Similitude des pompes

Similitude des pompes

- Théorème π:

Une équation physique f $(x_1, x_2, ..., x_p) = 0$
peut s'écrire F $(\pi_1, \pi_2, ..., \pi_{p-q}) = 0$.
Les "π_i" sont des produits sans dimension, indépendants qui seront construits à partir des variables $x_1, x_2, ..., x_p$. Le nombre de ces produits p est inférieur au nombre de variables x, il est égal à (p- q);
« p » étant le nombre de variables et « **q »** le nombre d'unités fondamentales intervenant dans ces p grandeurs physiques.
En mécanique des fluides, les unités fondamentales sont :
la masse "M", la longueur "L" et le temps "T".

- Application aux pompes:

Position du problème

Le constructeur fournit à l'utilisateur les caractéristiques suivantes :

Q - H
P - Q
η - Q

Pour une pompe donnée (D2 fixé)
Pour une vitesse de rotation donnée (N fixé)

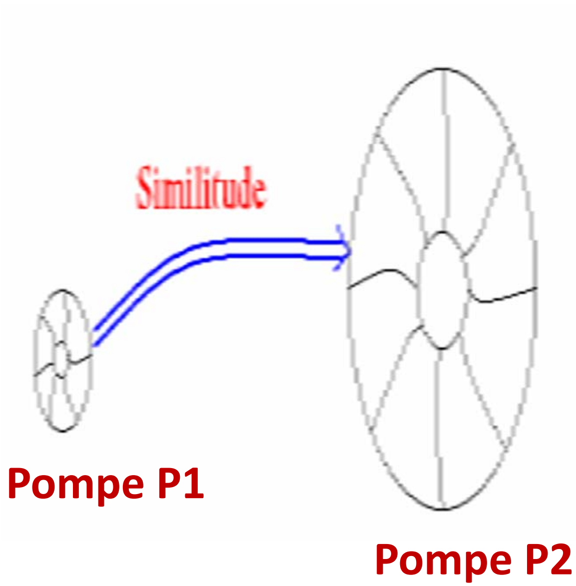
Problème **: Déterminer les nouvelles caractéristiques quand:**

- On modifie la vitesse de rotation
- On réduit le diamètre de la roue

D'où on fait appel à l'Analyse dimensionnelle

Rôle de la similitude

- Déterminer des paramètres sans dimension qui caractérisent le fonctionnement d'une pompe
- Lois de similitude : Ces paramètres restent constants quand on modifie N ou D



Quand deux Pompes P1 et P2 sont semblables; les lois de similitudes doivent êtres satisfaites:

- ✓ **Similitude géométrique :** rapport entre tous les éléments géométriques de 2 pompes constant.
- ✓ **Similitude cinématique :** triangles des vitesses semblables entre points homologues des 2 pompes
- ✓ **Similitude dynamique :** écoulement semblable dans les roues des 2 pompes en similitude géométrique et cinématique

$$\frac{D_2}{D_1} = \frac{L_{\text{sortie Pompe 2}}}{L_{\text{sortie Pompe 1}}} = constante = \lambda \quad \ldots\ldots\ldots\ldots..(l'echelle\ géometrique)$$

7 Variables contrôlent le fonctionnement d'une pompe

$$\left\{ \begin{array}{l} \textbf{N : vitesse de rotation de la roue} \\ \textbf{Q : débit pompé} \\ \textbf{H : hauteur manométrique} \\ \textbf{D : diamètre de la roue} \\ \textbf{g : gravité} \\ \rho, \mu \textbf{ : propriétés du fluide} \end{array} \right.$$

6 Variables (grandeurs physiques) sont retenues : Q , E , N , D , ρ , µ avec ($E = g \cdot H$)

3 Unités interviennent dans les variable précédentes: **L , M , T**

D'après le Théorème des π: 6 variables et 3 unités donc
($6 - 3 = 3$) paramètres sans dimension π1 , π2 , π3

E, D, ρ sont des utité fondamentale et Q , N, µ seront des unité secondaire

$$\pi_1 = E^{\alpha 1} \cdot D^{\alpha 2} \cdot \rho^{\alpha 3} \cdot Q \Leftrightarrow M^0 L^0 T^0 = (L^2 \cdot T^{-2})^{\alpha 1} \cdot L^{\alpha 2} \cdot (M \cdot L^{-3})^{\alpha 3} \cdot (L^3 \cdot T^{-1})$$

$$\pi_2 = E^{\beta 1} \cdot D^{\beta 2} \cdot \rho^{\beta 3} \cdot N$$

$$\pi_3 = E^{\gamma 1} \cdot D^{\gamma 2} \cdot \rho^{\gamma 3} \cdot \mu$$

Les paramètres $\alpha 1; \alpha 2, \alpha 3, \beta 1, \dots, \gamma 3$ seront déterminé par identification à partire des équation des unité

Exemple pour π_1:

(M) : $\alpha 3 = 0;$

(L): $2\alpha 1 + \alpha 2 - 3\alpha 3 + 3 = 0; \Longrightarrow 2\alpha 1 + \alpha 2 + 3 = 0 \Longrightarrow \alpha 2 = 1 - 3 = -2$

(T): $-2\alpha 1 - 1 = 0 \Longrightarrow \alpha 1 = -1/2$

$$\pi_1 = E^{-1/2} \cdot D^2 \cdot \rho^0 \cdot Q = \frac{Q}{D^2 \cdot \sqrt{E}} = \frac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{D^2 \cdot \sqrt{gH}}}$$

$$\pi_1 = \frac{Q}{D^2 \cdot \sqrt{gH}} \qquad \pi_2 = \frac{N \cdot D}{\sqrt{gH}} \qquad \pi_3 = \frac{\nu}{D \cdot \sqrt{gH}}$$

Nouveaux critères de fonctionnement

$$\boxed{\begin{aligned} \pi_4 &= \frac{\pi_1}{\pi_3} = \frac{Q}{\nu \cdot D} \\ \pi_5 &= \pi_2 \cdot \sqrt{\pi_3} = \frac{N \cdot \sqrt{Q}}{(gH)^{3/4}} \\ \pi_6 &= \frac{\pi_1}{\pi_2} = \frac{Q}{N \cdot D^3} \end{aligned}}$$

Reynolds

appelé pouvoir débitant (débit spécifique Q_s)

$$\boxed{\pi_7 = \frac{1}{{\pi_2}^2} = \frac{gH}{N^2 \cdot D^2}}$$

appelé pouvoir Manométrique (Hauteur Spécifique H_s)

π_7 est le quatrième paramètres sans dimension, il est utilisé pour remplacer un des trois paramètres sans dimension

Le terme $\boxed{N_s = \frac{\pi_5}{g^{3/4}} = \frac{N \cdot \sqrt{Q}}{H^{3/4}}}$ **Et appelé vitesse spécifique**

N : tr/min
Q : m^3/s
H : m

- **Pour une pompe : N_s ne varie pas avec N**
- **Pour deux pompes semblables N_s est le même**

