Exercices de cours Hydraulique Générale

Pr. BOUCHELKIA Hamid
Université de Tlemcen
bouchelkiahamid@gmail.com

Série d’exercices N°01 (Hydraulique Générale II)

Exercice 1 :

Du pétrole de viscosité dynamique $\mu = 0{,}65 \cdot 10^{-3}$ Pa.s et de densité 0,9 circule dans une conduite de1700m longueur et de diamètre 30cm et de 0,3mm de rugosité à un débit volumique 20 l/s.

a) Déterminer la viscosité cinématique du pétrole dans le système MKS (SI) et le système CGS
b) Calculer la vitesse de l’écoulement et le débit massique
c) Calculer le nombre de Reynolds et en déduire le régime d’écoulement
d) Déterminer le coefficient de perte de charge linéaire graphiquement et en utilisant la formule qui convient
e) Calculer la perte de charge dans la conduite

Exercice 2 :

Déterminer la vitesse critique de l’écoulement de deux fluides dans une conduite de diamètre 20 cm (on suppose pour les deux cas que l’écoulement est laminaire Re =2000)

- ✓ Du pétrole de viscosité 1,42 cSt
- ✓ De l’eau de viscosité 1,16 cPo

Exercice 3 :

Déterminer la perte de charge pour une conduite de 25 cm de diamètre et de rugosité absolue ε = 0,25mm et de longueur 500m si le débit est de 120 l/s dans laquelle s’écoule une huile de densité 0,85 et de viscosité 9 cSt.

SOL EXERCICE 01

système cgs : le Stokes (St) $1 m^2/s = 10^4$ St $= 10^6$ cSt

$\mu = 0{,}65 \cdot 10^{-3}$ Pa.s et de densité 0,9

$\rho_p = d_P \cdot \rho = 0{,}9 \cdot 10^3 Kg/m^3$

$$\upsilon = \frac{\mu}{\rho} = \frac{0{,}65 \cdot 10^{-3}}{0{,}9 \cdot 10^3} = 0{,}72 \cdot 10^{-6} m^2/s$$ En SI

En CGS $\upsilon = 0{,}72 \cdot 10^{-6} \cdot 10^4 = 0{,}72 \cdot 10^{-2} St = 0{,}72 cSt$

diamètre 30cm à un débit volumique 20 l/s.

$$V = \frac{Q}{S} = \frac{4Q}{\pi \cdot D^2} = \frac{4 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{3{,}14 \cdot 0{,}3^2} = 0{,}28\, m/s$$

$$Q\mathrm{m} = \rho \cdot \mathrm{Q} = 0{,}9 \cdot 10^3 \cdot 20 \cdot 10^{-3} = 18 \mathrm{Kg/s}$$

$$Re = \frac{V \cdot D}{\upsilon} = \frac{0{,}28 \cdot 0{,}3}{0{,}72 \cdot 10^{-6}} = 1{,}16 \cdot 10^5 > 2000 \text{ regime turbulent}$$

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0{,}3}{300} = 0{,}001$$

De la courbe de Moody ➔ $\lambda = 0{,}0225$

$-\ 2000 < Re = 1{,}16 \cdot 105 < 5 \cdot 10^5$ ==⇒la formule de Blasius peut être utilisée➔

$$\lambda = 0{,}316 \cdot Re^{-0{,}25} = 0{,}316 \cdot (1{,}16 \cdot 10^5)^{-0{,}25} = 0{,}017$$

- En utilisant la formule de colebrook-white car $Re >\ 2000$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log\left(\frac{\varepsilon}{3{,}7D} + \frac{2{,}51}{R_e\sqrt{\lambda}}\right)$$

$$\lambda 0 = 0{,}02 \Rightarrow \lambda 1 = 0{,}022 \Rightarrow \lambda 2 = 0{,}022 \text{ donc } \lambda = 0{,}022$$

$$\lambda = 0{,}022$$

$$\Delta H_l = J = \frac{\lambda L}{D} \cdot \frac{V^2}{2g} = \frac{0{,}022 \cdot 1700}{0{,}3} \cdot \frac{0{,}28^2}{2 \cdot 9{,}81} \approx 0{,}5mce$$

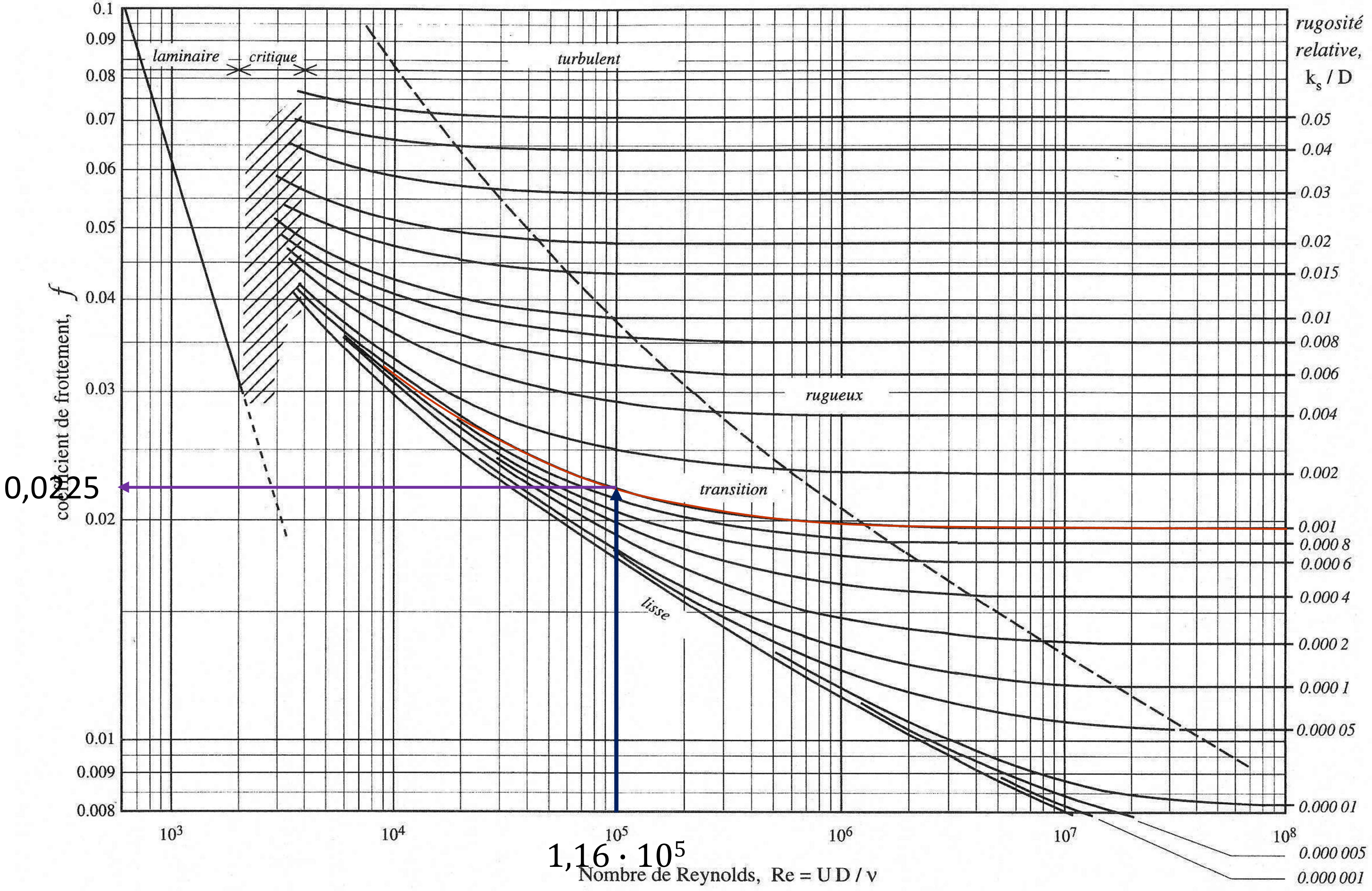
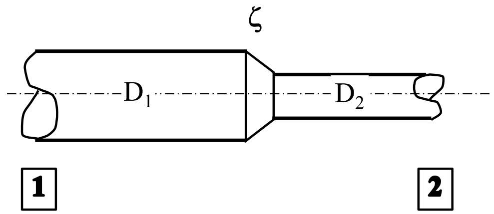


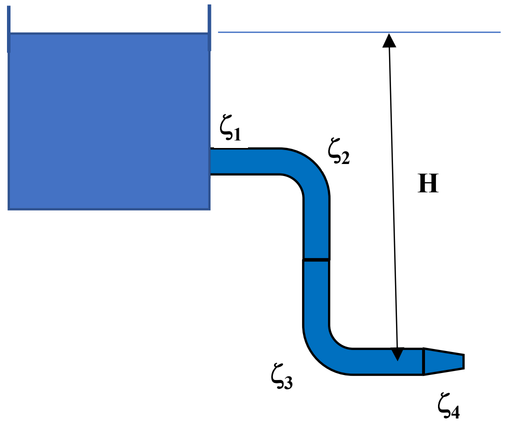
diagramme de Moody

Exercice 4 :

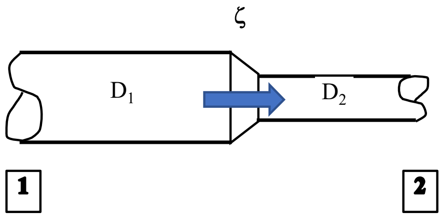
Une conduite constituée de deux tronçons (figure en face) de diamètres et de longueurs différentes transportant de l'eau de masse volumique ρ = 1000 kg/m^3 et de viscosité cinématique 10^{-6} m^2/s
Calculer la différence de pression les deux extrémités de la conduite sachant que :
L_1= 5m, L_2 = 2m, D_1 = 30mm, D_2 = 10 mm, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ =0,1mm , V_1 = 0,6 m/s ζ = 0,45



