g \frac{\left(\frac{P_1}{\rho g} + z_1\right) - \left(\frac{P_2}{\rho g} + z_2\right)}{\left(\frac{\lambda \cdot L}{D} + \sum_i \xi_i\right)} \quad \text{avec } Q = V \cdot S$$

Dans ce problème λ est en fonction de V inconnue, à priori le calcul se fait par approximation successives; On part d'une valeur arbitraire de λ_0 qui nous permettra de calculer V_0 On calcule en suite λ_1 avec V_0 , puis avec λ_1 On trouve $V_1, \dots, \lambda_{i-1} \rightarrow V_{i-1}, \lambda_i \rightarrow V_i$ On poursuit les approximations jusqu'à ce que $V_{i-1} \approx V_i$, Pratiquement il suffit de 3 approximations



3) Pour un débit Q et un énergie donnée, on doit choisir le diamètre de la conduite de fabrication courante (ϕ normalisé); Le problème se ramené à une série de de problèmes de type 1 et 2 pour des diamètre « D » différents. Il faut choisir les deux ϕ voisins qui donne respectivement des pertes de charge supérieures et inférieures aux pertes disponibles. Le plus grand de ces deux diamètres sera retenu.



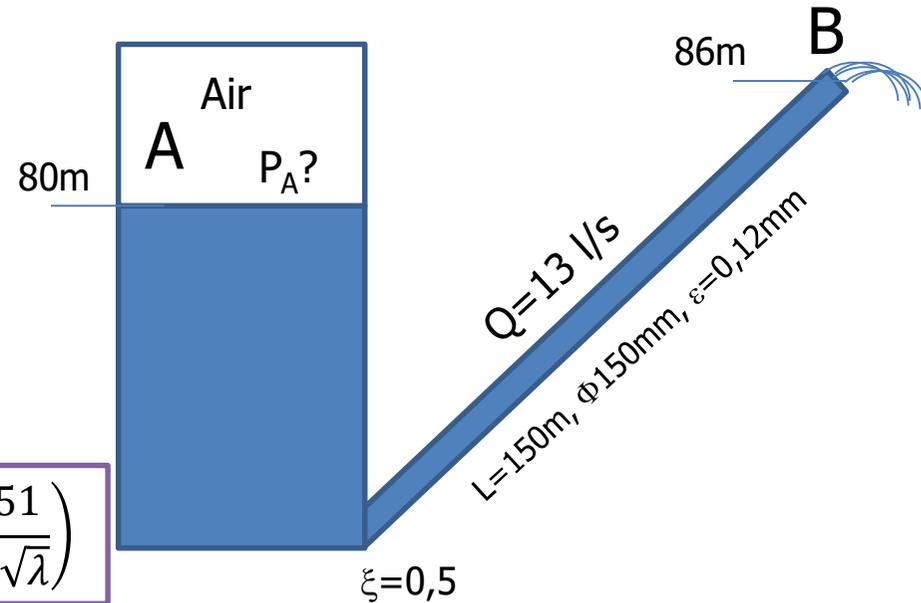
Le série des diamètres normalisée est: 25, 40, 50, 60, 70, 80, 100, (100+n*25), ..., (250+n*50), ..., (500+n*100), ..., (1000+n*200), ..., (2000+n*500)

Exercices

Pour le système hydraulique en face déterminer la pression l'air P_A ,

On donne: $\rho = 0,84 \frac{kg}{m^3}$,

$\nu = 2,1 \cdot 10^{-6} m^2/s$



$$Re = \rho \frac{VD}{\mu} = \frac{VD}{\nu}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{\epsilon}{3,7D} + \frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} \right)$$

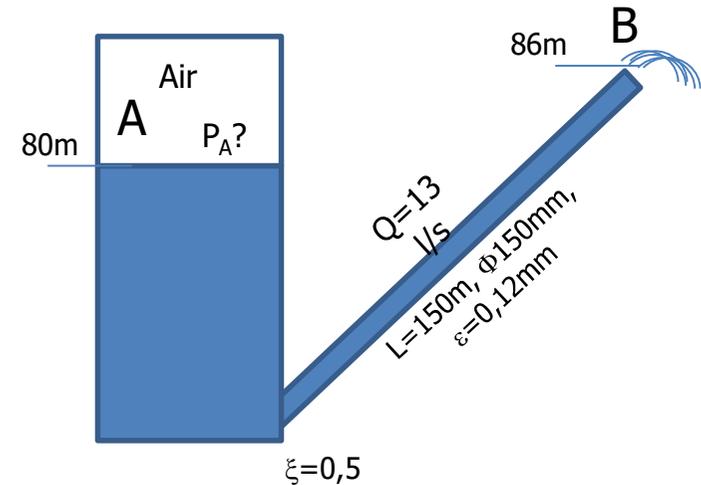
$$\frac{P_A}{\rho g} + z_A + \cancel{\frac{V_A^2}{2g}} = \cancel{\frac{P_B}{\rho g}} + z_B + \frac{V_B^2}{2g} + \Delta H_{AB}$$

$P_A ???$ et $P_B = P_{atm}$ $V_A = 0$ (reservoir à grandes dimensions)

$$V_B = V = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 13 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 0,15^2} = 0,736 m/s$$

$$\frac{P_A}{\rho g} + z_A = z_B + \frac{V^2}{2g} + \Delta H_{AB}$$

$$\Delta H_{AB} = \left(\frac{\lambda \cdot L}{D} + \xi \right) \frac{V^2}{2g}$$



$$R_e = \frac{VD}{\nu} = \frac{0,736 \cdot 0,15}{2,1 \cdot 10^{-6}} = 52571,43 > 2000 \rightarrow \text{Régime turbulent}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{\epsilon}{3,7D} + \frac{2,51}{R_e \sqrt{\lambda}} \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{0,12}{3,7 \cdot 150} + \frac{2,51}{52571,43 \sqrt{0,02}} \right)$$

$$\rightarrow \lambda_0 = 0,02 \rightarrow \lambda_1 = 0,0235 \rightarrow \lambda_2 = 0,0235$$

$$\lambda_2 = \mathbf{0,0235}$$

$$\Delta H_{AB} = \left(\frac{0,0235 \cdot 150}{0,15} + 0,5 \right) \frac{0,736^2}{2 \cdot 9,81} =$$

$$\frac{P_A}{\rho g} = z_B - z_A + \frac{V^2}{2g} + \Delta H_{AB}$$

$$P_A = 26,35 \text{ Kpa}$$

Exercice 2 :

Soit une conduite de 200mm de diamètre, de rugosité absolue $\varepsilon=0.12\text{mm}$ et de 1000m de longueur, reliant un réservoir de grandes dimensions (I) et une fontaine publique, équipé d'une vanne à une distance de 500m du réservoir I et d'un robinet de fontaine (figure ci-après)

1. Déterminer le débit de cette conduite.
2. Tracer la ligne de charge et la ligne piézométrique
3. Déterminer la hauteur h (hauteur entre la surface libre de l'eau dans le réservoir I et le niveau d'eau dans le piézomètre situé juste avant la vanne)

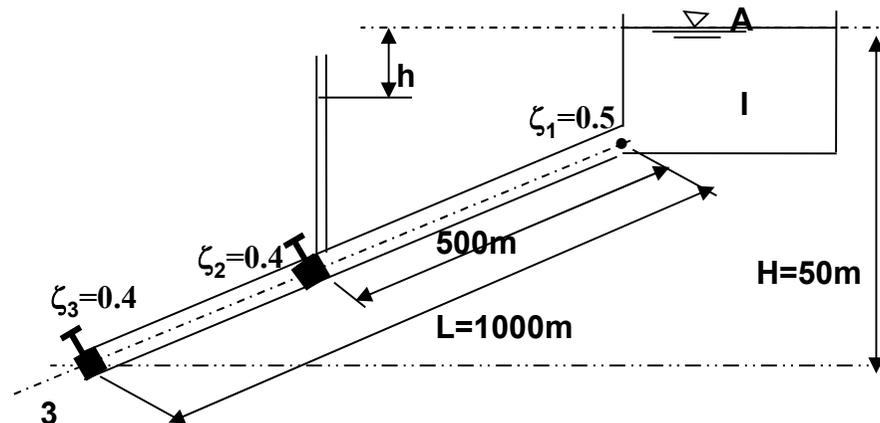
Formule de COLEBROOK:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \text{Log} \left(\frac{2.51}{Re \cdot \sqrt{\lambda}} + \frac{\varepsilon}{3.7 \cdot D} \right)$$

$$\frac{P_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g} + z_A = z_3 + \frac{V_3^2}{2g} + \Delta H_{A3}$$

$$P_A = P_{atm} = 0$$

$$V_A \approx 0 \text{ reservoir à grandes dimensions}$$



$$z_A = z_3 + \frac{V_3^2}{2g} + \Delta H_{A3}$$

$$\Delta H_{A3} = \left(\frac{\lambda \cdot L}{D} + \sum \xi \right) \frac{V^2}{2g}$$

$$\Delta H_{A3} = \left(\frac{\lambda \cdot L}{D} + 0,5 + 0,4 + 0,4 \right) \frac{V^2}{2g}$$