Utilisation pratique des lois de similitude

1. Variation de la vitesse dans le cas d'une même pompe:

Critères de fonctionnement : Qs et Hs
Ns caractérise le type de pompe

	Une même pompe	
Roue : diamètre sortie	D	D
Débit	Q1	Q2
Hauteur manométrique	H1	H2
Vitesse de rotation	N1	N2
Puissance hydraulique	P1	P2

a. Egalité des hauteurs spécifiques $\pi_7 = \dfrac{gH}{N^2 \cdot D^2}$

$$\frac{H_1}{{N_1}^2 \cdot D^2} = \frac{H_2}{{N_2}^2 \cdot D^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{H_1}{H_2} = \frac{{N_1}^2}{{N_2}^2}}$$

b. Egalité des débits spécifiques $Q_S = \frac{Q}{N \cdot D^3}$

$$\frac{Q_1}{N_1 \cdot D^3} = \frac{Q_2}{N_2 \cdot D^3} \Rightarrow \boxed{\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{N_1}{N_2}}$$

c. Rapport des puissances

Puisque $P = \rho \cdot g \cdot H \cdot Q \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{\rho \cdot g \cdot H_1 \cdot Q_1}{\rho \cdot g \cdot H_2 \cdot Q_2}$ **même rendement**

$$\Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{H_1}{H_2} \cdot \frac{Q_1}{Q_2} \Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{N_1{}^2}{N_2{}^2} \cdot \frac{N_1}{N_2} \Rightarrow \boxed{\frac{P_1}{P_2} = \frac{N_1{}^3}{N_2{}^3}}$$

Pour une même avec une vitesse N variable:

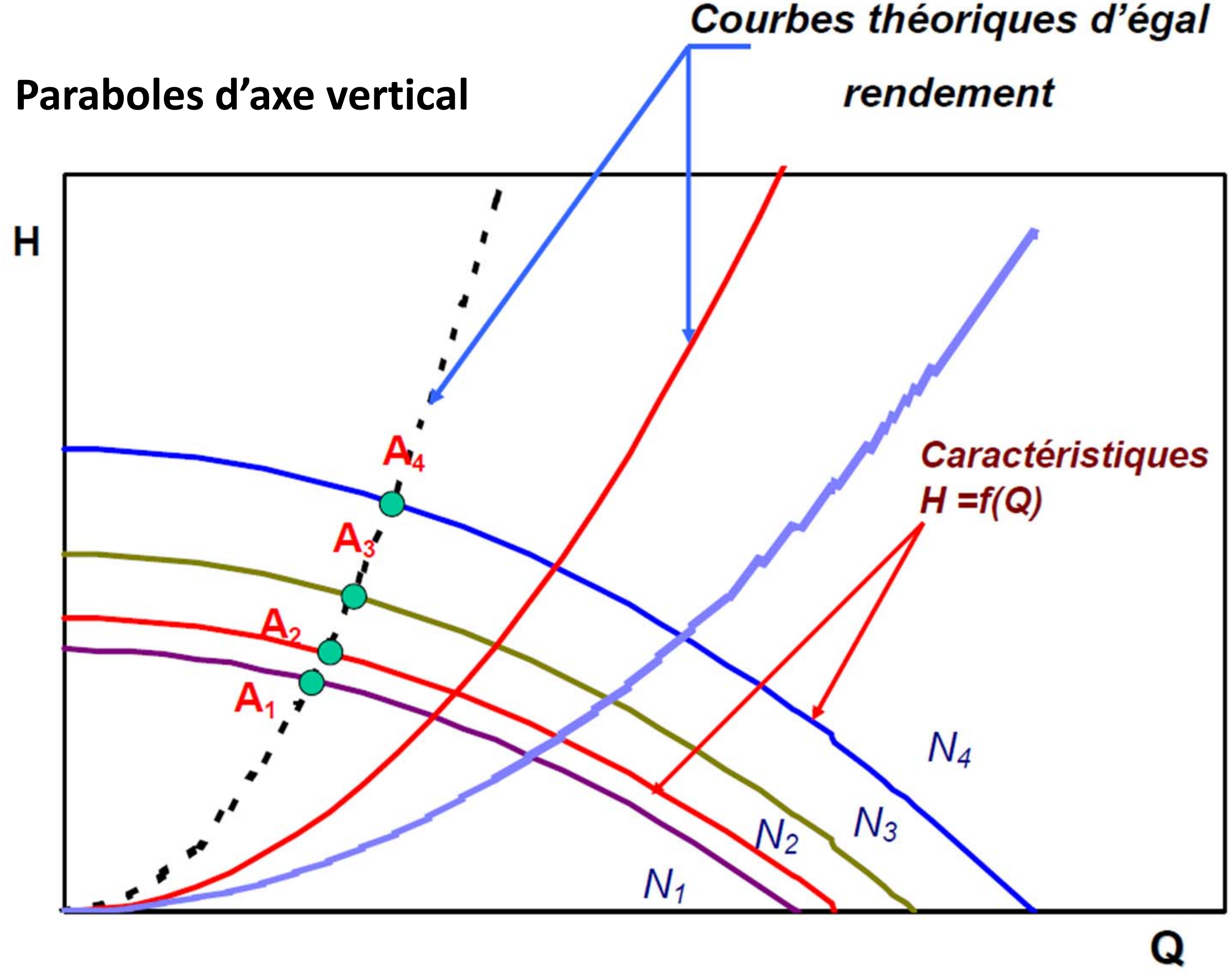
$$Q \propto N \quad ; \quad \mathrm{H} \propto N^2 \quad et \quad P \propto N^3$$

Courbes caractéristiques d'une même pompe (D = Cte) à différente vitesse N

Les régimes de fonctionnement semblables quand N varie sont définis par :