Exercice 5 :
Soit un system hydraulique de figure en face (le jet sort à l'air libre). La perte de charge du convergent est négligeable (ζ_4=0) par rapport aux pertes dues à l'entrance et aux coudes. On demande de calculer le débit en volume sachant que :
H=20m; D_1= 0,2m; D_2= 0,1m ; L= 300m; ζ_1= 0.08 $\zeta_2 = \zeta_3$= 0.25; υ= 1,3x10^{-6} m^2/s; ε = 0,8mm



Exercice 4



Une conduite constituée de deux tronçons (figure en face) de diamètres et de longueurs différentes transportant de l'eau de masse volumique ρ = 1000 kg/m^3 et de viscosité cinématique 10^{-6} m^2/s

Calculer la différence de pression les deux extrémités de la conduite sachant que :
L_1= 5m, L_2 = 2m, D_1 = 30mm, D_2 = 10 mm, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ =0,1mm , V_1 = 0,6 m/s ζ = 0,45

Appliquons l'équation de Bernoulli entre (1) et (2)

$$\frac{\mathbf{P}_1}{\rho g} + z_1 + \alpha_1 \frac{{V_1}^2}{2g} = \frac{\mathbf{P}_2}{\rho g} + z_2 + \alpha_2 \frac{{V_2}^2}{2g} + \Delta H_{12}$$

$$\frac{\mathbf{P}_1}{\rho g} - \frac{\mathbf{P}_2}{\rho g} = z_2 - z_1 + \frac{{V_2}^2}{2g} - \frac{{V_1}^2}{2g} + \Delta H_{12} \Leftrightarrow \frac{\Delta P}{\rho g} = \cancel{z_2 - z_1} + \frac{{V_2}^2 - {V_1}^2}{2g} + \Delta H_{12}$$

$$z_2 = z_1 \Rightarrow \frac{\Delta P}{\rho g} = \frac{{V_2}^2 - {V_1}^2}{2g} + \Delta H_{12}$$

De l'équation de continuité $Q = cst \Rightarrow V_1 \cdot S_1 = V_2 \cdot S_2 \Rightarrow V_2 = V_1 \cdot \frac{S_1}{S_2} = V_1 \cdot \frac{D_1^2}{D_2^2}$

$$V_1 = 0{,}6 m/s \Rightarrow V_2 = 0{,}6 \cdot \frac{0{,}03^2}{0{,}01^2} = 5{,}40 m/s$$

$$\Delta H_{12} = \Delta H_L + \Delta H_S$$

$\Delta H_S = \xi \frac{V^2}{2g}$ (l'usage prend toujours la vitesse la plus importante donv V=V_2=5,4m/s)

$$\Delta H_S = 0{,}45 \frac{5{,}4^2}{2 \cdot 9{,}81} \approx 0{,}67 mce$$

Perte de charge linéaire

$$\Delta H_l = J = \frac{\lambda L}{D} \cdot \frac{V^2}{2g}$$

$$\Delta H_L = \Delta H_{L1} + \Delta H_{L2} = \frac{\lambda_1 L_1}{D_1} \cdot \frac{{V_1}^2}{2g} + = \frac{\lambda_2 L_2}{D_2} \cdot \frac{{V_2}^2}{2g}$$

λ_1?

$$Re_1 = \frac{V_1 \cdot D_1}{\upsilon} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}03}{10^{-6}} = 18 \cdot 10^3 > 2000$$

de la C de Moody λ_1 =0,032

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0{,}1}{30} = 0{,}0033$$

λ_2?

$$Re_2 = \frac{V_2 \cdot D_2}{\upsilon} = \frac{5{,}4 \cdot 0{,}03}{10^{-6}} = 18 \cdot 10^3 > 2000$$

de la C de Moody λ_1 =0,032

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0{,}1}{30} = 0{,}0033$$

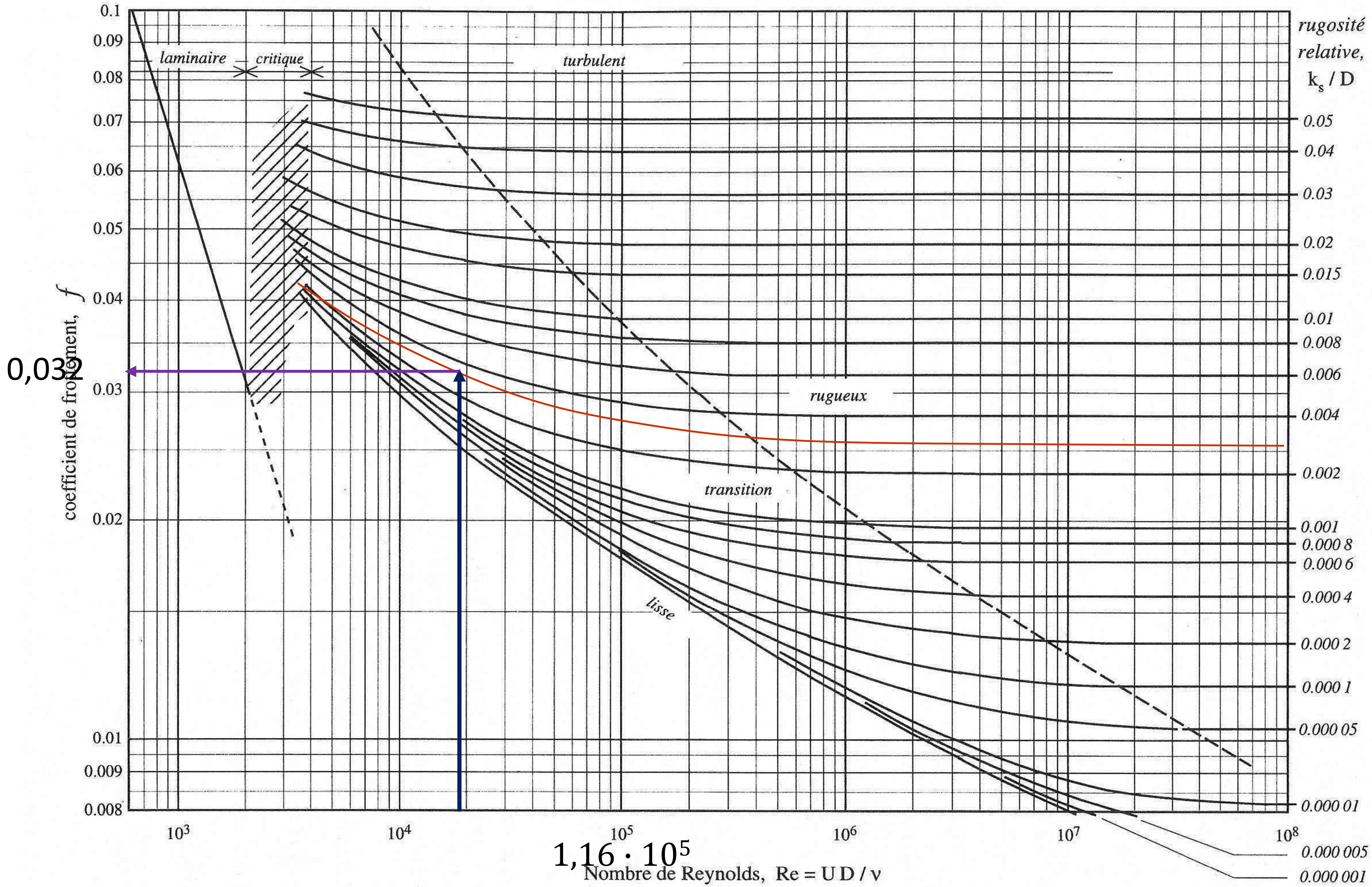
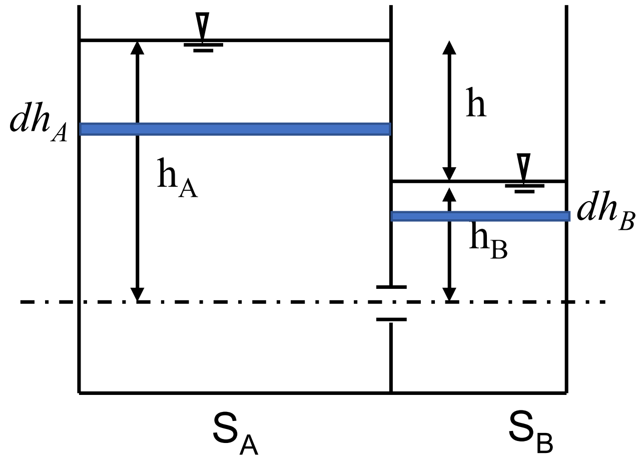


diagramme de Moody

Exercice 6 :

Deux réservoirs A et B sont réunis par un orifice noyé de section s de coefficient de débit C_d. La section du réservoir A est S_A et celle de B est S_B.
A l'instant t=0 la différence de niveau entre A et B est h.
Calculer le temps t pour que le liquide soit au même niveau en A et en B.
AN: Cd=0,85; $S_A = 1m^2$; $S_B= 0.5m^2$; $s=1cm^2$; h=0,5m



Solution

On sait que $h_A \cdot S_A + h_B\, S_B = C = cst$ $\Rightarrow S_A \cdot dh_A + S_B \cdot dh_B = 0$

$\Rightarrow S_A \cdot dh_A = -S_B \cdot dh_B \Rightarrow \cdot\, dh_A = -\frac{S_B}{S_A} \cdot dh_B$ …………(1)

et que $H = h_A - h_B$ $\Rightarrow dH = dh_A - dh_B$…………(2) De (1) et (2)$\Leftrightarrow dH = -\left(\frac{S_B}{S_A} + 1\right) \cdot dh_B \Leftrightarrow dh_B = -\frac{dH}{\left(\frac{S_B}{S_A}+1\right)}$