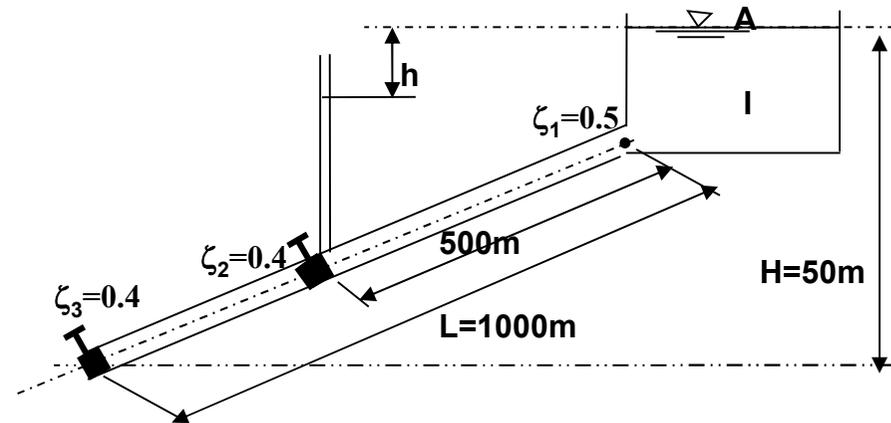
$$\Delta H_{A3} = (5000 \cdot \lambda + 1,3) \frac{V^2}{2g}$$

$$z_A - z_3 = \frac{V^2}{2g} + (5000 \cdot \lambda + 1,3) \frac{V^2}{2g} = (5000 \cdot \lambda + 2,3) \frac{V^2}{2g}$$

$$(5000 \cdot \lambda + 2,3) \frac{V^2}{2 \cdot 9,81} = 50 \Rightarrow V^2 = 5,1 \cdot \lambda + 0,002$$

$$\lambda_0 = 0,02 \rightarrow V_0 = 0,322 \text{ m/s} \quad \frac{\varepsilon}{D} = 0,006 \quad \rightarrow \lambda_1 = 0,022 \rightarrow V_1 = 0,338 \text{ m/s}$$

$$Re = \frac{0,322 \cdot 0,2}{10^{-6}} = 64400$$



$$\Delta H_{A3} = \left(\frac{\lambda \cdot 1000}{0,2} + 1,3 \right) \frac{V^2}{2g}$$

Formule de COLEBROOK:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \text{Log} \left(\frac{2.51}{Re \cdot \sqrt{\lambda}} + \frac{\varepsilon}{3.7 \cdot D} \right)$$

$$\rightarrow \lambda_1 = 0,022 \rightarrow V_1 = 0,338 \text{ m/s} \quad \frac{\varepsilon}{D} = 0,006 \quad \lambda_2 = 0,022 \rightarrow V_2 = 0,338 \text{ m/s}$$

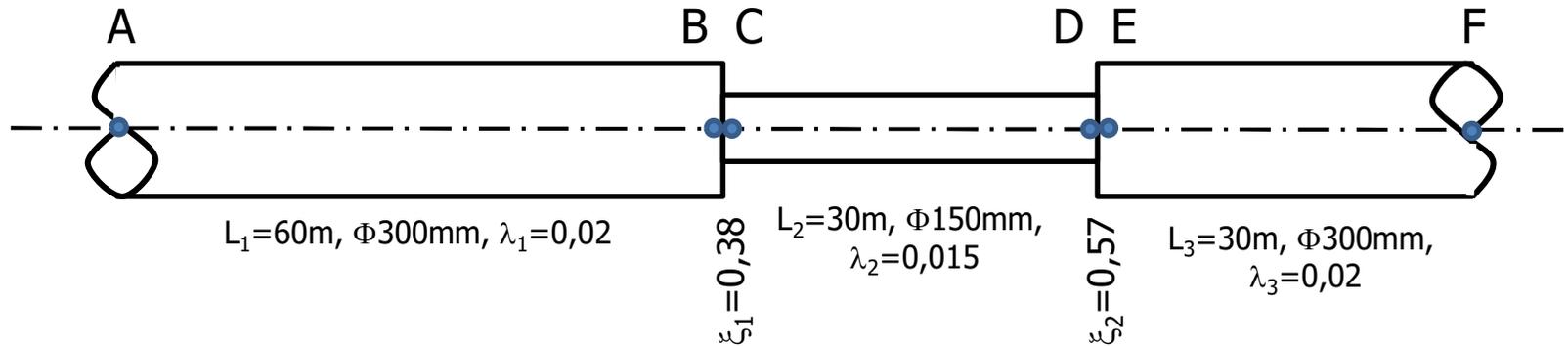
$$R_e = \frac{0,338 \cdot 0,2}{10^{-6}} = 67600$$

$V_1 = V_2$ On arrête les itérations et $V = 0,338 \text{ m/s}$

$$Q = V \cdot S = V \cdot \frac{\pi D^2}{4} = 0,338 \cdot \frac{3,14 \cdot 0,2^2}{4} = 0,0106 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 10,6 \text{ l/s}$$

Soit un système de conduites en série, transportant de l'eau . Si $P_A = 60\text{mce}$ et $V_A = 2,41\text{m/s}$.

Tracer la ligne de charge et la piézométrie de ce système



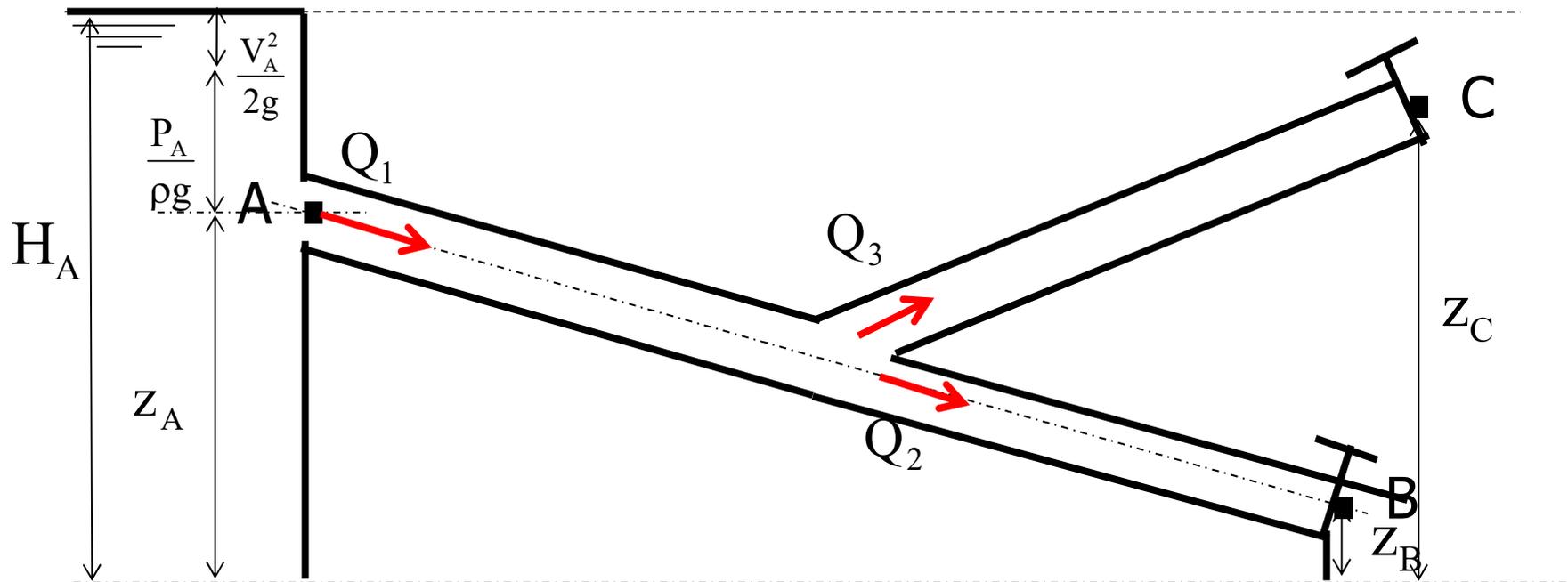
	ΔH	
A-B		
B-C		
C-D		
D-E		
E-F		

	Pression $\frac{P}{\rho g}$	Cote piezo $\frac{P}{\rho g} + z$	$\frac{V^2}{2g}$	Chrgé hyd $\frac{P}{\rho g} + z + \frac{V^2}{2g}$
A				
B				
C				
D				
E				
F				

2.6. Principes de calcul des systèmes hydrauliques

2.6.1 Exemples d'écoulements

Nous avons considéré des écoulements dans des branches qui assurent la continuité du débit. Dans les systèmes hydrauliques les branches s'organisent en réseau. Examinons l'exemple suivant:



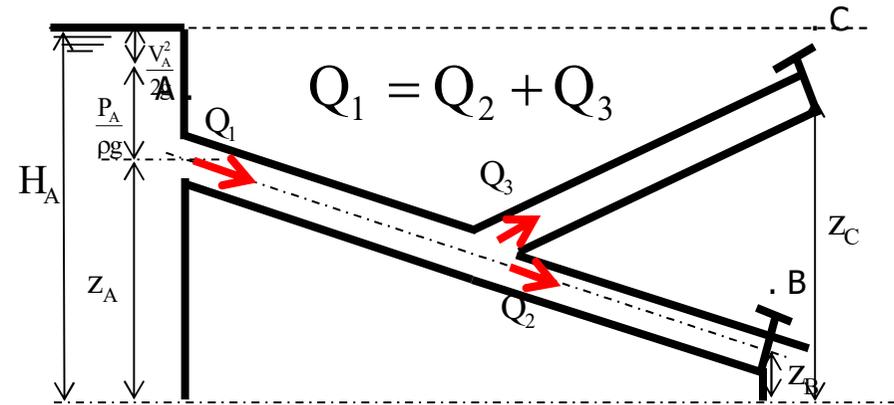
2. Les écoulements en charge

2.6. Principes de calcul des systèmes hydrauliques

1^{ère} Exemples d'écoulements

$$H_A = Z_B + \frac{p_B}{\rho g} + \frac{V_B^2}{2g} + \Delta H_{A-B}$$

$$H_A = Z_C + \frac{p_C}{\rho g} + \frac{V_C^2}{2g} + \Delta H_{A-C}$$

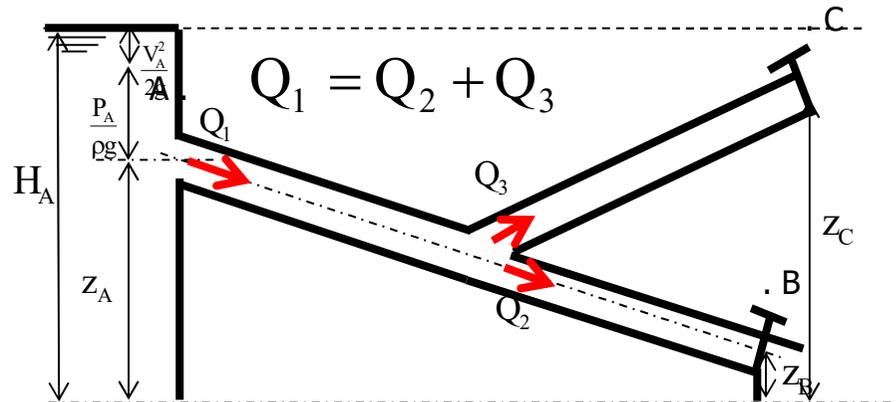


$$\Delta H_{A-B} = \mathfrak{R}_1 Q_1^2 + \mathfrak{R}_2 Q_2^2$$

$$\Delta H_{A-C} = \mathfrak{R}_1 Q_1^2 + \mathfrak{R}_3 Q_3^2$$

$$\mathfrak{R}_i = \frac{8}{\pi^2 g} \left[\lambda_i \frac{L_i}{D_i^5} + \sum_j \frac{\xi_{i,j}}{D_i^4} \right] \left\{ \begin{array}{l} Q_1 = Q_2 + Q_3 \\ H_A - Z_B = \mathfrak{R}_1 Q_1^2 + \left(\mathfrak{R}_2 + \frac{8}{\pi^2 g D_2^4} \right) Q_2^2 \\ H_A - Z_C = \mathfrak{R}_1 Q_1^2 + \left(\mathfrak{R}_3 + \frac{8}{\pi^2 g D_3^4} \right) Q_3^2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_1 = Q_2 + Q_3 \\ H_A - Z_B = \mathfrak{R}_1 Q_1^2 + \left(\mathfrak{R}_2 + \frac{8}{\pi^2 g D_2^4} \right) Q_2^2 \\ H_A - Z_C = \mathfrak{R}_1 Q_1^2 + \left(\mathfrak{R}_3 + \frac{8}{\pi^2 g D_3^4} \right) Q_3^2 \end{array} \right.$$



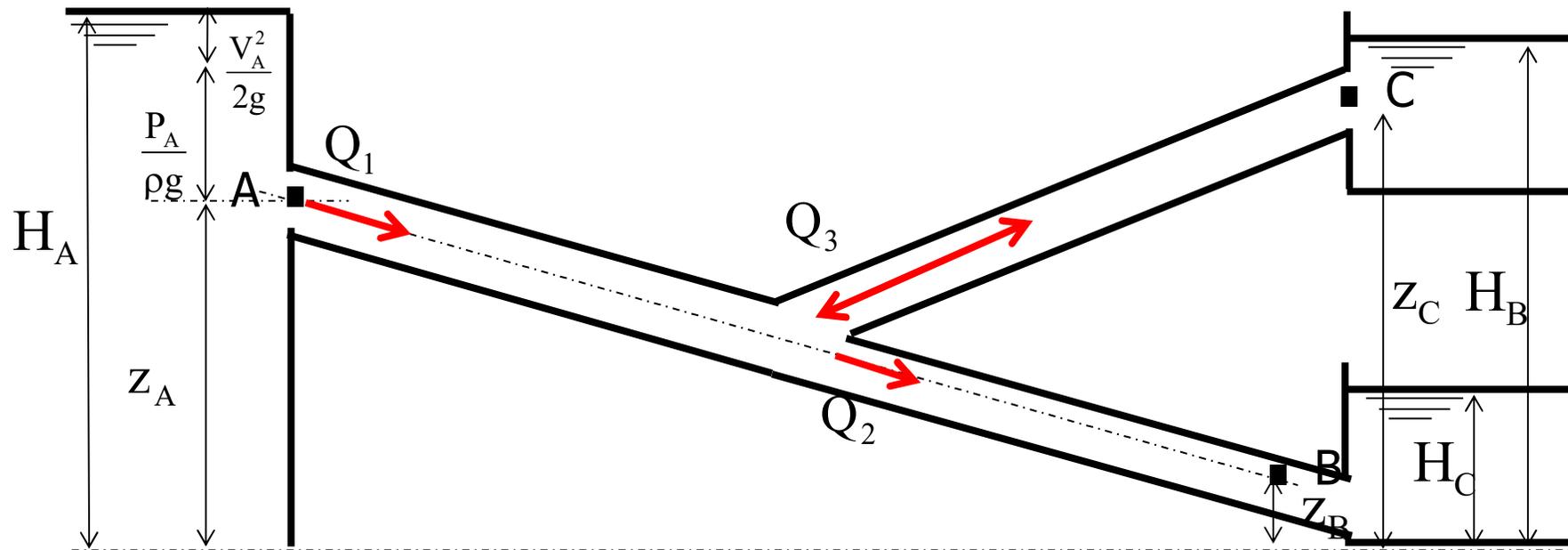
C'est un système d'équations non-linéaires. On peut le résoudre en le linéarisant et en procédant à un calcul itératif. On peut poser à cet effet poser:

$$\mathfrak{R}_i Q_i^2 = \mathfrak{R}_i |Q_{0i}| Q_i$$

- définir des valeurs initiales de Q_{0i}
- Ecrire le système linéarisé
- Le résoudre pour tirer les valeurs Q_i
- Réinitialiser le système et reprendre jusqu'à convergence de la solution

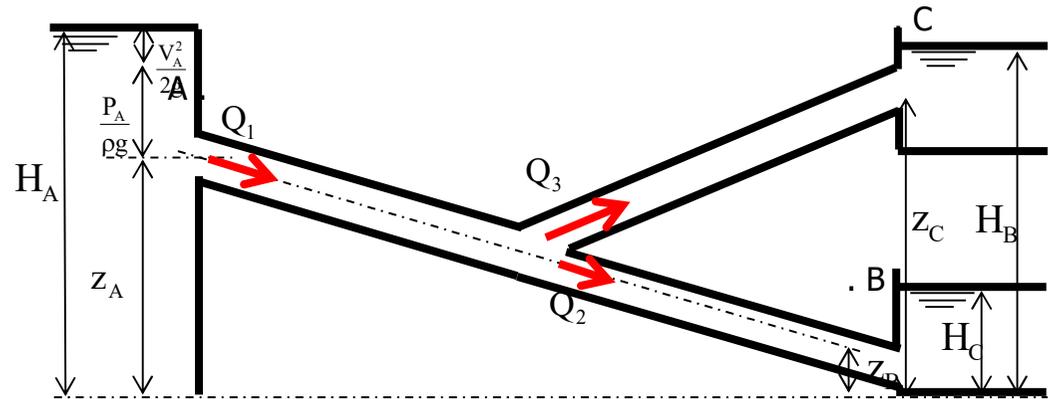
2^{ème} Exemple d'écoulements

Le problème se complique un peu dans la charge dans chacun des réservoirs l'écoulement peut se faire selon une direction ou une autre:

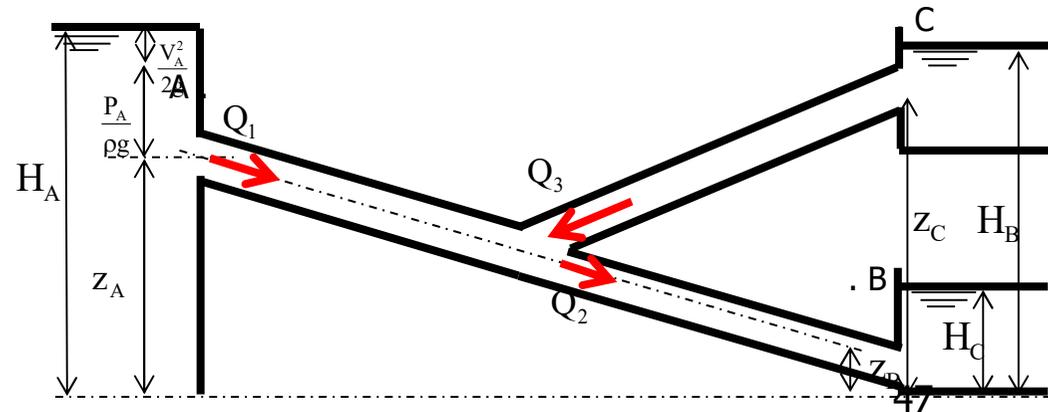


Considérons trois réservoirs reliés par des conduites. Selon la charge dans chacun des réservoirs l'écoulement peut se faire selon une direction ou une autre:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_1 = Q_2 + Q_3 \\ H_A - H_B = \mathfrak{R}_1 Q_1^2 + \mathfrak{R}_2 Q_2^2 \\ H_A - H_C = \mathfrak{R}_1 Q_1^2 + \mathfrak{R}_3 Q_3^2 \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} Q_2 = Q_1 + Q_3 \\ H_A - H_B = \mathfrak{R}_1 Q_1^2 + \mathfrak{R}_2 Q_2^2 \\ H_B - H_C = \mathfrak{R}_3 Q_3^2 + \mathfrak{R}_2 Q_2^2 \end{array} \right.$$