$$\frac{H_1}{Q_1} = \frac{H_2}{Q_2} = cte$$

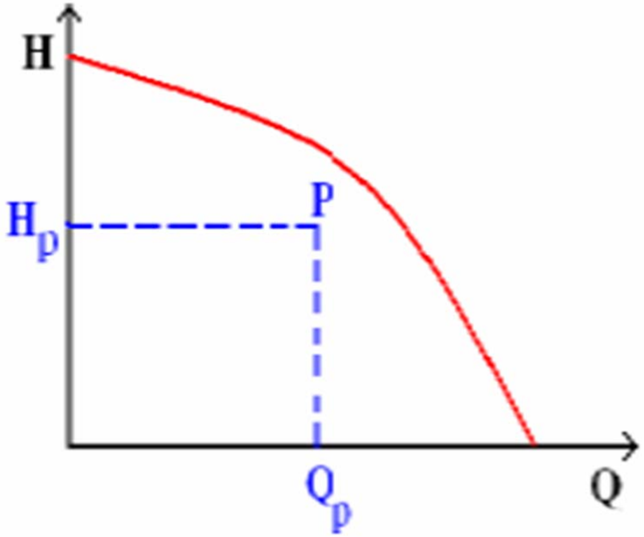
Paraboles d'axe vertical



A_1, A_2, A_3, A_4 Points de fonctionnement semblables

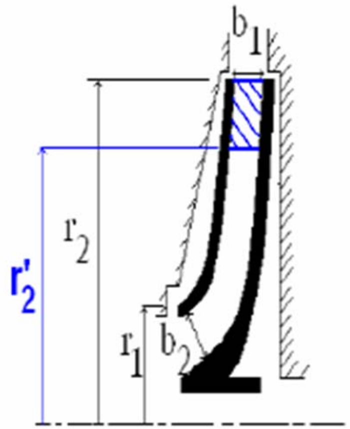
2. Rognage de la roue

On dispose de la caractéristique H =f(Q) de la pompe



Supposant que P est le point de fonction désiré pour une installation de pompage

Donc il faut réduire le débit et la hauteur manométrique de la pompe, Si on veut atteindre cette objectif sans changement de cette pompe ni de sa vitesse de rotation (moteur); le Rognage de la roue de la pompes nous offre l'opportunité de réaliser çà. le Rognage est une réduction de diamètre de la roue d'une pompe (par tournage)

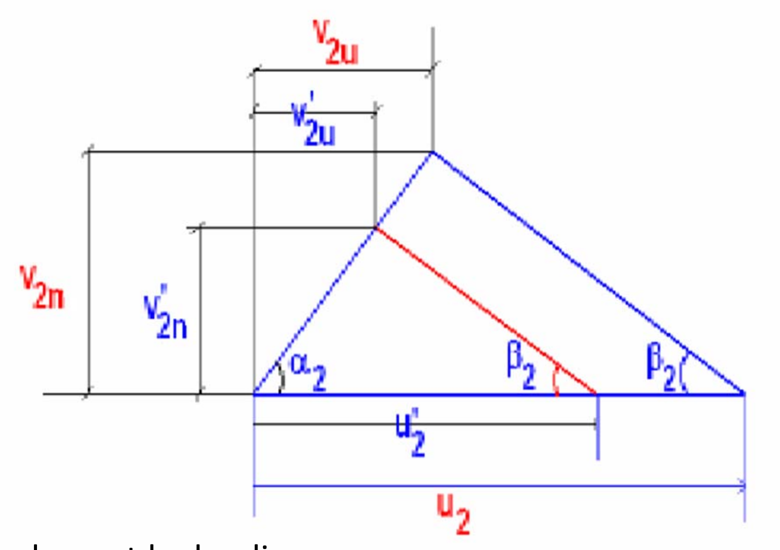


En diminuant le diamètre de roue, La vitesse d'entraînement à la sortie de la roue sera modifiée

$U_2 = N \cdot D_2/2$ Devient $U'2 = N \cdot D_2'/2$

Donc $\frac{U'2}{U_2} = \frac{D'2}{D_2}$ *L'échelle géométrique = l'échelle des vitesse « $\lambda = \lambda_V$ »*

Ce qui entraine une modification du triangle des vitesses et ces deux triangle seront semblables (loi de similitude)



Pour une roue radiale ou axiale H_{th} est maximale

$$H_{th} = \frac{U_2 \cdot V_{2u}}{g}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{H'_{th}}{H_{th}} = \frac{U'_2}{U_2} \cdot \frac{V'_{2u}}{V_{2u}} = \frac{D'_2{}^2}{D_2{}^2} = \frac{H'}{H}$$

même rendement hydraulique

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{\pi \cdot D'_2 \cdot L \cdot V'_{2n}}{\pi \cdot D_2 \cdot L \cdot V_{2n}} = \frac{D'_2{}^2 \cdot V'_{2n}}{D_2{}^2 \cdot V_{2n}} = \frac{D'_2{}^2}{D_2{}^2} = \frac{H'}{H} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{Q'}{Q} = \frac{H'}{H} = \frac{D'_2{}^2}{D_2{}^2}}$$

Calcul du rognage

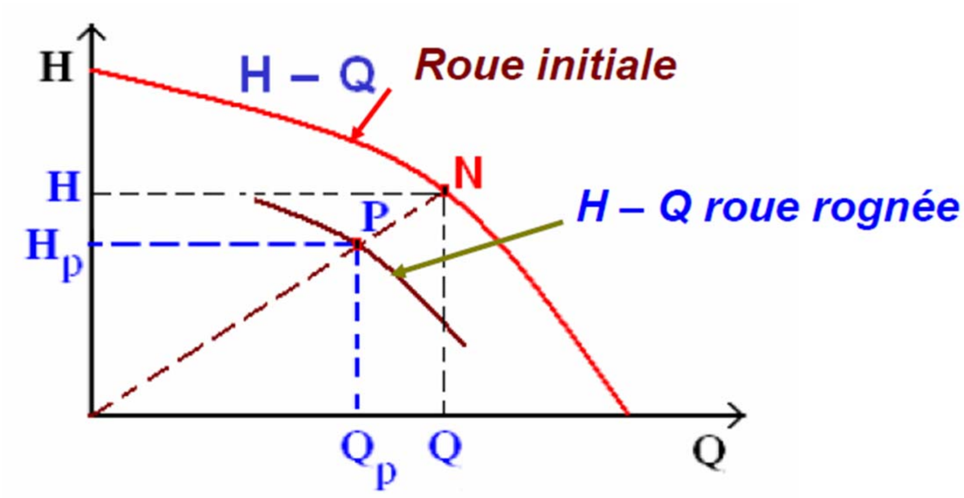
On connaît la caractéristique de la roue initiale : Diamètre D_2

On désire réaliser un point de fonctionnement (Point P) : Qp , Hp , D'2 ?

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{H'}{H} = \frac{{D'_2}^2}{{D_2}^2}$$

$$H' = \frac{H}{Q} Q'$$

Points N et P situés sur la droite issue de l'origine



Calcul du diamètre D'_2 de la roue rognée

$$\frac{D'_2}{D_2} = \sqrt{\frac{Q'}{Q}} = \sqrt{\frac{H'}{H}}$$

Connaissant D'_2 on construit la caractéristique de la roue rognée

Précaution: Le rognage doit être limité à 15% du diamètre

de la même manière RATEAU a montré que les produits suivants restent constants pour toutes les pompes considérées et pour toutes les vitesses de rotation:

Les fonctions f et F seront définies par: f (H, D_2, Q, N, g, μ, ρ) = 0 et F (π_1, π_2, π_3, π_4) = 0.
Avec: $U_2 = N \cdot D/2$

$\boxed{\mu = \frac{gH}{u_2{}^2}}$ $\boxed{;\ \delta = \frac{Q}{u_2 \cdot D_2{}^2}}$ $\boxed{;\ \tau = \frac{P}{\rho \cdot u_2{}^3 \cdot D_2{}^2}}$ $\boxed{\text{Et}\quad \eta}$ ....(1)

P : puissance hydraulique
μ= π_1: coefficient manométrique;
δ = π_2: coefficient de débit;
τ = π_3: coefficient de puissance
η = π_4 : rendement de la pompe

Les lois de similitude peuvent alors s'énoncer ainsi:
- pour une même pompe centrifuge tournant à une vitesse quelconque ainsi que pour des pompes semblables (mêmes triangles des vitesses aux points homologues) tournant à des vitesses quelconques, si on se trouve en des points de fonctionnement homologues, les coefficients de Rateau sont communs à tous les régimes de fonctionnement.
- ces coefficients présentent un grand intérêt pour la représentation des courbes caractéristiques.