Le volume écoulé durant un temps dt est: $dv = Q \cdot dt = cd \cdot s \cdot \sqrt{2gH} \cdot dt$ *Ce volume dv est égale a* $S_B \cdot dh_B$

Donc $dv = Q \cdot dt = cd \cdot s \cdot \sqrt{2gH} \cdot dt = S_B \cdot dh_B = -S_B \cdot \frac{dH}{\left(\frac{S_B}{S_A}+1\right)}$ $\Rightarrow c_d \cdot s \cdot \sqrt{2gH} \cdot dt = -\frac{S_B}{\left(\frac{S_B}{S_A} + 1\right)} \cdot dH$

$$\Rightarrow dt = -\frac{S_B}{\left(\frac{S_B}{S_A}+1\right)\cdot cd \cdot s \cdot \sqrt{2gH}} \cdot dH \qquad \Rightarrow dt = -\frac{S_B}{\left(\frac{S_B}{S_A}+1\right)\cdot cd \cdot s \cdot \sqrt{2g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{H}} dH$$

$$\Rightarrow \int_0^T dt = -\frac{S_B}{\left(\frac{S_B}{S_A}+1\right)\cdot cd \cdot s \cdot \sqrt{2g}} \cdot \int_H^0 \frac{1}{\sqrt{H}} dH$$

$$\Rightarrow T = \frac{S_B}{\left(\frac{S_B}{S_A}+1\right)\cdot cd \cdot s \cdot \sqrt{2g}} \cdot \int_0^H H^{-1/2}\, dH \qquad \Rightarrow T = \frac{S_B}{\left(\frac{S_B}{S_A}+1\right)\cdot cd \cdot s \cdot \sqrt{2g}} \cdot 2 \cdot H^{1/2}$$

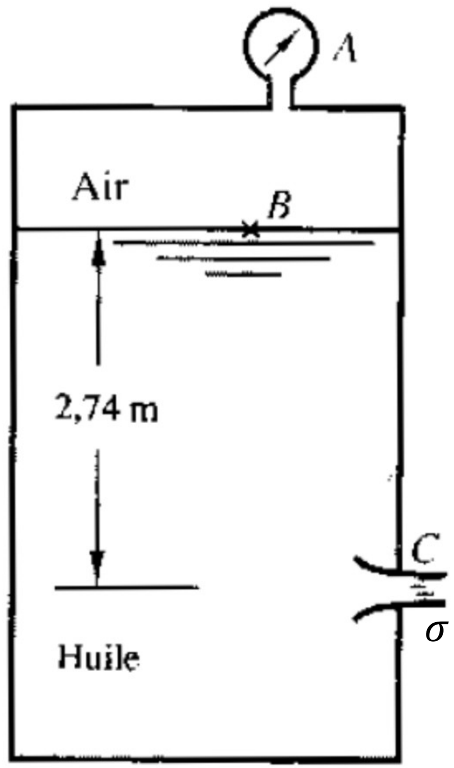
AN: S_A = 1m^2 ; S_B= 0.5m^2 ; s=1cm^2 ; h=0,5m

$$\Rightarrow T = \frac{0{,}5}{\left(\frac{0{,}5}{1}+1\right)\cdot 0{,}85 \cdot 1 \cdot 10^{-4} \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}81}} \cdot 2 \cdot 0{,}5^{\frac{1}{2}} = 1252{,}06\ \text{s} = 20{,}86\text{min} \approx 21 min$$

Reprendre l’exercice et calculer le temps nécessaire pour que le niveau au réservoir A s’abaisse de 0,15m

Exercice 7 :

De l'huile de densité 0,72 s'écoule par un orifice de 76 mm de diamètre dont les coefficients de vitesse et de contraction sont respectivement de 0,950 et de 0,650. Quelle doit être l'indication portée par le manomètre *A* de la figure en face pour que la puissance du jet soit de 6,00 kW?



$$C_c = \frac{\sigma}{s}$$

$La\ puissance\ du\ jet\ P_{jet} = \rho \cdot g \cdot Q \cdot H_{jet}$.........(1)

H_{jet} est la charge hydraulique au jet (à la sortie de l'orufice)

$$H_{jet} = \frac{P_c}{\rho \cdot g} + \frac{V_c^2}{2g} + z_c$$

$$P_c = P_{atm} = o\ en\ relative\ et z_c = 0 \qquad V_c = V_{jet}$$

$$H_{jet} = \frac{P_c}{\rho \cdot g} + \frac{V_c^2}{2g} + z_c = \frac{V_c^2}{2g} \qquad \Rightarrow H_{jet} = \frac{V_c^2}{2g} = \frac{V_{jet}^2}{2g} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$le\ debit\ a\ travers\ l'orifice\ est\ Q = V_c \cdot \sigma = V_c \cdot C_c \cdot s = V_{jet} \cdot Cc \cdot s \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

(2) Et (3) en (1) et on aura $P_{jet} = \rho \cdot g \cdot Q \cdot H_{jet} = \rho \cdot g \cdot V_{jet} \cdot Cc \cdot s \cdot \frac{V_{jet}^2}{2g} = \rho \cdot Cc \cdot s \cdot \frac{V_{jet}^3}{2}$

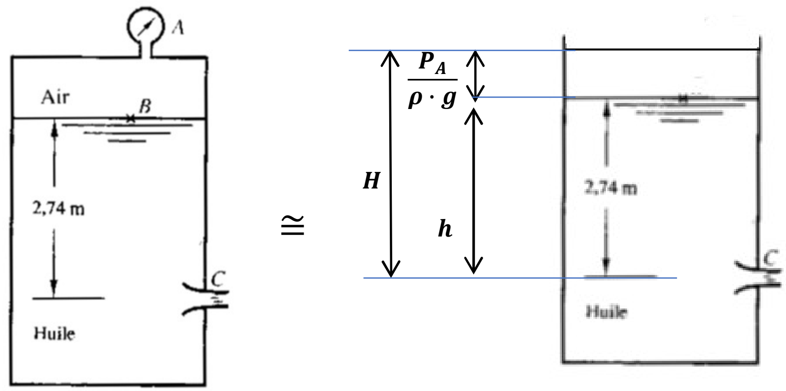
$$P_{jet} = \rho \cdot Cc \cdot s \cdot \frac{V_{jet}^3}{2} \Rightarrow V_{jet} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot P_{jet}}{\rho \cdot Cc \cdot s}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 6 \cdot 10^3}{0{,}72 \cdot 10^3 \cdot 0{,}65 \cdot \frac{3{,}14 \cdot (76 \cdot 10^{-3})^2}{4}}} = 17{,}816 \frac{m}{s} \approx 17{,}82 m/s$$

$$\Rightarrow V_{jet} \approx 17{,}82\ m/s$$

$$V_c = V_{jet} = Cv \cdot \sqrt{2gH} \quad \ldots..(4) \quad avec\ H\ etant\ la\ charge\ hydraulique\ \ sur\ l'orifice$$

$$H = \frac{P_B}{\rho \cdot g} + \frac{V_B^2}{2g} + h = \frac{P_A}{\rho \cdot g} + h$$

Car $V_B \approx 0$ (réservoir à grandes dimensions) et $P_B = P_A$

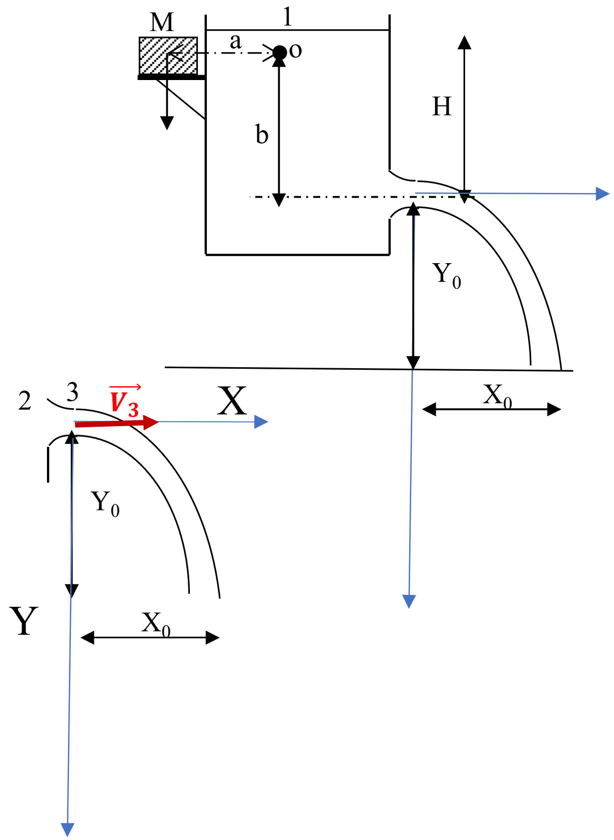


$$V_c = V_{jet} = Cv \cdot \sqrt{2g\left(\frac{P_A}{\rho \cdot g} + h\right)} \Rightarrow \frac{P_A}{\rho \cdot g} = \frac{V_{jet}^2}{2gC_v^2} - h$$

$$\frac{P_A}{\rho \cdot g} = \frac{17{,}82^2}{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}95^2} - 2{,}74 = 15{,}19\ m$$

$$P_A = \rho \cdot g \cdot 15{,}19 = 0{,}72 \cdot 10^3 \cdot 9{,}81 \cdot 15{,}19 = 107{,}31 \cdot 10^3 pa = 107{,}31\ Kpa = 1{,}07\ Bar$$

Exercice 8 :



Un jet s'échappe d'un réservoir muni d'un orifice de diamètre d=2cm. L'eau coule sous une charge constante H=2m, et touche le sol à Y_{max}=0,35m et X_{max}=1,62m de la section contractée (figure en face).

1.Calculer le coefficient de vitesse

2.Le réservoir pivote au tour d'axe 0 , et pour le maintenir horizontal, on dispose une masse M sur support (voir figure). Avec a=20cm et b=1,05m et M=3,92Kg. En déduire le coefficient de contraction C_C de l'orifice

3.Calculer la perte de charge qui reproduit dans cet écoulement et la puissance perdue par frottement.