2.6. Principes de calcul des systèmes hydrauliques

2.6.2 Formulation générale

La loi des nœuds:

On appelle nœud toute jonction entre les tronçons d'un réseau hydraulique. La loi des nœuds exprime qu'à chaque jonction les débits entrants sont égaux aux débits sortants:

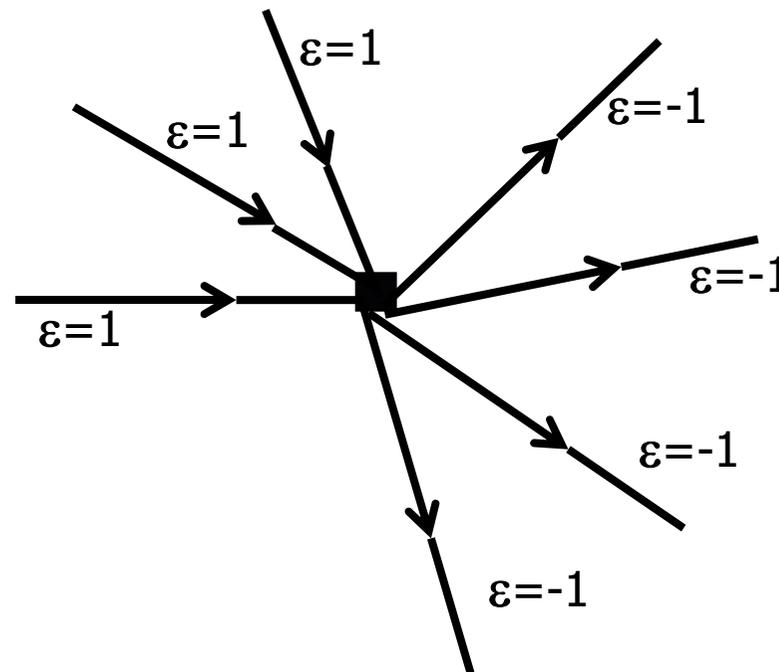
$$\sum_{i=1,N} \varepsilon_i Q_i = 0$$

ε_i est une convention de signe

Par exemple:

$\varepsilon_i = 1$ pour le débits entrants

$\varepsilon_i = -1$ pour le débits sortants



2.6. Principes de calcul des systèmes hydrauliques

2.6.2 Formulation générale

La loi des mailles:

Un réseau est composé de tronçons qui relient des nœuds. Lorsque ces tronçons forment des boucles fermées, on appelle ces boucles des mailles. Elle exprime la conservation de l'énergie. Elle stipule qu'en régime permanent, la somme algébrique (positif dans le sens du débit et négatif et négatif en sens inverse) des pertes de charge le long de tous les tronçons d'une maille est nulle.

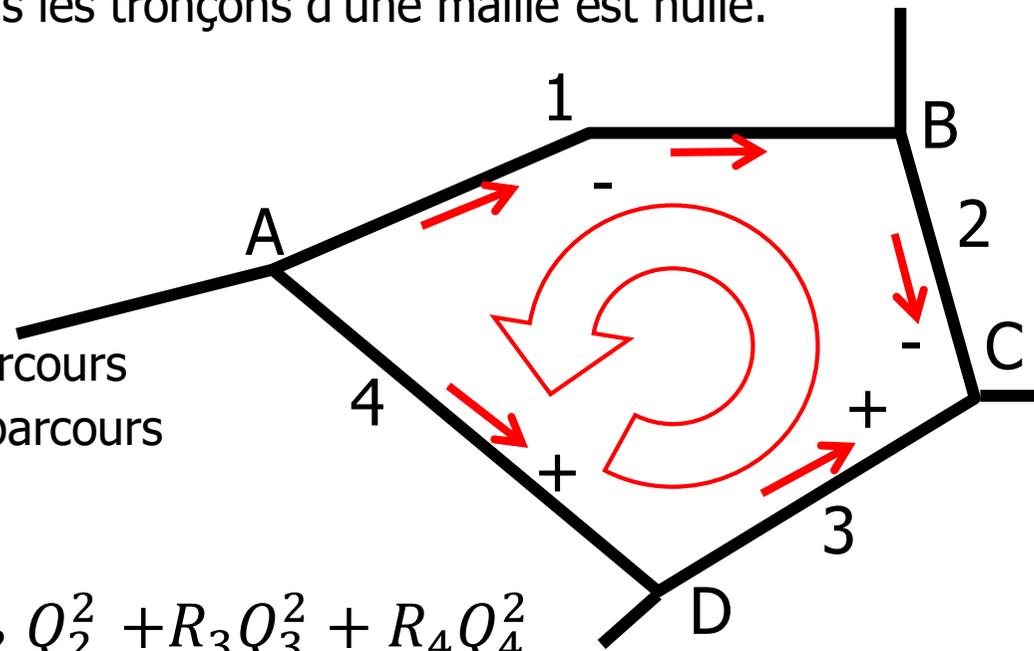
$$\sum_{i=1,N} \varepsilon_i \Delta H_i = 0$$

ε_i est une convention de signe

Par exemple:

$\varepsilon_i = 1$ dans le sens positif du parcours

$\varepsilon_i = -1$ dans le sens négatif du parcours



$$\sum_{i=1,N} \varepsilon_i \Delta H_i = -R_1 Q_1^2 - R_2 Q_2^2 + R_3 Q_3^2 + R_4 Q_4^2$$

2.6. Principes de calcul des systèmes hydrauliques

2.6.2 Formulation générale

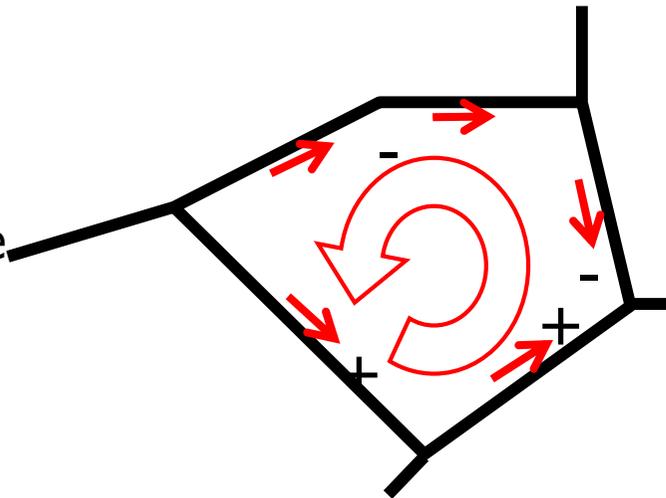
La loi des mailles:

On remplace les pertes de charge dans l'équation de mailles par une fonction du débit pour les conduites.

$$\Delta H_i = R_i Q_i^2$$

On applique une méthode de résolution itérative

$$\sum_{i=1,N} \varepsilon_i \Delta H_i = \sum_{i=1,N} \varepsilon_i R_i Q_i^2 = 0$$



2.6. Principes de calcul des systèmes hydrauliques

2.6.2 Formulation générale

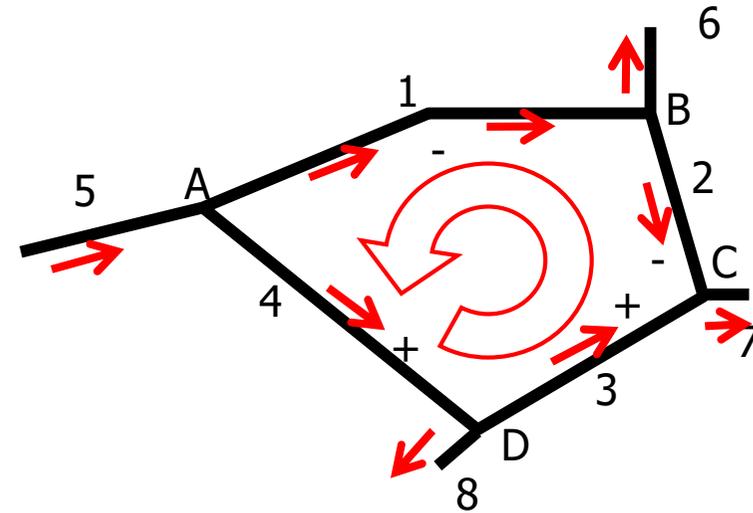
La loi des nœuds

$$Q_5 = A_1 \quad Q_5 - Q_1 - Q_4 = 0$$

$$Q_6 = P_1 \quad Q_1 - Q_2 - Q_6 = 0$$

$$Q_7 = P_2 \quad Q_2 + Q_3 - Q_7 = 0$$

$$Q_4 - Q_3 - Q_8 = 0$$



La loi des mailles:

$$-\Delta H_1 + \Delta H_4 + \Delta H_3 - \Delta H_2 = 0$$

$$-R_1 Q_1^2 - R_2 Q_2^2 + R_3 Q_3^2 + R_4 Q_4^2 = 0$$

8 inconnues
5 équations

Linéarisation

$$R_i Q_i^2 = R_i |Q_{0i}| Q_i$$

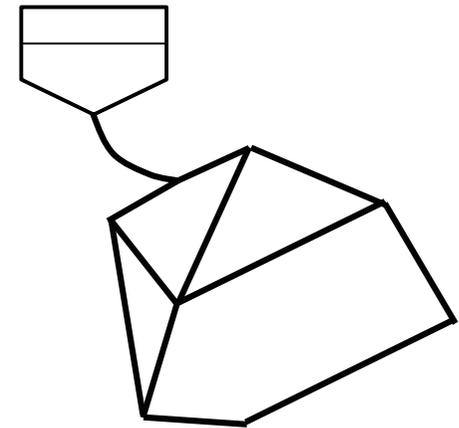
Systeme de Canalisations complexe (Réseau hydraulique)