En effet, si on dispose d'un réseau de courbes hauteur, rendement et puissance en fonction du débit pour une pompe et une vitesse données et si on substitue à ces grandeurs les coefficients adimensionnels de Rateau correspondants: μ, τ, η et δ, on obtient, pour toutes les pompes semblables à la pompe considérée et pour toutes les vitesses de rotation, trois courbes qui sont les *courbes caractéristiques* de la pompe centrifuge considérée et de toutes les autres pompes semblables.

Il résulte de cette propriété deux avantages pratiques:

- pour l'exécution des essais d'une pompe, il suffira d'essayer une pompe semblable (modèle réduit moins coûteux) à une vitesse quelconque pour en déduire les caractéristiques de la pompe donnée à n'importe quelle vitesse de rotation;
- dans l'établissement du projet de construction d'une pompe, on part d'une pompe existante dont on connaît les caractéristiques et grâce aux lois de similitude on en déduit les dimensions de la pompe cherchée et sa vitesse de rotation.

Pour **une même pompe** tournant à des vitesses de rotation différentes N_1 et N_2, les formules de similitude (1) nous permettent d'écrire:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

$$\frac{H_1}{H_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^3$$

$$\eta_1 = \eta_2$$

Avec ces relations, nous pouvons tracer la caractéristique d'une pompe à une vitesse de rotation désirée à partir d'une autre caractéristique correspondant à une autre vitesse de rotation.
Pour cela, on fait varier le débit proportionnellement au rapport des vitesses de rotation et la hauteur proportionnellement au carré de ce rapport (*Figure 1).*

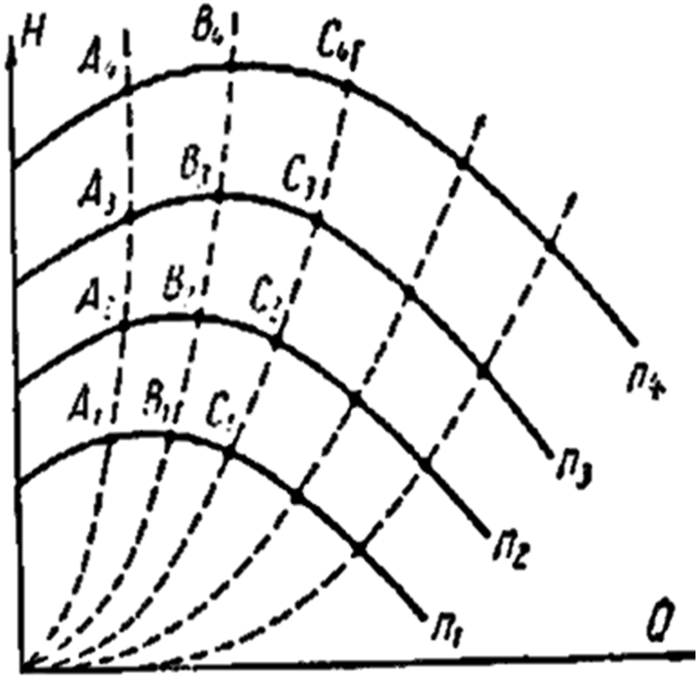


Figure 3.10- Caractéristiques d'une pompe à des vitesses de rotations différentes

Les points A_i correspondent à des régimes de fonctionnement semblables. Les points B_i correspondent à une seconde série de régimes de fonctionnement semblables ...etc.

Vitesse spécifique

L'un des produits de la similitude les plus important est celui de la *vitesse spécifique* car il est directement lié à la forme du rotor de la pompe. Il est donné par :

$$N_S = \frac{N\sqrt{Q}}{H^{3/4}}$$

N_s s'exprime en général en tr/mn avec Q en m^3/s, N en tours/mn et H en m.

En général, on connaît les besoins Q et H ainsi que la vitesse de rotation N d'après l'entraînement envisagé ; on peut donc calculer le Ns de la pompe désirée :

$$N_S = \frac{N\sqrt{Q}}{H^{3/4}}$$

Pour satisfaire cette demande, le constructeur va donc chercher dans ses fabrications la pompe qui a le Ns le plus voisin de celui désiré. Admettons que cette pompe fournisse un débit q et une hauteur h avec une vitesse n :

$$N_S = \frac{n\sqrt{q}}{h^{3/4}}$$

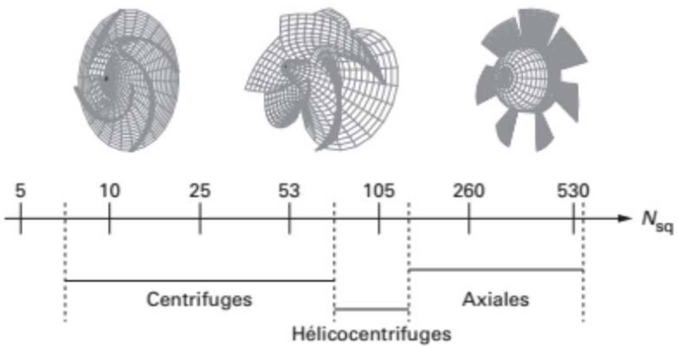
Le rapport de similitude est tel que :

$$\lambda = \sqrt[3]{\frac{Q}{q}\frac{n}{N}}$$

On peut calculer l et construire une pompe semblable à la précédente en multipliant toutes ces dimensions par λ.

constructeurs ont classé les pompes suivant leur nombre de tour spécifique (Fig.2) (voir tableau ci-dessous

N_S	$N_S < 50$	$50 < N_S < 150$	$N_S > 150\text{-}250$
Type	Pompe centrifuge	Pompe hélico-centrifuge	Pompe axiale
Ecoulement à travers la roue	Radial 90°	Hélicoïdale	Axial 180°