Solution

$$Sur\ OX:\ \gamma_x = 0 \Rightarrow V_x = cst = V_3 \Rightarrow X = V_3 \cdot t + X_0 = V_3 \cdot t \ldots.(1)$$

$$Sur\ OY: \gamma_y = g \Rightarrow V_y = g \cdot t + V_{y0} = g \cdot t \Rightarrow Y = \frac{1}{2} g \cdot t^2 + Y_0 = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \ldots(2)$$

$$X = V_3 \cdot t \ldots.(1)\ et\ \ Y = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \ldots(2)$$

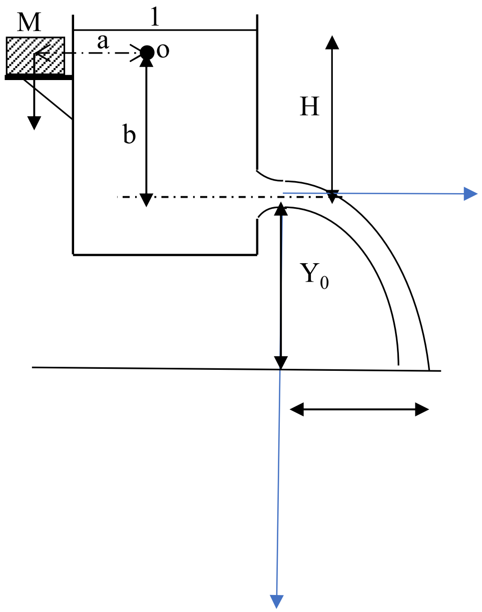
De (1) on trouve $t = \frac{X}{V_3}$ $et\ en\ remplacant\ en\ (2) ou\ aura\ \ Y = \frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{X}{V_3}\right)^2$ ...(3) c'est l'équation décrivant l'allure du jet

Au point d'impact Y_0=0,35m et X_0=1,62m en remplaçant dans l'équation (3)

$$0{,}35 = \frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{1{,}62}{V_3}\right)^2 = \frac{1}{2}\ 9{,}81 \cdot \left(\frac{1{,}62}{V_3}\right)^2 \Rightarrow V_3 = \sqrt{\left(\frac{9{,}81 \cdot 1{,}62^2}{2 \cdot 0{,}35}\right)} = 6{,}065\ m/s$$

$$On\ sait\ que\ V_3 = C_v \cdot \sqrt{2gH} \Rightarrow C_v = \frac{V_3}{\sqrt{2gH}} = \frac{6{,}065}{\sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 2}} = 0{,}968 \approx \mathbf{0{,}97}$$

2., Le résservoir pivote au tour d'un axe 0 , et pour le maintenir horizontal, on dispose une masse M sur support (voir figure). Avec a=20cm et b=1,05m et M=3,92Kg. En déduire le coefficient de contraction C_C de l'orifice

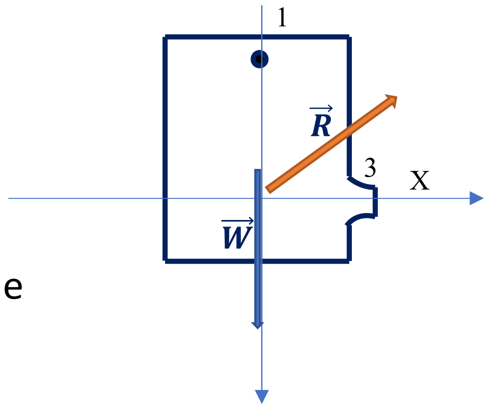


$$appliquons\ le\ thérème\ d'Euleur\ au\ volume\ délimité\ par\ les\ section\ (1) et\ (3)$$

$$\boxed{\sum \vec{F} = \rho \cdot Q \cdot (\vec{V}_F - \vec{V}_I)}$$

$$\overrightarrow{F_{p1}} + \overrightarrow{F_{p3}} + \vec{W} + \vec{R} = \rho \cdot Q \cdot (\vec{V}_3 - \vec{V}_1)$$

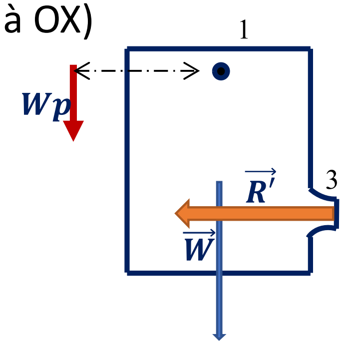
$$\overrightarrow{F_{p1}} = \overrightarrow{F_{p3}} = 0\ (P1 = P3 = Patm = 0$$



$\vec{W} + \vec{R} = \rho \cdot Q \cdot (\vec{V}_3 - 0)$ avec R c'est la réaction des parois sur le liquide donc R' sera l'action du liquide avec R=-R'

$Projection\ sur\ OX$: $R_x = \rho \cdot Q \cdot V_3$ donc $R'_x = -\rho \cdot Q \cdot V_3$ (c à d dans le sens opposé à OX)

$$R'_x = -\rho \cdot Q \cdot V_3 = -10^3 \cdot (\sigma \cdot V_3) \cdot V_3 = -10^3 \cdot (Cc \cdot s \cdot V_3) \cdot V_3$$



S étant la section de l'orifice $s = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}02^2}{4} = 3{,}14 \cdot 10^{-4}$

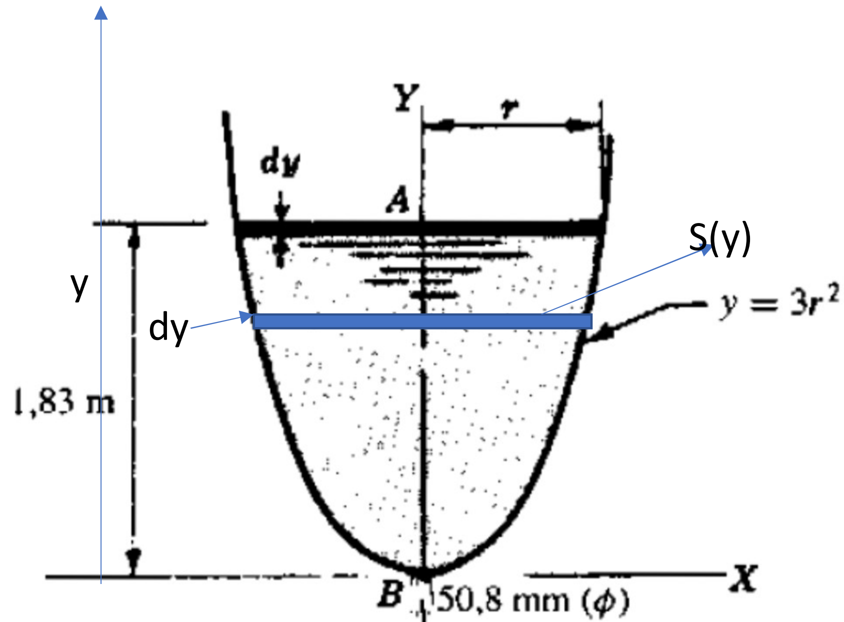
$$R'_x = -10^3 \cdot Cc \cdot s \cdot V_3^2 = -11{,}55 \cdot Cc$$

à $l'equilibre\ du\ systeme$ $\sum M = 0 \Rightarrow R' \cdot b - Wp \cdot a = 0 \Rightarrow R' \cdot b = Wp \cdot a \Rightarrow 11{,}55 Cc \cdot 1{,}05 = 3{,}92 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}2$

$$Cc = \frac{3{,}92 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}2}{11{,}55 \cdot 1{,}05} = 0{,}63$$

Exercice 9 :

Pour le réservoir représenté sur la figure en face en utilisant un coefficient de débit moyen de 0,65 pour l'orifice de 50,8 mm de diamètre, combien faudra-t-il de temps pour abaisser le niveau de 1 200 mm?
Quel est temps de vidange complète de ce réservoir?



Soit un élément d'écoulement de largeur (dy) le débit serait :

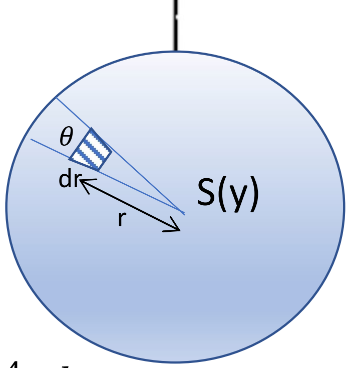
$$Q = Cd \cdot s \cdot \sqrt{2gy}$$

Pendant un temps « dt » le niveau baisse de (dy) et un volume dv est évacué , donc : $dv = Q \cdot dt = S(y) \cdot dy$

Puisque $dv = Q \cdot dt \Rightarrow dv = Cd \cdot s \cdot \sqrt{2gy} \cdot dt$......(1)