Dans la pratique, de nombreux systèmes hydraulique (réseau hydraulique) sont constitués de nombreux tuyaux connectés de manière complexe avec de nombreux points d'entrée et de sorties faisant un ensemble complexe de canalisations en série et en parallèle. On distingue:

Réseau maillé

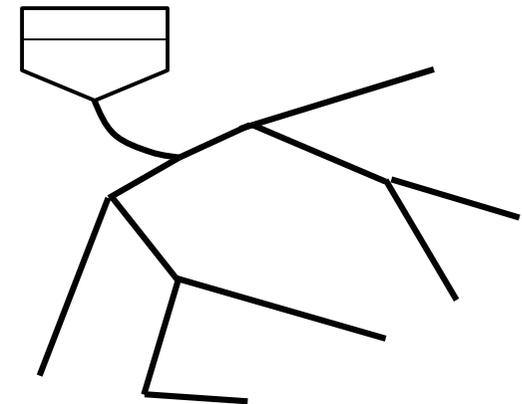
Un réseau est maillé lorsque les éléments de canalisation forment un ensemble de bouclages refermés sur eux-mêmes. Il est en fait un ensemble complexe de canalisations en série et en parallèle. Cette structure offre l'avantage d'équilibrer les débits et d'assurer l'adduction de l'eau dans tout le réseau en cas de désordre localisé.

Dans un réseau maillé, le sens de la circulation de l'eau dans les canalisations ne peut être déterminé avec exactitude du premier coup. L'analyse des réseaux de canalisations peut être extrêmement complexe mais des solutions peuvent être obtenues en utilisant la méthode Hardy Cross.



Réseau ramifié (Tuyaux de branchement):

Le réseau ramifié consiste en un ou plusieurs tuyaux qui se séparent en deux ou en plusieurs tuyaux (ou se combinent en un seul) et ne se rejoignent pas en aval. L'eau circule dans les tronçons dans un seul sens: des conduites principales vers les conduites secondaires. en cas de rupture d'une conduite principale toutes les conduites aval ne seront pas alimentées



2.6. Principes de calcul des Réseaux ramifié

Calcul des réseaux ramifiés:

Le calcul du réseau ramifié se fait en partant de l'extrémité aval du réseau et en remontant de proche en proche jusqu'au réservoir en se basant du la loi des nœud et l'équation de Bernoulli

2.6. Principes de calcul des Réseaux maillés

2.6.3 La méthode de corrections successives de Hardy-Cross (1936)

La loi des mailles:

1. On adopte un choix de répartition des débits en respectant dans chaque nœud la loi des nœuds : $\sum_{i=1,N} \varepsilon_i \cdot Q_i = 0$

2. De chaque tronçon (branche) de la maille, on calcul la perte de charge $\Delta H_i = R_i Q_i^2$

3. Pour chaque maille on fait la $\sum_{i=1,N} \varepsilon_i \cdot \Delta H_i = \sum_{i=1,N} \varepsilon_i \cdot R_i \cdot Q_i^2$ en tenant compte des signes (somme algébrique) et calcul la somme ($2 \cdot \sum_{i=1,N} |R_i \cdot Q_i|$) sans tenir compte des signe

4. Pour chaque maille si $\sum_{i=1,N} \varepsilon_i \cdot \Delta H_i \neq 0$, on procède à des corrections successives du débit de sorte que la loi des mailles soit respectée

$$\Delta Q = \frac{-\sum_{i=1,n} J_i}{2 \sum_{i=1,n} \left| \frac{J_i}{Q_i} \right|} = \frac{-\sum_{i=1,N} \varepsilon_i \cdot R_i \cdot Q_i^2}{2 \sum_{i=1,N} |R_i \cdot Q_i|}$$

NB: *Dans le cas des deux mailles adjacentes, la conduite commune sera affectée par les deux corrections des débits calculés pour les deux mailles affectées par leurs signes respectives*

5. On recommence le calcul avec les nouveau débit jusqu'à l'obtention de précision désirée $\Delta Q = \epsilon$ proche de 0

Exemple

Soit le réseau de la figure en face:

On donne :

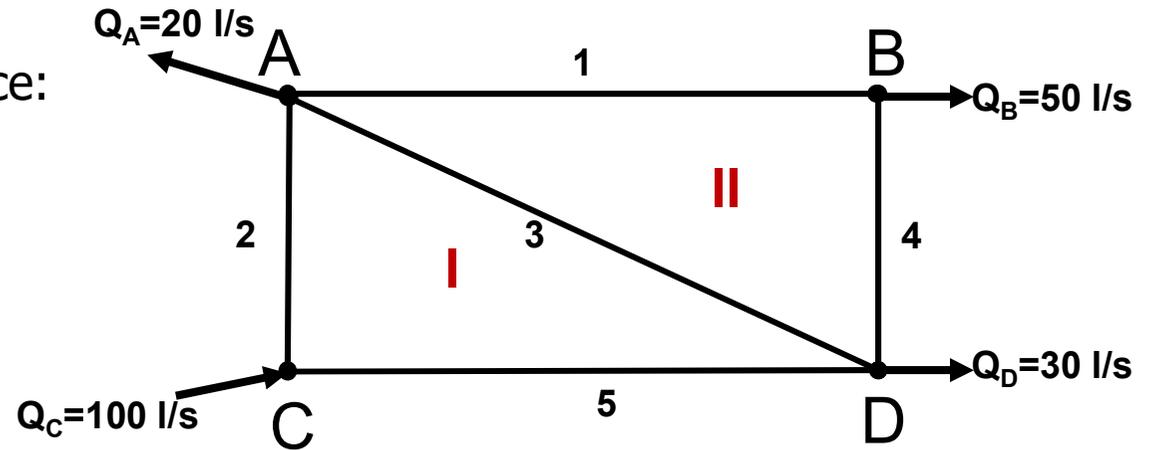
$$H_C = 30m,$$

$$R_1 = 5 \text{ mm} \cdot \text{s}^2 / \text{l}^2$$

$$R_2 = 2 \text{ mm} \cdot \text{s}^2 / \text{l}^2,$$

$$R_3 = R_4 = 1 \text{ mm} \cdot \text{s}^2 / \text{l}^2,$$

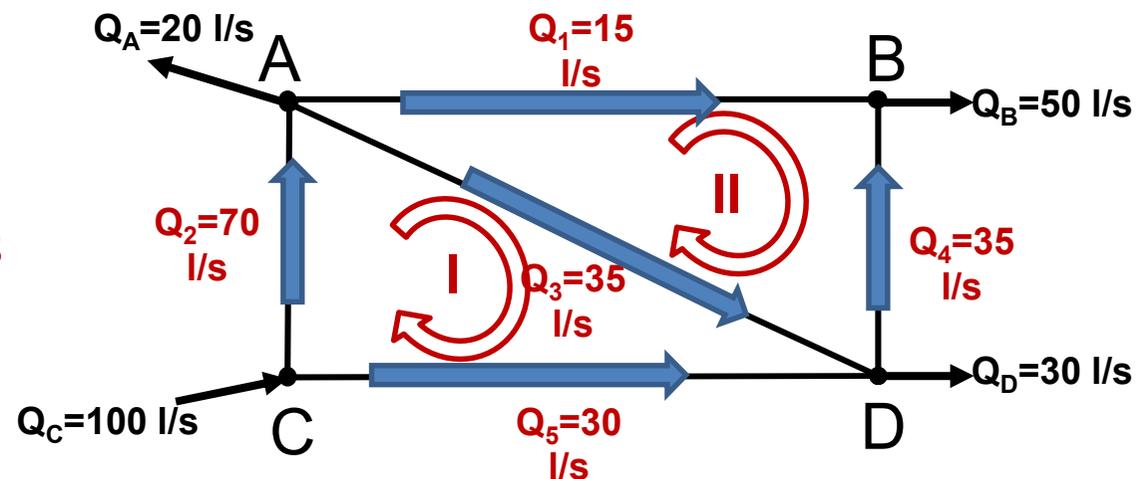
$$R_5 = 4 \text{ mm} \cdot \text{s}^2 / \text{l}^2$$