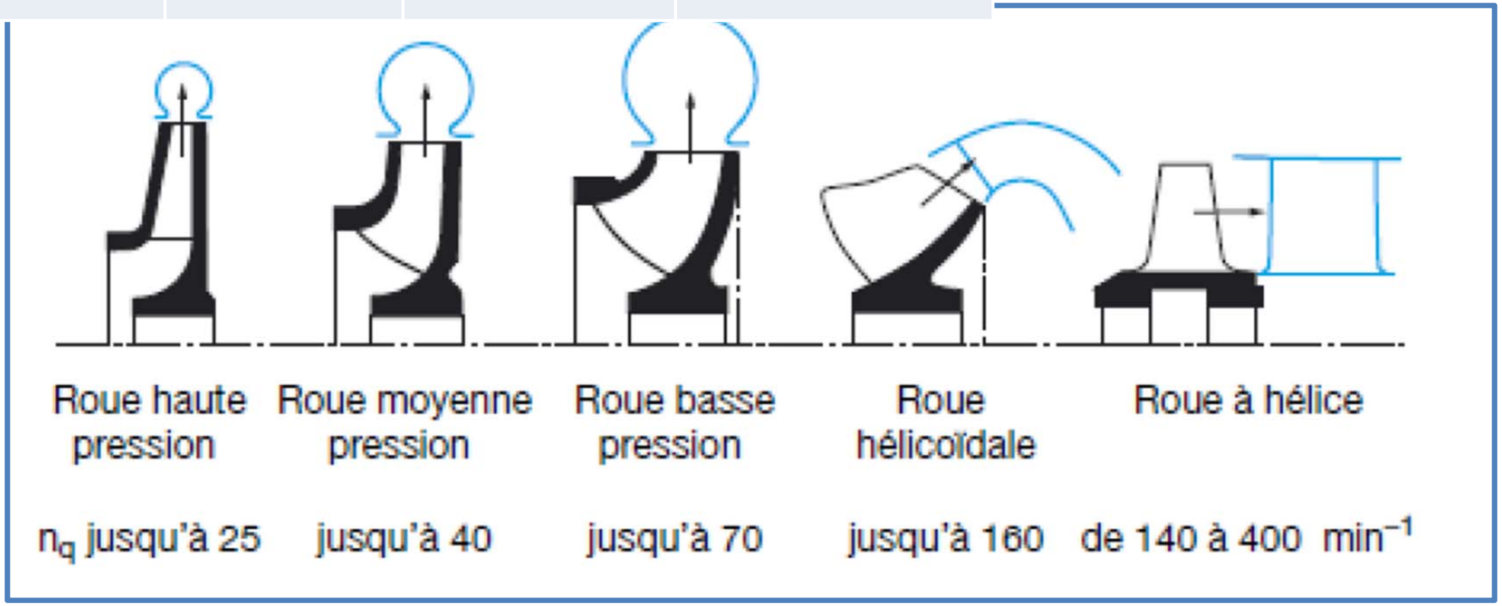
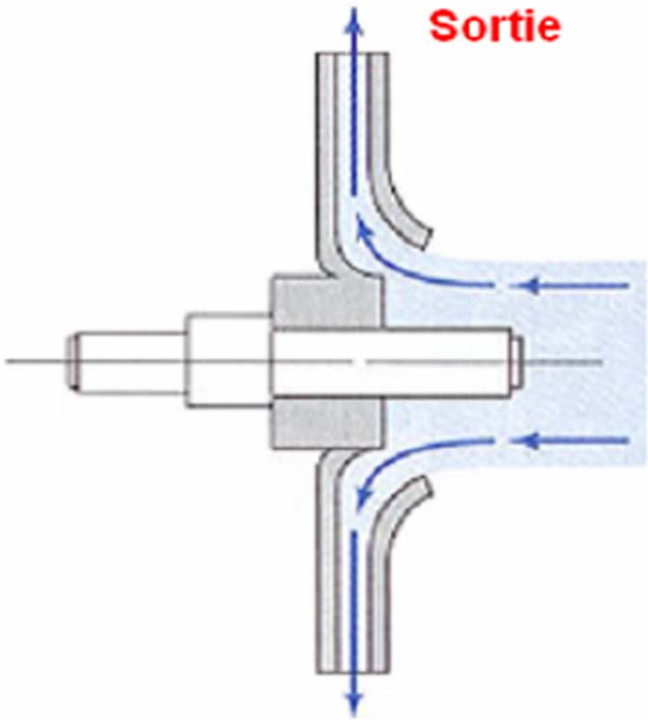
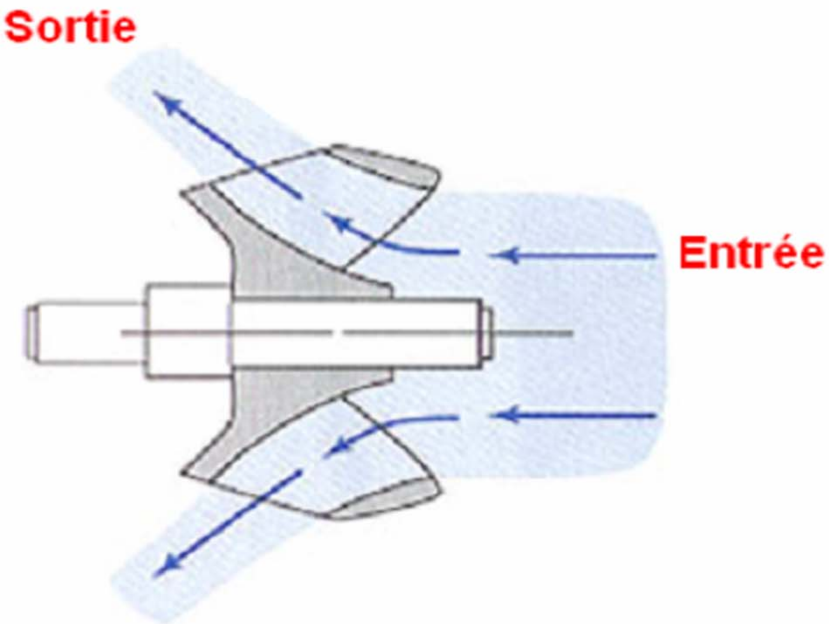


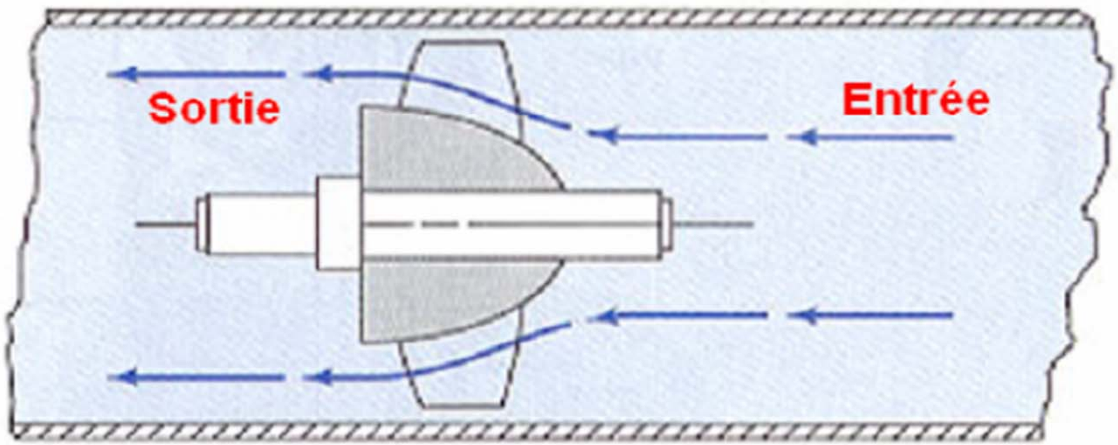
Figure 2. Classement des pompes en fonction de la géométrie de la roue, le sens d'écoulement dans la roue et la vitesse spécifique N_S