$de\ plus\ dv = S\,(y) \cdot dy$.....(2)

$$En\ coordonne\ polaires:\ S\,(y) = \iint r \cdot dr \cdot d\theta = \int_0^r \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) r \cdot dr = 2\pi \cdot \frac{r^2}{2}$$



$$\Rightarrow S\,(y) = \pi \cdot r^2$$

en remplaçant en (2) => $dv = S\,(y) \cdot dy = \pi r^2 \cdot dy$

$puisque\ y = 3r^3$ dy $= 9r^2\,dr$ donc $dv = 9 \cdot \pi \cdot r^4 \cdot dr$ .....(3)

$$(1) = (3) \Rightarrow Cd \cdot s \cdot \sqrt{2g\boldsymbol{y}} \cdot dt = 9 \cdot \pi \cdot r^4 \cdot dr \Leftrightarrow Cd \cdot s \cdot \sqrt{2g(3r^3)} \cdot dt = 9 \cdot \pi \cdot r^4 \cdot dr$$

$$Cd \cdot s \cdot \sqrt{6gr^3} \cdot dt = 9 \cdot \pi \cdot r^4 \cdot \mathrm{dr} \Leftrightarrow \mathrm{dt} = \frac{9 \cdot \pi \cdot r^4}{Cd \cdot s \cdot \sqrt{6gr^3}} \cdot \mathrm{dr} \Leftrightarrow dt = \frac{9 \cdot \pi}{Cd \cdot s \cdot \sqrt{6g}} \cdot \frac{r^4}{\sqrt{r^3}} = \frac{9 \cdot \pi}{Cd \cdot s \cdot \sqrt{6g}} \cdot \frac{r^4}{r^{3/2}}\mathrm{dr}$$

$$\Leftrightarrow dt = \frac{9\cdot\pi}{Cd\cdot s\cdot\sqrt{6g}} \cdot r^{5/2}\mathrm{dr}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{t1} dt = \frac{9\cdot\pi}{Cd\cdot s\cdot\sqrt{6g}} \cdot \int_{r0}^{r1} r^{5/2}\mathrm{dr} \qquad \Leftrightarrow t1 = \frac{9\cdot\pi}{Cd\cdot s\cdot\sqrt{6g}} \cdot \frac{1}{\frac{5}{2}+1}\, r^{\frac{5}{2}+1}\Big]_{r0}^{r1} \qquad \Leftrightarrow t1 = \frac{9\cdot\pi}{Cd\cdot s\cdot\sqrt{6g}} \cdot \frac{2}{7}\, r^{\frac{7}{2}}\Big]_{r0}^{r1}$$

$$les\ bornes\ d'integration\ r0\ et\ r1 \qquad y = 3r^3 \Rightarrow \mathrm{r} = \sqrt[3]{\frac{y}{3}}\ \text{donc}\ \mathrm{r0} = \sqrt[3]{\frac{1{,}83}{3}} = 0{,}85 \quad et\ r1 = \sqrt[3]{\frac{1{,}2}{3}} = 0{,}737 \approx 0{,}74$$

$$s = \frac{\pi r'^2}{4}$$

$$t1 = \frac{9\cdot\pi}{Cd\cdot s\cdot\sqrt{6g}} \cdot \frac{2}{7}\, r^{\frac{7}{2}}\Big]_{r0}^{r1}$$

2.5. Calcul de conduites simples

Une conduite de diamètre et de rugosité constante véhiculant un même débit sur toute sa longueur est appelée conduite simple.
Pour le calcule hydraulique d'un conduit nous disposons de deux équations:

A. L'équation de Bernoulli :

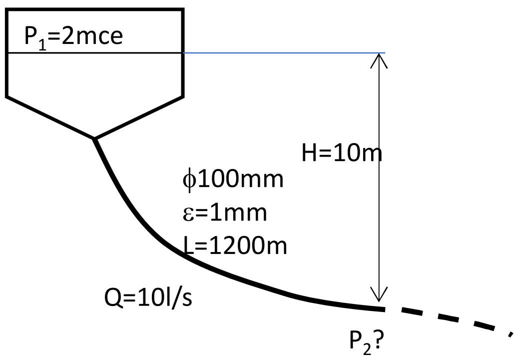
$$\frac{P_1}{\rho g} + z_1 + \alpha_1 \frac{{U_1}^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + z_2 + \alpha_2 \frac{{U_2}^2}{2g} + \Delta H_{12}$$

B. L'équation de continuité: $Q = Cst$

Les Trois Problèmes les plus courants sont

1) Pour une conduite donnée ou D, ε, L et Q donnés; Trouver la différence de cotes de ligne piézométrique:

$$\left(\frac{P_1}{\rho g} + z_1\right) - \left(\frac{P_2}{\rho g} + z_2\right) = \left(\frac{\lambda \cdot L}{D} + \sum_i \xi_i\right)\frac{V^2}{2g}$$



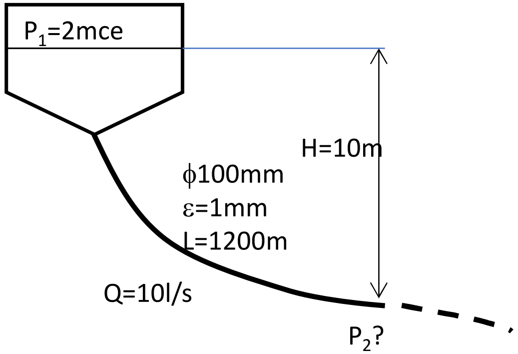
D'où on peut trouvez une pression P, exp: P_2 pour P_1, z_1 et z_2 donnés

Exercice 10 :

$$\frac{\mathbf{P_1}}{\rho g}+z_1+\cancel{\frac{V_1^{\,2}}{2g}}=\frac{\mathbf{P_2}}{\rho g}+z_2+\frac{V_2^{\,2}}{2g}+\Delta H_{12}$$

$$\frac{\mathbf{P_2}}{\rho g}=\frac{\mathbf{P_1}}{\rho g}+(z_1-z_2)-\frac{V_2^{\,2}}{2g}-\Delta H_{12}$$

$$\Rightarrow\frac{\mathbf{P_2}}{\rho g}=\frac{\mathbf{P_1}}{\rho g}+H-\frac{V_2^{\,2}}{2g}-\Delta H_{12}$$



$$avec\ V_2=\frac{4Q}{\pi\cdot D^2}=\frac{4\cdot 10\cdot 10^{-3}}{3{,}14\cdot 0{,}1^2}=1{,}27m/s$$

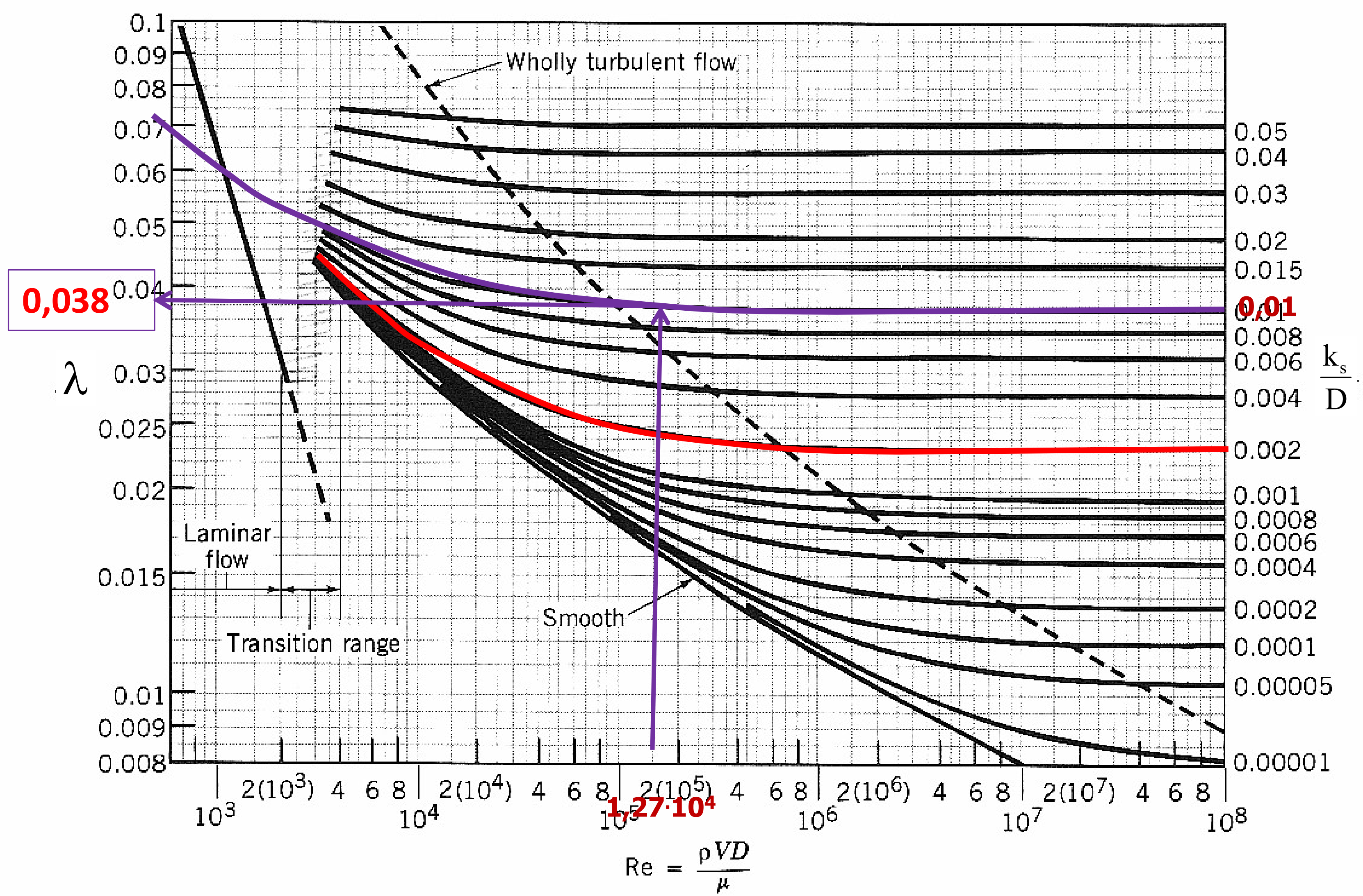
$$R_e=\rho\frac{VD}{\mu}=\frac{VD}{\nu}=\frac{1{,}27\cdot 0{,}1}{10^{-6}}=1{,}27\cdot 10^5\ \text{(régime turbulent)}$$

$$\frac{\varepsilon}{D}=0{,}01$$

de la courbe de MOODy on trouve $\lambda=0{,}038$

$$\Rightarrow\frac{\mathbf{P_2}}{\rho g}=\mathbf{2+10}-\frac{\mathbf{1,27^2}}{\mathbf{2g}}-0{,}038\frac{1200\cdot}{0{,}1}\frac{1{,}27^2}{2\cdot 9{,}81}$$