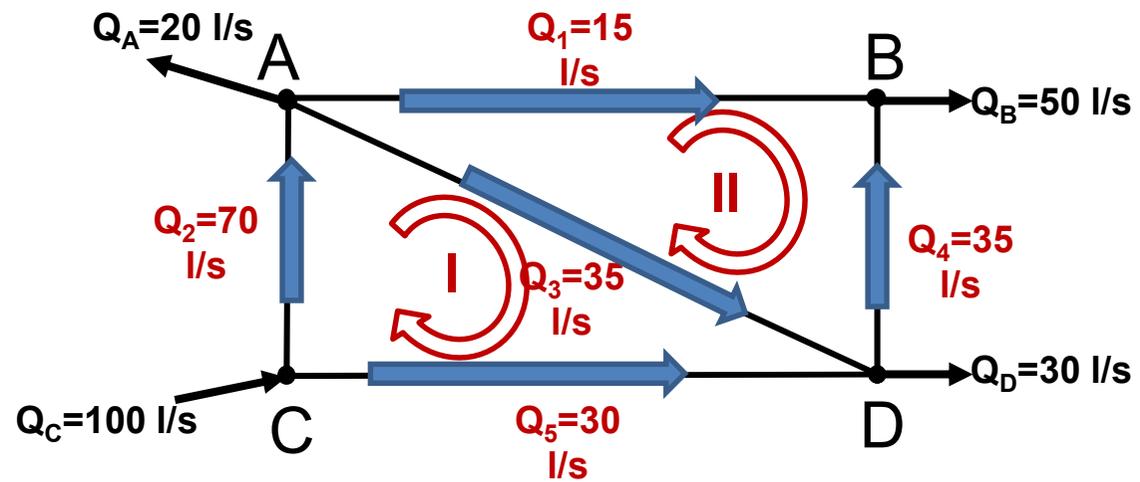


Déterminer les débits Q_i de chaque tronçon et les charge au nœuds

Solution

1. On effectue une première répartition des débits en respectant la loi des nœuds





		Maille 1				Maille 2					
		N° TR	R	Q	$\varepsilon \cdot R \cdot Q^2$	$2 \cdot R Q $	N° TR	R	Q	$\varepsilon \cdot R \cdot Q^2$	$2 \cdot R Q $
1 ^{ère} itération		2	2	70	0	0	1	5		0	0
		3*	1	35			4	1			
		5	4	-30			3*	1			
				Σ					Σ		
			ΔQ_I	#DIV/0!					ΔQ_{II}	#DIV/0!	

	Maille 1					Maille 2				
	N° TR	R	Q	$\varepsilon \cdot R \cdot Q^2$	$2 \cdot R \cdot Q $	N° TR	R	Q	$\varepsilon \cdot R \cdot Q^2$	$2 \cdot R \cdot Q $
1 ^{ère} itération	2	2	70	9800	280	1	5	15	1125	150
	3*	1	35	1225	70	4	1	-35	-1225	70
	5	4	-30	-3600	240	3*	1	-35	-1225	70
			Σ	7425	590			Σ	-1325	290
		ΔQI	-12,58				ΔQII	4,57		
2 ^{ème} itération	2	2	57,42	6593,02	229,66	1	5	19,57	1914,72	195,69
	3*	1	17,85	318,49	35,69	4	1	-30,43	-926,05	60,86
	5	4	-42,58	-7253,84	340,68	3*	1	-17,85	-318,49	35,69
			Σ	-342,33	606,03			Σ	670,18	292,24
		ΔQI	0,56				ΔQII	-2,29		
3 ^{ème} itération	2	2	57,98	6723,39	231,92	1	5	17,28	1492,25	172,76
	3*	1	20,70	428,67	41,41	4	1	-32,72	-1070,88	65,45
	5	4	-42,02	-7062,68	336,16	3*	1	-20,70	-428,67	41,41
			Σ	89,38	609,49			Σ	-7,29	279,61
		ΔQI	-0,15				ΔQII	0,03		
4 ^{ème} itération	2	2	57,83	6689,42	231,33	1	5	17,30	1496,77	173,02
	3*	1	20,53	421,55	41,06	4	1	-32,70	-1069,17	65,40
	5	4	-42,17	-7112,06	337,33	3*	1	-20,53	-421,55	41,06
			Σ	-1,09	609,73			Σ	6,05	279,48
		ΔQI	0,00				ΔQII	-0,02		

Charge aux nœuds

$$H_C = 30m$$

$$H_C = H_A + \Delta H_{AC}$$

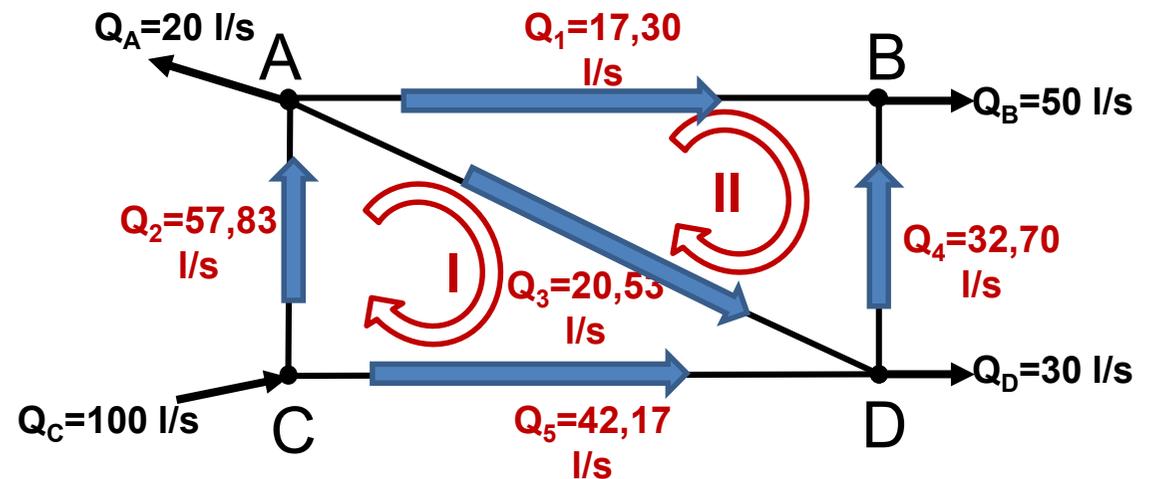
$$H_A = H_C - R_2 Q_2^2$$

$$H_A = 30 - 6,69 = 23,31m$$

$$H_B = H_A - R_1 Q_1^2 = 23,31 - 1,5 = 21,81m$$

$$H_D = H_C - R_5 Q_5^2 = 30 - 7,11 = 22,89m$$

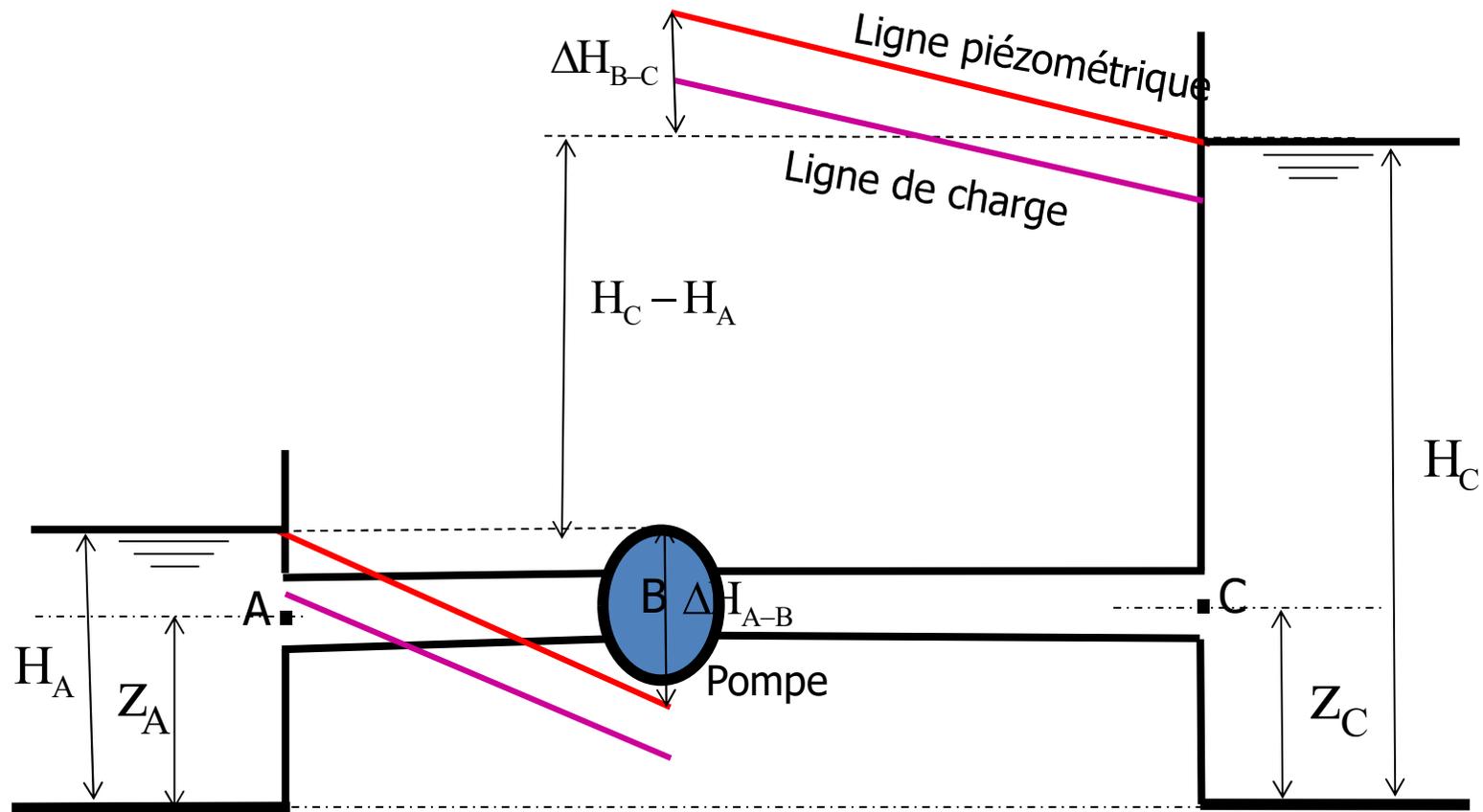
$$H_D = H_A - R_3 Q_3^2 = 23,31 - 0,42 = 22,89m$$