Roue radiale



Roue hélico-centrifuge



Adaptation d'une pompe centrifuge à des conditions de fonctionnement données

Généralement pour la plupart des utilisations, les installations de pompage ne permettent pas d'avoir un débit et une hauteur manométrique qui correspondent aux attentes et ils sont susceptibles de varier

a- Par variation de la vitesse de rotation de la pompe

Cette solution est compatible avec un entraînement des pompes par moteur thermique ou électrique à courant continu. On sait que,

- Les débits varient dans le rapport des vitesses,
- Les hauteurs varient dans le rapport du carré des vitesses,
- Les puissances varient dans le rapport du cube des vitesses.

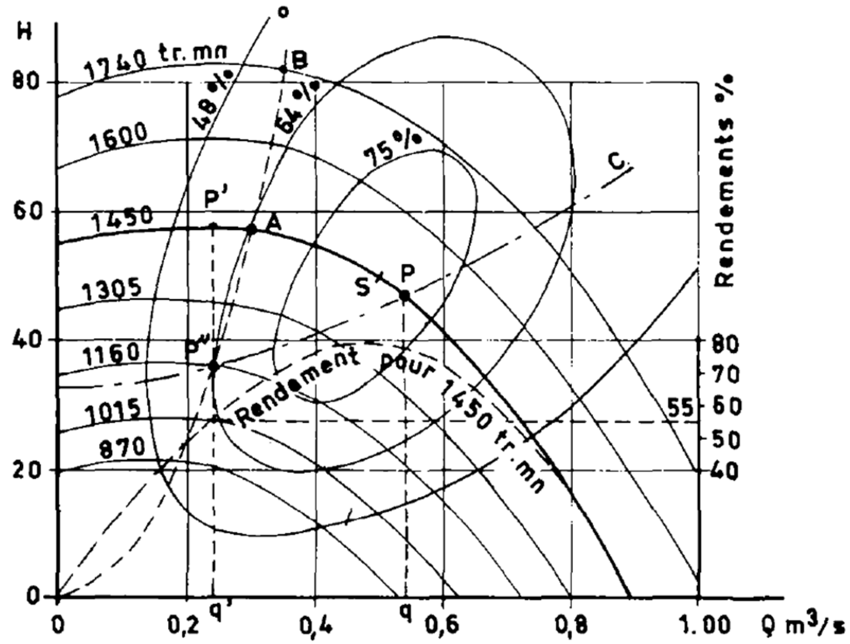
Le rendement est peu affecté par le changement de régime de marche, à condition que les écarts de vitesse ne soient pas trop grands.

En réalité pour une pompe qui passe de la vitesse de rotation N à N' avec:

$$N' = \frac{N}{2} \text{ on a } \eta' = \eta - 0,005 \; ; \; N' = \frac{N}{3} \text{ on a } \eta' = \eta - 0,01$$

Le graphique en face montre différentes courbes H = f(Q) obtenues avec une même pompe pour des vitesses de rotation différentes.

Sur le même graphique il est tracé des courbes d'égal rendement correspondantes et la caractéristique de la conduite de refoulement.



On constate en considérant les différents points de fonctionnement possibles, que des débits très différents pourront être fournis avec des rendements acceptables.

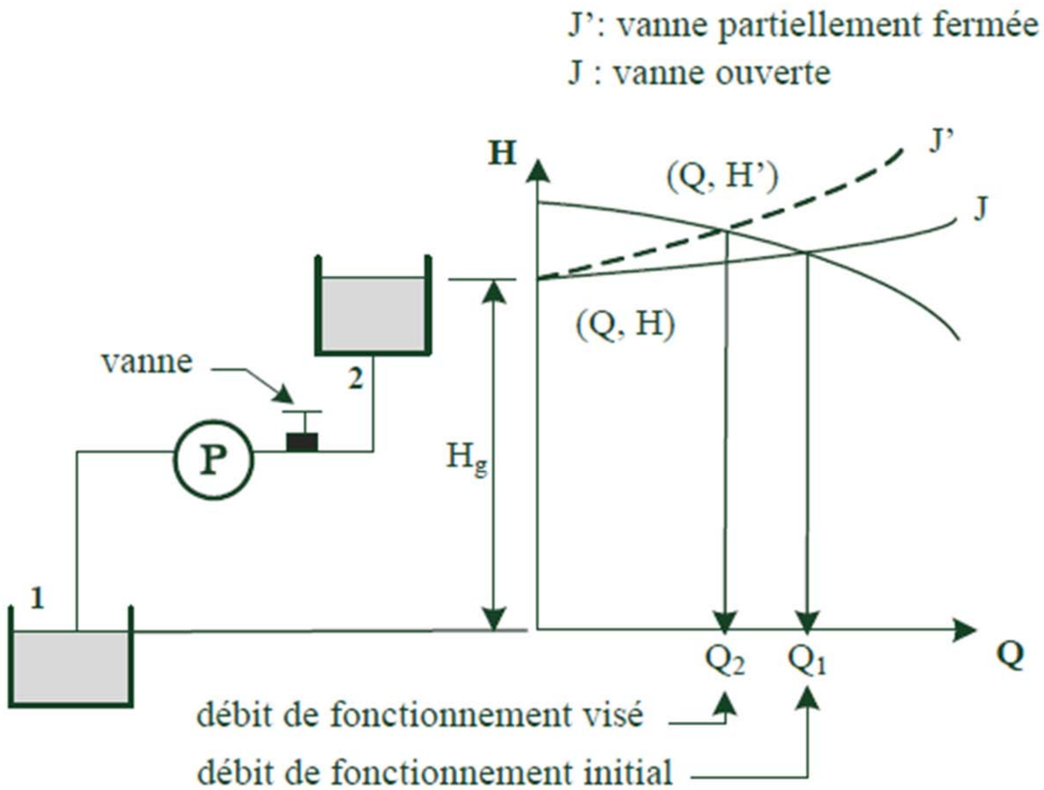
Une diminution du débit de q à q' (réduction de plus de 50% du débit initial), permet d'envisager une vitesse de 1 160 tr/mn (point P') au lieu de 1 450 tr/mn (point P) avec un rendement acceptable de 64%.

Remarque:

D'une manière générale, les groupes motopompes sont d'autant plus chers qu'ils tournent lentement. Toutefois la diminution de vitesse présente l'avantage de réduire le bruit et d'améliorer la capacité d'aspiration de la pompe et d'augmenter la longévité du groupe par la diminution de l'usure.