Diagramme de Moody

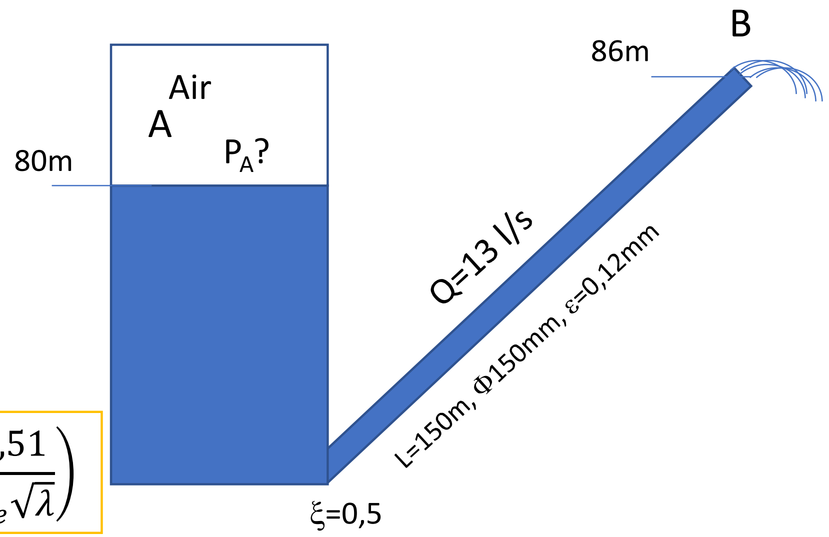


Exercices 11

Pour le système hydraulique en face déterminer la pression l'air $P_{A,}$ et tracer la ligne de charge la ligne piezometrique

On donne: $\rho = 0{,}84 \frac{kg}{m^3}$,

$\upsilon = 2{,}1 \cdot 10^{-6}\, m^2/s$



$$\boxed{R_e = \rho \frac{VD}{\mu} = \frac{VD}{\nu}}$$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log\left(\frac{\varepsilon}{3{,}7D} + \frac{2{,}51}{R_e\sqrt{\lambda}}\right)}$$

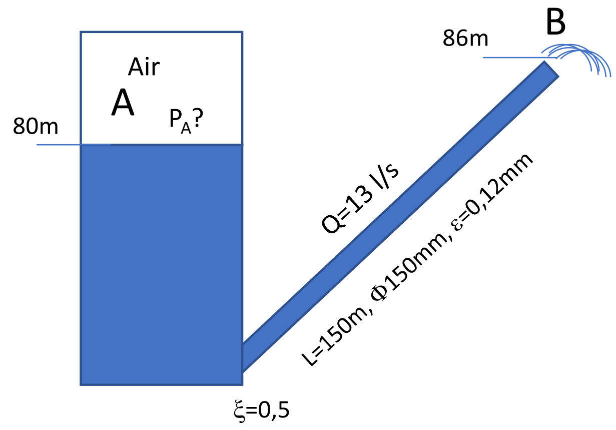
$$\frac{\mathbf{P}_A}{\rho g} + z_A + \cancel{\frac{V_A{}^2}{2g}} = \cancel{\frac{\mathbf{P}_B}{\rho g}} + z_B + \frac{V_B{}^2}{2g} + \Delta H_{AB}$$

$\mathbf{P}_A$??? et $\mathbf{P}_B = \mathbf{P}_{atm}$ $\qquad$ $V_A = 0$ (*reservoir* à *grandes dimmensions*)

$$V_B = V = \frac{4Q}{\pi D^2} = \frac{4 \cdot 13 \cdot 10^{-3}}{3{,}14 \cdot 0{,}15^2} = 0{,}736 m/s$$

$$\frac{\mathbf{P}_A}{\rho g} + z_A = z_B + \frac{V^2}{2g} + \Delta H_{AB}$$

$$\Delta H_{AB} = \left(\frac{\lambda \cdot L}{D} + \xi\right)\frac{V^2}{2g}$$



$$R_e = \frac{VD}{\nu} = \frac{0{,}736 \cdot 0{,}15}{2{,}1 \cdot 10^{-6}} = 52571{,}43 > 2000 \longrightarrow \quad \textit{Régime turbulent}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log\left(\frac{\varepsilon}{3{,}7D} + \frac{2{,}51}{R_e\sqrt{\lambda}}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log\left(\frac{0{,}12}{3{,}7 \cdot 150} + \frac{2{,}51}{52571{,}43\sqrt{0{,}02}}\right)$$

→ λ_0=0,02 -> λ_1=0,0235 -> λ_2=0,0235

λ=0,0235

$$\Delta H_{AB} = \left(\frac{0{,}0235 \cdot 150}{0{,}15} + 0{,}5\right)\frac{0{,}736^2}{2 \cdot 9{,}81} =$$

$$\frac{\mathbf{P}_A}{\rho g} = z_B - z_A + \frac{V^2}{2g} + \Delta H_{AB}$$

P_A=26,35Kpa

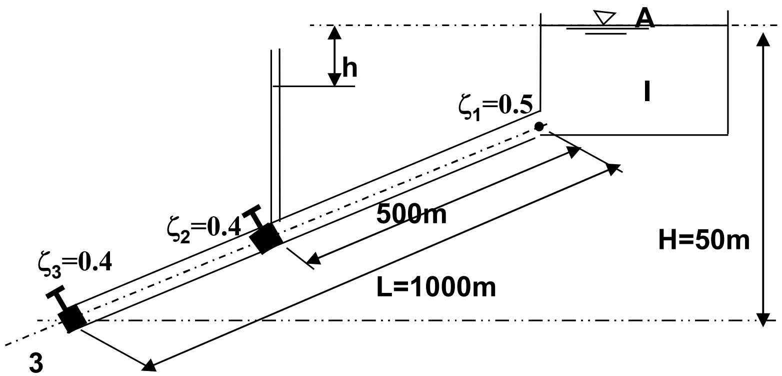
Exercice 12 :

Soit une conduite de 200mm de diamètre, de rugosité absolue ε=0.12mm et de 1000m de longueur, reliant un réservoir de grandes dimensions (I) et une fontaine publique, équipé d'une vanne à une distance de 500m du réservoir I et d'un robinet de fontaine (figure ci-après)

1. Déterminer le débit de cette conduite.
2. Tracer la ligne de charge et la ligne piézométrique
3. Déterminer la hauteur **h** (hauteur entre la surface libre de l'eau dans le réservoir I et le niveau d'eau dans le piézomètre situé juste avant la vanne)

Formule de COLEBROOK:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot Log\left(\frac{2.51}{R_e \cdot \sqrt{\lambda}} + \frac{\varepsilon}{3.7 \cdot D}\right)$$

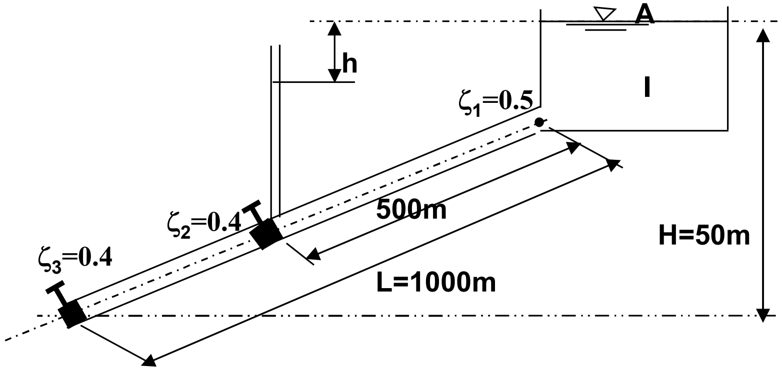


$$\frac{\mathbf{P}_A}{\rho g} + \frac{V_A{}^2}{2g} + z_A = z_3 + \frac{V_3{}^2}{2g} + \Delta H_{A3}$$

$$\mathbf{P}_A = Patm = o$$

$$V_A \approx 0 \; reservoir \text{ à } grandes\ dimensions$$

$$z_A = z_3 + \frac{V_3{}^2}{2g} + \Delta H_{A3}$$



$$\Delta H_{A3} = \left(\frac{\lambda \cdot L}{D} + \sum \xi\right)\frac{V^2}{2g}$$

$$\Delta H_{A3} = \left(\frac{\lambda \cdot L}{D} + 0,5 + 0,4 + 0,4\right)\frac{V^2}{2g}$$

$$\Delta H_{A3} = \left(\frac{\lambda \cdot 1000}{0,2} + 1,3\right)\frac{V^2}{2g}$$

$$\Delta H_{A3} = (5000 \cdot \lambda + 1,3)\frac{V^2}{2g}$$

Formule de COLEBROOK:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot Log\left(\frac{2.51}{R_e \cdot \sqrt{\lambda}} + \frac{\varepsilon}{3.7 \cdot D}\right)$$

$$z_A - z_3 = \frac{V^2}{2g} + (5000 \cdot \lambda + 1,3)\frac{V^2}{2g} = (5000 \cdot \lambda + 2,3)\frac{V^2}{2g}$$

$$(5000 \cdot \lambda + 2,3)\frac{V^2}{2 \cdot 9,81} = 50 \Longrightarrow V^2 = 5,1 \cdot \lambda + 0,002$$

$$\lambda_0 = 0,02 \ \rightarrow V_0 = 0,322 m/s \qquad \frac{\varepsilon}{D} = 0,006 \qquad \rightarrow \lambda_1 = 0,022 \ \rightarrow V_1 = 0,338 m/s$$

$$R_e = \frac{0,322 \cdot 0,2}{10^{-6}} = 64400$$

$$\rightarrow \boldsymbol{\lambda_1} = 0{,}022 \ \rightarrow \boldsymbol{V_1 = 0,338 m/s} \qquad \frac{\varepsilon}{D} = 0{,}006 \qquad \boldsymbol{\lambda_2} = 0{,}022 \ \rightarrow \boldsymbol{V_2 = 0,338 m/s}$$