H_A	23,31m
H_B	21,81m
H_C	30m
H_D	22,89m

2.7 Systèmes hydrauliques avec pompage

2.7.1 Conduites et pompe entre deux réservoirs



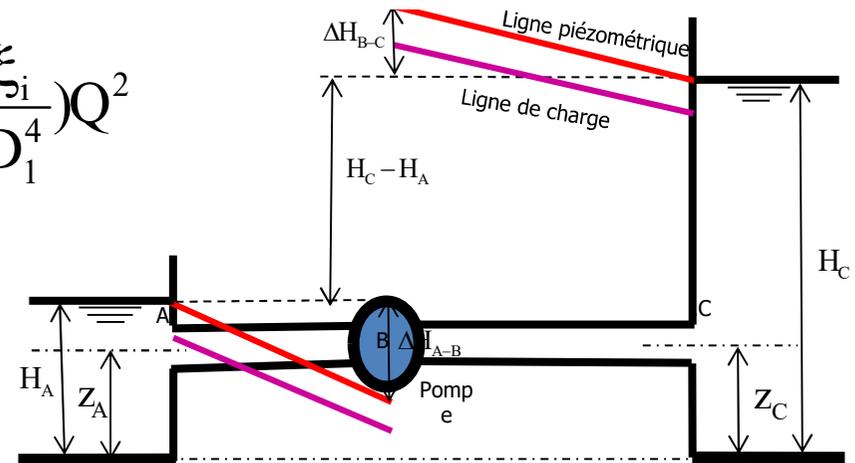
2. Les écoulements en charge

2.7 Systèmes hydrauliques avec pompage

2.7.1 Conduites et pompe entre deux réservoirs

$$\Delta H_{A-B} = H_A - H_{Ba} = \frac{8}{\pi^2 g} \left(\lambda_1 \frac{L_1}{D_1^5} + \sum_i \frac{\xi_i}{D_1^4} \right) Q^2$$

$$\begin{aligned} \Delta H_{B-C} &= H_{Br} - H_C \\ &= \frac{8}{\pi^2 g} \left(\lambda_2 \frac{L_2}{D_2^5} + \sum_i \frac{\xi_i}{D_2^4} \right) Q^2 \end{aligned}$$



$$H_{Br} - H_{Ba} = (H_C - H_A) + \frac{8}{\pi^2 g} \left[\lambda_1 \frac{L_1}{D_1^5} + \sum_i \frac{\xi_i}{D_1^4} + \lambda_2 \frac{L_2}{D_2^5} + \sum_i \frac{\xi_i}{D_2^4} \right] Q^2$$

La pompe apporte un supplément de charge $\Delta H_P = H_{Br} - H_{Ba}$ qui représente un apport d'énergie par unité de poids de liquide pompé

2.7 Systèmes hydrauliques avec pompage

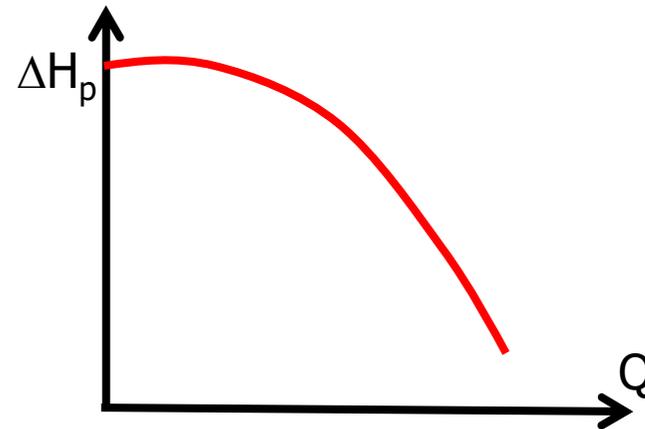
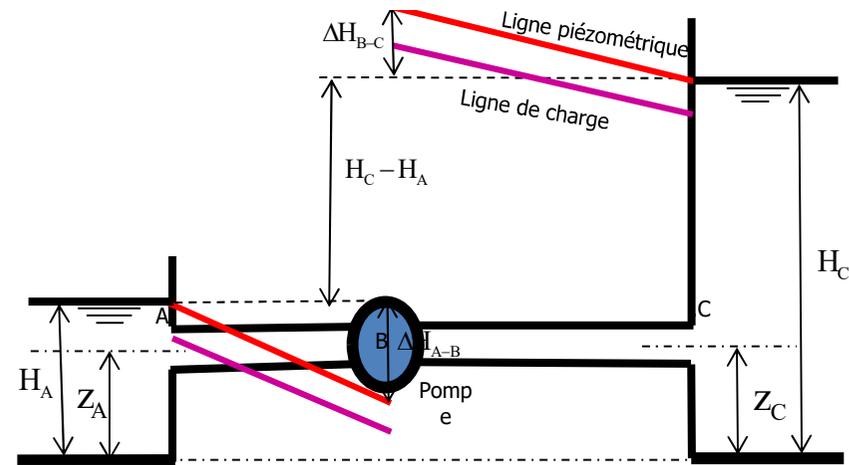
2.7.2 Caractéristiques des pompes centrifuges

$$\Delta H_p = H_{Br} - H_{Ba}$$

Le supplément de charge apporté par la pompe dépend du débit et il est donné par la courbe caractéristique de la pompe. La courbe caractéristique d'une pompe centrifuge donne la hauteur manométrique totale (ΔH_p) en fonction du débit.

On approche en général la courbe caractéristique d'une pompe peut être ajustée à l'aide d'une fonction du type:

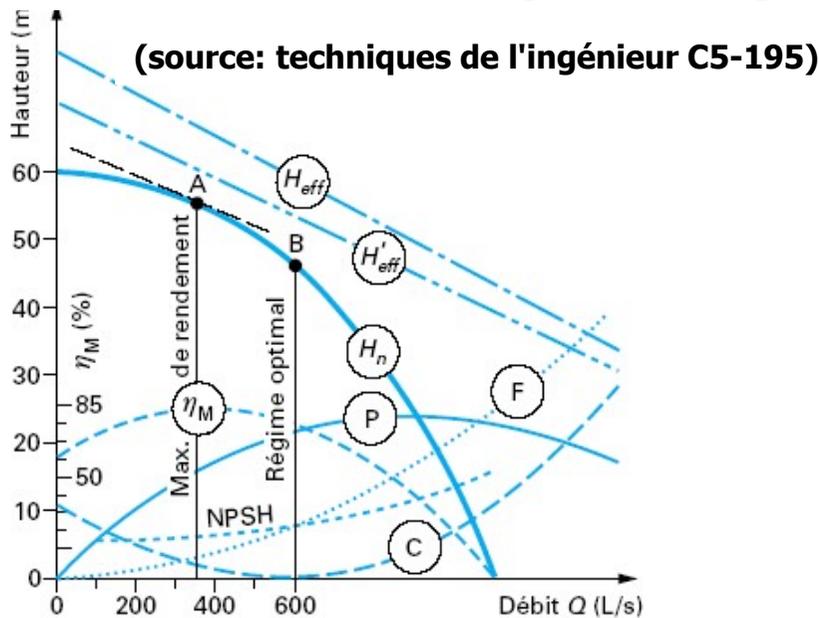
$$\Delta H_p = H_0 + BQ + CQ^2$$



2. Les écoulements en charge

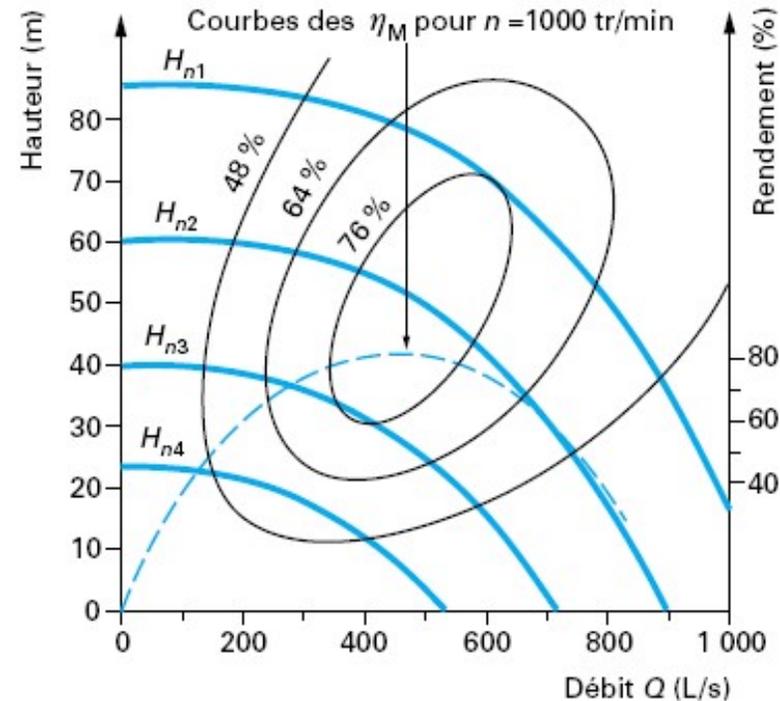
2.7 Systèmes hydrauliques avec pompage

2.7.2 Caractéristiques des pompes centrifuges



a) en fonction du débit :