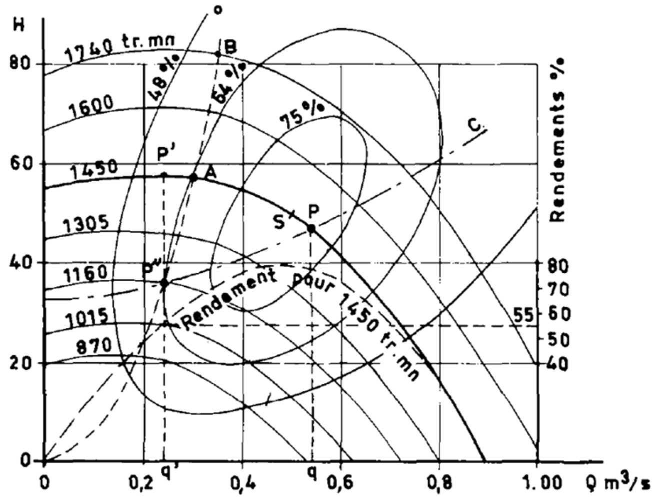
Le choix de la vitesse des groupes résulte donc d'une comparaison économique entre le supplément d'investissement lié à la diminution de vitesse et les avantages qui en résultent pour l'exploitation.

Réduction du débit par vannage



b. création d’une perte de charge singulière (Vanner sur la canalisation de refoulement**):**

On peut obtenir une réduction de débit en diminuant la section de passage de l’eau par fermeture d’une vanne située sur la conduite de refoulement.
Ainsi, pour N = 1450 tr /mn le point de fonctionnement (fig.) passe de P à P’, P’-P’’ mesure la perte de charge particulière introduite par rapport à la solution précédente (changement de vitesse de rotation) ; il en résulte :



- ✓ Une chute de rendement de la pompe: Au point P’ correspond un rendement de 55% pour une vitesse de rotation de 1450 tr /mn au lieu de 64% avec la solution de réduction de vitesse
- ✓ Une diminution du rendement global du groupe pompe moteur: En effet, la puissance à développer par ce dernier est augmentée dans le rapport *H'/H"* (valeurs se rapportant au point *P'* et P").
- ✓ Un risque de faire fonctionner la pompe dans une zone instable (P’ est sur le maximum de la caractéristique de la pompe) ;
- ✓ Un risque également d'augmenter dangereusement la poussée radiale et donc de nuire à la tenue mécanique du matériel.

Le vannage de la conduite de refoulement ne pourra être envisagée que d’une façon passagère en raison du faible rendement de l’installation. Il doit être évité sur les pompes à hélices.

c) Rogner la Roue (Rognage).

Cela consiste à réduire légèrement le diamètre de la roue pour adapter celui-ci aux objectifs recherchés concernant le débit et la hauteur manométrique ; il s'agit là d'une opération délicate.

Si le diamètre de la roue change :

- les débits et les hauteurs varieront dans le rapport du carré des diamètres,
- les puissances varieront suivant la quatrième puissance des diamètres.

Si la diminution ou l'augmentation de la roue ne dépasse pas 12 à 15%, pour des points de fonctionnements analogues on a :

$$\boxed{\frac{Q}{D^2} = cst} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{H}{D^2} = cst} \quad \text{donc} \quad \boxed{\frac{Q_1}{{D_1}^2} = \frac{Q_2}{{D_2}^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{H_1}{{D_1}^2} = \frac{H_2}{{D_2}^2}}$$

On déduit les rapports suivants:

$$\boxed{\left\{\begin{matrix} \dfrac{Q_1}{Q_2} = \dfrac{{D_1}^2}{{D_2}^2} \\ \dfrac{H_1}{H_2} = \dfrac{{D_1}^2}{{D_2}^2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{H_1}{H_2} = \frac{{D_1}^2}{{D_2}^2}}$$

On dit que les débits et les hauteurs varient dans le rapport des carrés des diamètres.

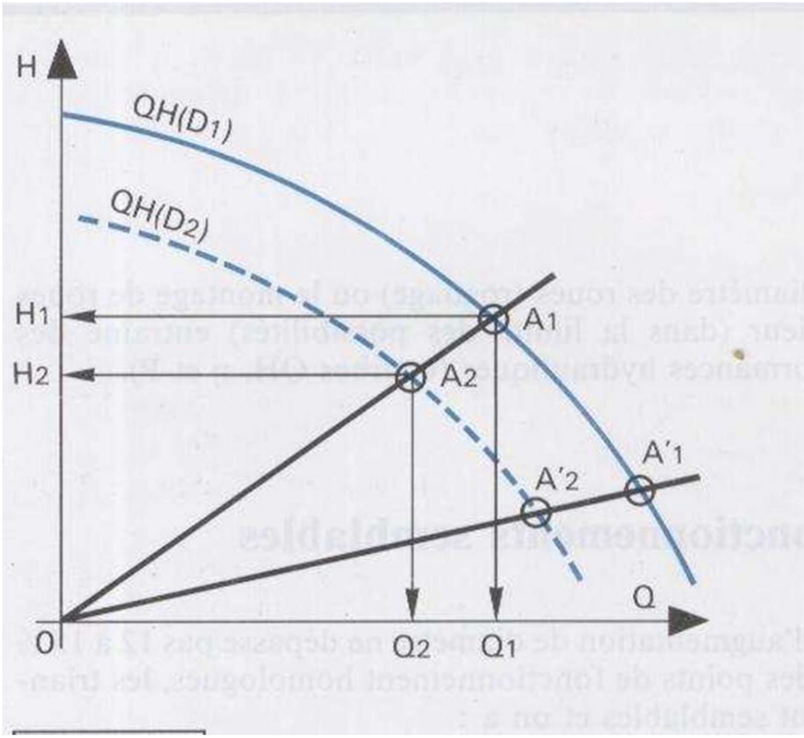
Comme $\boldsymbol{P_h = \rho g H Q}$

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^4$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{H_1 \cdot Q_1}{H_2 \cdot Q_2} = \frac{{D_1}^2}{{D_2}^2} \cdot \frac{{D_1}^2}{{D_2}^2} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^4$$

$$H_1 = \frac{H_2}{Q_2} \cdot Q_1 = K \cdot Q_1$$

Les points de fonctionnement homologues sont situés sur des droites



Remarques:

- Cependant les lois indiquées ci-dessus ne sont valables que pour de faibles rognages de la roue. Il ne faudra pas dépasser de toute façon un rognage de 20 % car les rendements de la pompe seraient gravement affectés.
- De toute manière, les constructeurs sont en mesure de fournir les courbes *QH* maximale et minimale correspondant aux diamètres maximal et minimal possibles, de la roue.