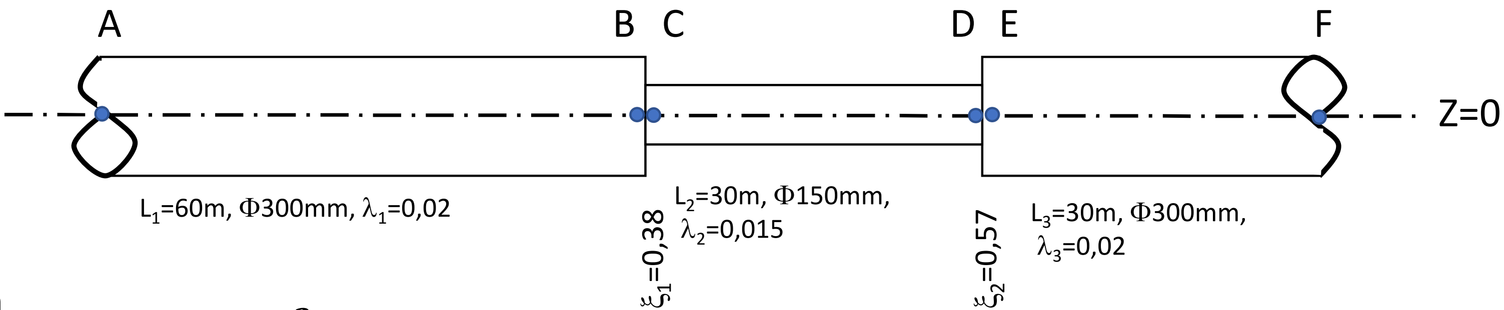
$$R_e = \frac{0{,}338 \cdot 0{,}2}{10^{-6}} = 67600$$

$\boldsymbol{V_1 = V_2}$ ***On arrete les itération et*** $\boldsymbol{V = 0,338}$m/s

$$Q = V \cdot S = V \cdot \frac{\pi D^2}{4} = 0{,}338 \cdot \frac{3{,}14 \cdot 0{,}2^2}{4} = 0{,}0106 \, \frac{m^3}{s} = 10,6 l/s$$

Exercice 13 :

Soit un système de conduites en série, transportant de l'eau . Si P_A= 60mce et V_A=2,41m/s.
Tracer la ligne de charge et la piézométrique de ce système



Solution

$$Q = V \cdot \frac{\pi \cdot D^2}{4} = 0,17\frac{m^3}{s} \Rightarrow V = \frac{4Q}{\pi \cdot D^2} \Rightarrow V_2 = \frac{4 \cdot 0,17}{3,14 \cdot 0,15^2} = 9,62m/s$$

		ΔH (mce)
A-B	L	1,184
B-C	S	1,800
C-D	L	14,209
D-E	S	2,700
E-F	L	0,592

	Pression $\frac{P}{\rho g}$	Cote piezo $\frac{P}{\rho g} + z$	V	$\frac{V^2}{2g}$	Charge hyd $\frac{P}{\rho g} + z + \frac{V^2}{2g}$
A	60	**60**	2,41	0,296	**60,296**
B	58,816	**58,816**	2,41	0,296	**59,112**
C	52,576	**52,576**	9,64	4,736	**57,312**
D	38,366	**38,366**	9,64	4,736	**43,103**
E	40,107	**40,107**	2,41	0,296	**40,403**
F	39,515	**39,515**	2,41	0,296	**39,811**

Une fois les vitesse et le pertes de charges calculé on procède au calcul des charge Hydrauliques

$$H_A = HB + \Delta HAB \Rightarrow H_B = HA + \Delta HAB$$

$$H_B = HC + \Delta HBC \Rightarrow H_C = HB + \Delta HBC$$

$$H_C = HD + \Delta HCD \Rightarrow H_D = HC + \Delta HCD$$

$$H_D = HE + \Delta HD_{\mathrm{E}} \Rightarrow H_E = HD + \Delta HDE$$

$$H_E = HF + \Delta H_{\mathrm{EF}} \Rightarrow H_F = HE + \Delta HEF$$

Apres le calcul des charges hydrauliques on calcul les hauteurs piézométrique avec:

$$(H_{piézo})_i = H_i - \frac{V_i^2}{\boldsymbol{2g}}$$

Equation de Bernoulli entre A et B

$$\frac{\mathrm{P}_A}{\rho g}+\cancel{\frac{V_A{}^2}{2g}}+\cancel{z_A}=\frac{\mathrm{P}_B}{\rho g}+\cancel{z_B}+\cancel{\frac{V_B{}^2}{2g}}+\Delta H_{AB}$$

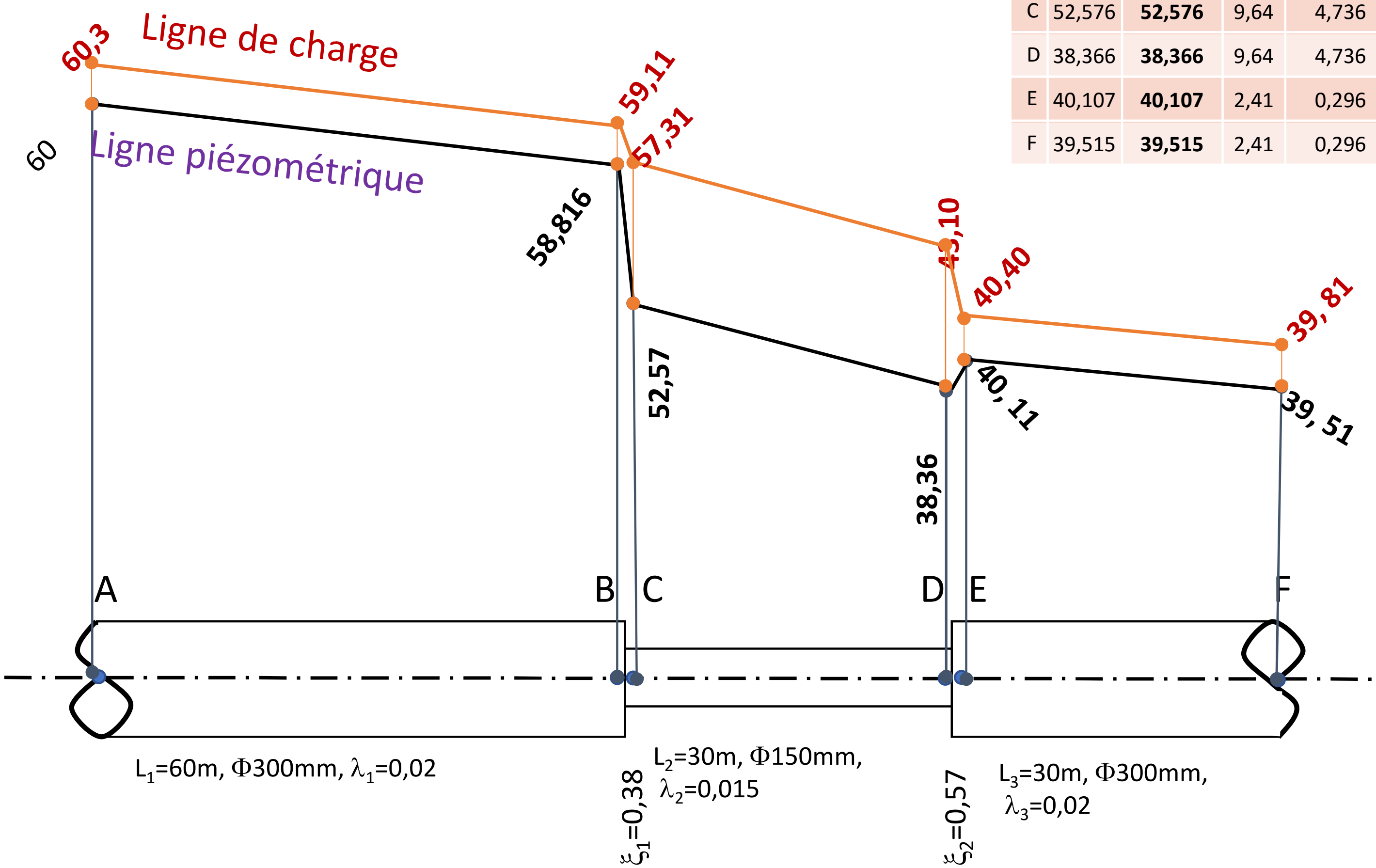
$$\frac{\mathrm{P}_B}{\rho g}=\frac{\mathrm{P}_A}{\rho g}-\Delta H_{AB}=60-1,184=58,816mce$$

Equation de Bernoulli entre B et C

$$\frac{\mathrm{P}_B}{\rho g}+\frac{V_B{}^2}{2g}+z_B=\frac{\mathrm{P}_C}{\rho g}+z_C+\frac{V_C{}^2}{2g}+\Delta H_{BC}$$

$$\frac{\mathrm{P}_C}{\rho g}=\frac{\mathrm{P}_B}{\rho g}+\frac{VB^2-VC^2}{2g}-\Delta H_{BC}=58,816+0,296-4,736-1,8=52,57mce$$

	Pression $\frac{P}{\rho g}$	Cote piezo $\frac{P}{\rho g}+z$	V	$\frac{V^2}{2g}$	Charge hyd $\frac{P}{\rho g}+z+\frac{V^2}{2g}$
A	60	**60**	2,41	0,296	**60,296**
B	58,816	**58,816**	2,41	0,296	**59,112**
C	52,576	**52,576**	9,64	4,736	**57,312**
D	38,366	**38,366**	9,64	4,736	**43,103**
E	40,107	**40,107**	2,41	0,296	**40,403**
F	39,515	**39,515**	2,41	0,296	**39,811**