- H_{eff} hauteurs théoriques effectivement engendrées (nombre d'aubes infini, d'épaisseur nulle)
- H'_{eff} hauteurs théoriques effectivement engendrées avec des aubes réelles, en nombre fini
- C pertes de charge dues aux chocs de l'eau à l'entrée et à la sortie des aubes
- F pertes de charge dues aux frottement de l'eau dans les aubes
- H_n hauteurs nettes engendrées : $H_n = H'_{eff} - (C + F)$
- η_M rendements manométriques en % : $\eta_M = H_n / H_{eff}$
- NPSH hauteurs nettes d'aspiration (*net positive suction head*)
- P puissance absorbée par la pompe



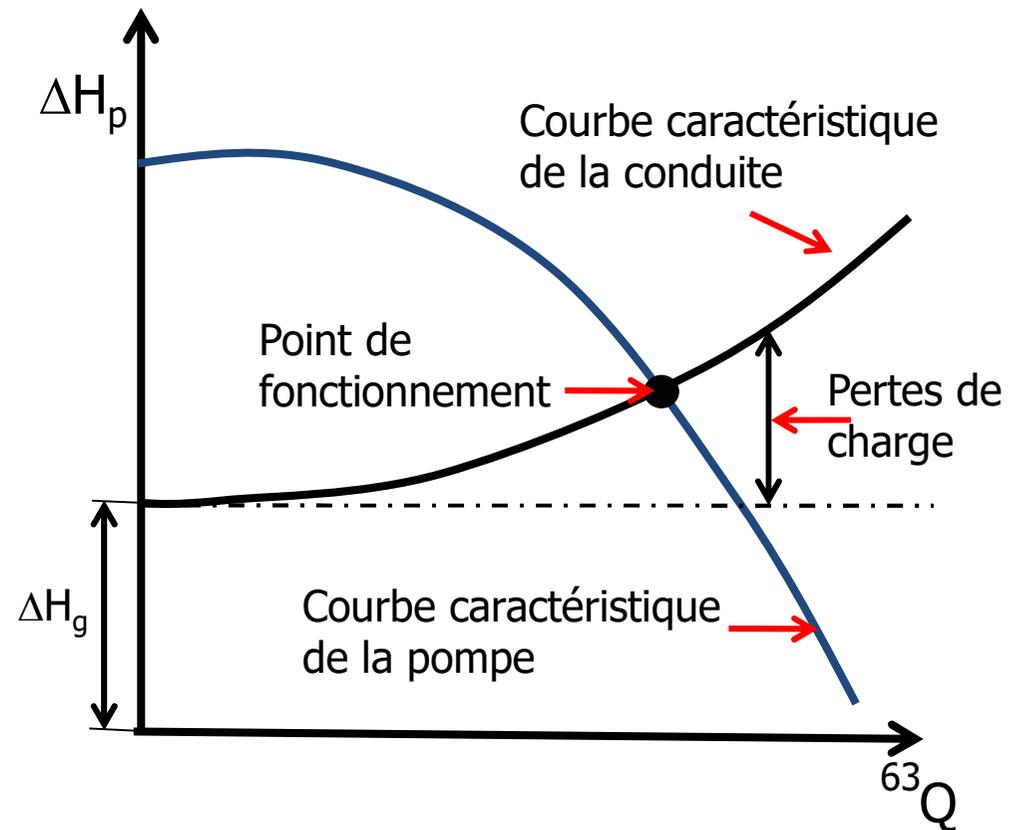
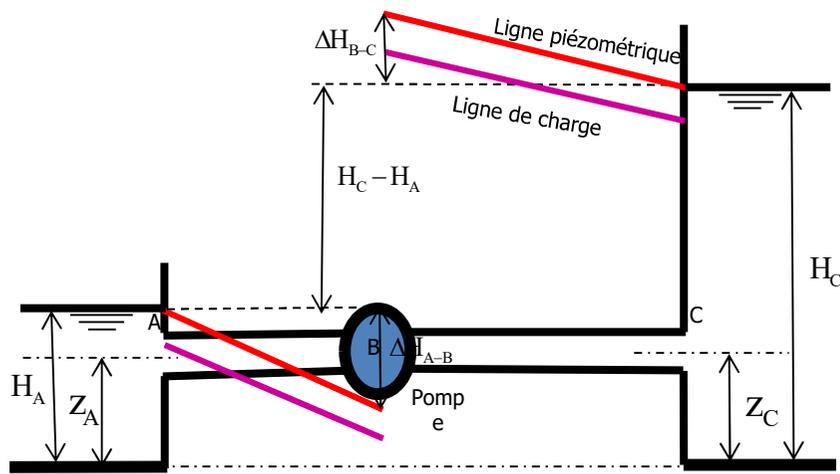
b) dans le cas de la marche à vitesse variable :

- $H_{n1} H_{n2} H_{n3} H_{n4}$ hauteurs nettes engendrées aux vitesses $n_1 n_2 n_3 n_4$ (en tr/min)
- Pour une même hauteur H_n on a : $Q_1/n_1 = Q_2/n_2 = \dots = Q_n/n_n$
- Pour un même débit Q on a : $H_{n1}/H_{n2} = (n_1/n_2)^2$
- Courbes 48 %, 64 %, 76 % : courbes d'équirendements ou colline des rendements.

2.7 Systèmes hydrauliques avec pompage

2.7.3 Point de fonctionnement d'une pompe centrifuge

$$\Delta H_p = (H_C - H_A) + \frac{8}{\pi^2 g} \left[\lambda_1 \frac{L_1}{D_1^5} + \sum_i \frac{\xi_i}{D_1^4} + \lambda_2 \frac{L_2}{D_2^5} + \sum_i \frac{\xi_i}{D_2^4} \right] Q^2$$
$$= \Delta H_g + \mathfrak{R}Q^2$$



2.7 Systèmes hydrauliques avec pompage

2.7.3 Point de fonctionnement d'une pompe centrifuge

$$\Delta H_p = (H_C - H_A) + \frac{8}{\pi^2 g} \left[\lambda_1 \frac{L_1}{D_1^5} + \sum_i \frac{\xi_i}{D_1^4} + \lambda_2 \frac{L_2}{D_2^5} + \sum_i \frac{\xi_i}{D_2^4} \right] Q^2$$

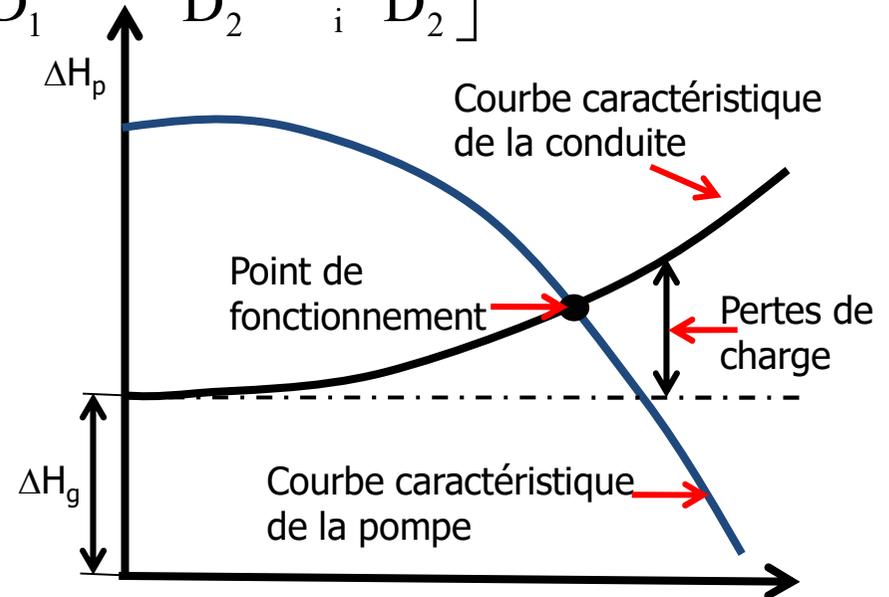
$$= \Delta H_g + \mathfrak{R}Q^2$$

$$\Delta H_g + \mathfrak{R}Q^2 = H_0 + BQ + CQ^2$$

$$(\mathfrak{R} - C)Q^2 - BQ + \Delta H_g - H_0 = 0$$

Dont les deux racines sont :

$$Q = \frac{B \pm \sqrt{B^2 + 4(\mathfrak{R} - C)(H_0 + \Delta H_g)}}{2(\mathfrak{R} - C)}$$



On retiendra la racine qui correspond à un point sur la courbe caractéristique de la pompe