Exercice 1:

Pompe centrifuge, au point de fonctionnement possède les caractéristiques suivantes:

N = 1500 tr/mn, Q = 1000 l/mn, H = 30 m, D_2 = 30 cm $P_{a\ l'arbre}$ = 8,4 CV

1. On construit une autre roue et on change la vitesse de rotation
2. On rogne la roue et on change pas la vitesse de rotation

n' = 1750 tr/mn D'_2 = 25 cm

calculer :

1. La hauteur d'élévation totale
2. Le débit d'eau pompé
3. La puissance fournie

1. Une autre roue avec modification de la vitesse de rotation

Lois de similitude: $Q_S = \dfrac{Q}{N \cdot D^3}$ $\quad H_s = \dfrac{gH}{N^2 \cdot D^2}$

$$Q_S = \frac{Q}{N \cdot D^3} = \frac{Q'}{N' \cdot D'^3} \Leftrightarrow Q' = \frac{Q}{N \cdot D^3} \cdot N' \cdot D'^3 = \frac{1000}{1500 \cdot 30^3} \cdot 1750 \cdot 25^3$$

$$\Rightarrow \boxed{Q' = 675{,}15 \text{ l/mn}}$$

$$H_s = \frac{gH}{N^2 \cdot D^2} = \frac{gH'}{N'^2 \cdot D'^2} \quad \Leftrightarrow \quad H' = \frac{H}{N^2 \cdot D^2} \cdot N'^2 \cdot D'^2 = \frac{30}{1500^2 \cdot 30^2} \cdot 1750^2 \cdot 25^2$$

$$\Rightarrow \boxed{H' = 28{,}35 \text{mce}}$$

Puissance à l'arbre (au frein): puisque $Q' = \frac{Q}{N \cdot D^3} \cdot N' \cdot D'^3$ et $H' = \frac{H}{N^2 \cdot D^2} \cdot N'^2 \cdot D'^2$

$$Donc \qquad \frac{P'_{ar}}{P_{ar}} = \frac{Q'}{Q} \cdot \frac{H'}{H} = \left(\frac{N' \cdot D'^3}{N \cdot D^3}\right) \cdot \left(\frac{N'^2 \cdot D'^2}{N^2 \cdot D^2}\right) = \frac{N'^3 \cdot D'^5}{N^3 \cdot D^5}$$

$$P'_{ar} = \left(\frac{N'^3 \cdot D'^5}{N^3 \cdot D^5}\right) \cdot P_{ar} = \textbf{5,36 CV}$$

Puissance fournie

$$P' = \rho \,.\, g \,.\, Q' \,.\, H' = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot \left(\frac{675{,}15 \cdot 10^{-3}}{60}\right) \cdot 28.36 = 3{,}157 \, Kw$$

$$3{,}157 \cdot 10^3 / 736 = 4.25 \, CV$$

Première pompe

$$P = \rho \,.\, g \,.\, Q \,.\, H = 9.81 \cdot 1000 \cdot 30/60/736 = 6.66 \, CV$$

On vérifie que le rendement global des deux pompes reste constant

Rendement $\eta = \frac{6.66}{8{,}4} \approx \frac{4.25}{5{,}36} \approx 0{,}8$

1. **On rogne la roue et on change pas la vitesse de rotation**

Puisque la roue à été rogné donc la relation : $\boxed{\frac{Q'}{Q} = \frac{H'}{H} = \frac{{D'_2}^2}{{D_2}^2}}$

$$\boxed{Q' = \frac{{D'_2}^2}{{D_2}^2} \cdot Q = \left(\frac{25}{30}\right)^2 \cdot 1000 = 694,44\ l/mn}$$

$$\boxed{H' = \frac{{D'_2}^2}{{D_2}^2} \cdot H = \left(\frac{25}{30}\right)^2 \cdot 30 = 20,83\ mce}$$

Puissance à l'arbre (au frein):

$$\frac{P'_{ar}}{P_{ar}} = \frac{Q'}{Q} \cdot \frac{H'}{H} = \frac{{D'_2}^2}{{D_2}^2} \cdot \frac{{D'_2}^2}{{D_2}^2} = \frac{{D'_2}^4}{{D_2}^4} \quad \Rightarrow P'_{ar} = \frac{{D'_2}^4}{{D_2}^4} \cdot P_{ar} = \left(\frac{25}{30}\right)^4 \cdot 8,4 = 7cv$$

Puissance fournie

$$P' = \rho \,.\, g \,.\, Q' . H' = 1000 \cdot 9,81 \cdot \left(\frac{694,44 \cdot 10^{-3}}{60}\right) \cdot 20,83/736 = 3,21\ cv$$

Première pompe

$$P = \rho \,.\, g \,.\, Q \,.\, H = 9.81 \cdot 1000 \cdot 30/60/736 = 6.66\ CV$$

On vérifie que le rendement global des deux pompes

Rendement $\eta = \frac{6.66}{8,4} \approx 0,8 \quad \neq \quad \eta' = \frac{3,21}{5,36} \approx 0,46$

Exercice

De combien doit on « rogner » la roue de diamètre 90mm d'une pompe de débit 3550 l/h sous une pression de 23,60m, pour qu'elle fournisse un débit de 3 m^3 /h sous une pression de 20 mce lorsqu'elle tourne à 2905 tr/mn ?

- Vérifier que:

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^4$$

- Les puissances varient suivant la quatrième puissance des diamètres.

Il ne faut pas dépasser un rognage de 15% car les rendements de la pompe seraient gravement affectés.

Puisque la roue à été rogné donc la relation : $\boxed{\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{H_1}{H_2} = \frac{D_1^{\,2}}{D_2^{\,2}}}$

a. Rapport des puissances

Puisque $P = \rho \cdot g \cdot H \cdot Q \quad \Rightarrow \quad \frac{P_1}{P_2} = \frac{\cancel{\rho} \cdot \cancel{g} \cdot H_1 \cdot Q_1}{\cancel{\rho} \cdot \cancel{g} \cdot H_2 \cdot Q_2} = \frac{Q_1}{Q_2} \cdot \frac{H_1}{H_2} = \frac{D_1^{\,2}}{D_2^{\,2}} \cdot \frac{D_1^{\,2}}{D_2^{\,2}}$

$$\Rightarrow \quad \frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^4$$

$$\boxed{\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{H_1}{H_2} = \frac{{D_1}^2}{{D_2}^2}} \Rightarrow \boxed{\frac{3550}{3000} \approx \frac{26}{20} \approx 1,18 = \frac{90^2}{{D_2}^2}}$$

$$\Rightarrow \quad {D_2}^2 = \frac{90^2}{1,18} \quad \Rightarrow \quad D_2 = \frac{90}{\sqrt{1,18}} = 82,85mm$$

un rognage de: $\frac{D_1 - D_2}{D_1} = 7,94\%$

Si la caractéristique de la pompe 1 (prototype) est décrite par le tableau et la figure en bas, déduire la caractéristique du la pompe rognée

Q1	H1
0	72
400	71,5
800	71
1000	70
1500	66
2000	61
2500	52
3100	40
3400	30
3550	23,6
3800	14
4000	8