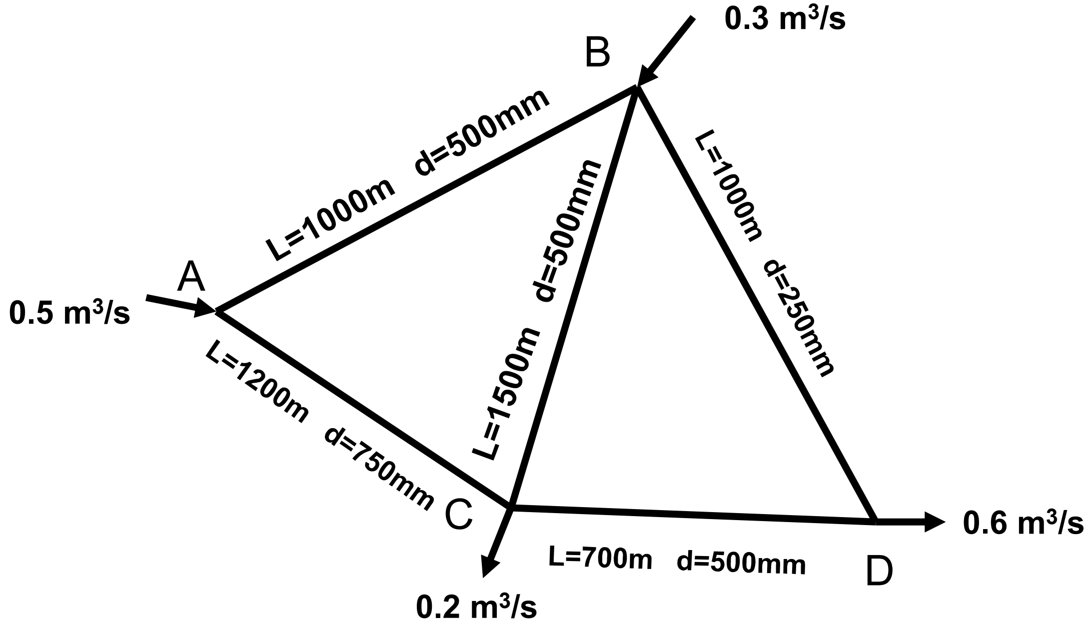
Exercise 14

Dans la planification de la distribution d'eau, l'eau doit s'écouler dans le système de réseau de canalisations illustré dans la figure. L'élévation du point A par rapport au niveau de la mer est de 61 m et la hauteur de pression à ce point est de 45,72 m tandis que l'élévation du point D est de 30,5 m.
Déterminer;

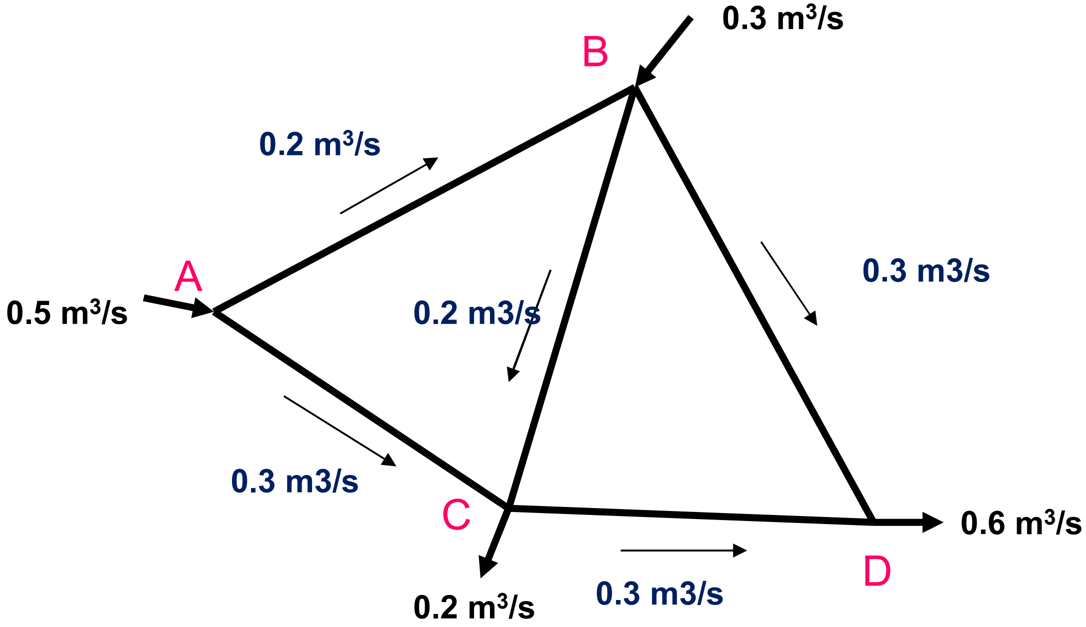
a. Le débit de chaque conduite

b. Pression en tête au point D

Supposons un facteur de frottement, λ = 0,01 pour tous les tuyaux.

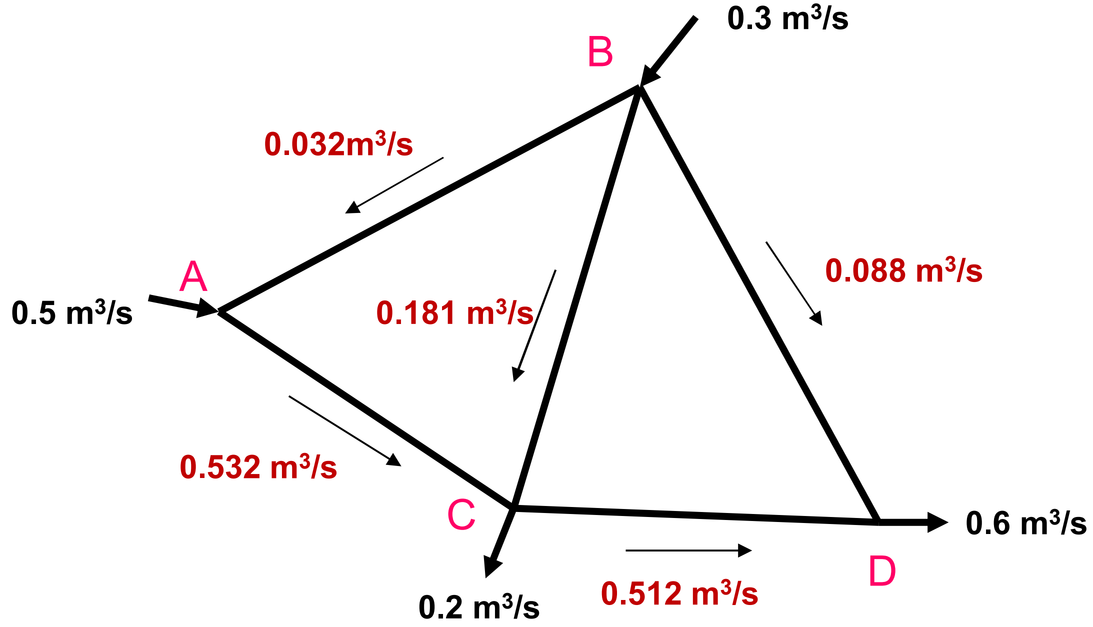


Solution



N° TR	R	Q	RQ^2	2RQ	N° TR	R	Q	RQ^2	2RQ
AB	**26,667**	0,200	1,0666	10,666	**BD**	**853,333**	0,300	76,8	512
AC	**4,214**	-0,300	-0,379	2,528	**CD**	**18,667**	-0,300	-1,68	11,2
BC*	**40**	0,200	1,6	16	**BC***	**40**	-0,200	-1,6	16
		Σ	2,287	29,195			Σ	73,52	539,2
	ΔQI	-0,08				ΔQII	-0,14		
AB	**26,667**	0,122	0,39	6,49	**BD**	**853,333**	0,164	22,85	279,30
AC	**4,214**	-0,378	-0,60	3,19	**CD**	**18,667**	-0,436	-3,55	16,29
BC*	**40**	0,258	2,66	20,64	**BC***	**40**	-0,258	-2,66	20,64
		Σ	2,45	30,32			Σ	16,64	316,23
	ΔQI	-0,08				ΔQII	-0,05		
AB	**26,667**	0,041	0,04	2,17	**BD**	**853,333**	0,1110	10,52	189,51
AC	**4,214**	-0,459	-0,89	3,87	**CD**	**18,667**	-0,4890	-4,46	18,25
BC*	**40**	0,230	2,11	18,37	**BC***	**40**	-0,2297	-2,11	18,37
		Σ	1,27	24,42			Σ	3,95	226,14
	ΔQI	-0,05				ΔQII	-0,02		
AB	**26,667**	-0,011	0,00	0,59	**BD**	**853,333**	0,094	7,47	159,71
AC	**4,214**	-0,511	-1,10	4,31	**CD**	**18,667**	-0,506	-4,79	18,91
BC*	**40**	0,195	1,53	15,62	**BC***	**40**	-0,195	-1,53	15,62
		Σ	**0,42**	**20,53**			Σ	**1,16**	**194,24**
	ΔQI	-0,02				ΔQII	-0,01		
AB	**26,667**	-0,032	-0,03	1,69	**BD**	**853,333**	0,088	6,55	149,52
AC	**4,214**	-0,532	-1,19	4,48	**CD**	**18,667**	-0,512	-4,90	19,13
BC*	**40**	0,181	1,31	14,46	**BC***	**40**	-0,181	-1,31	14,46
		Σ	0,09	20,63			Σ	0,34	183,11
	ΔQI	0,00				ΔQII	0,00		

Answer



0.3 m³/s
B
0.032m³/s
0.088 m³/s
A
0.5 m³/s
0.181 m³/s
0.532 m³/s
C
0.6 m³/s
D
0.2 m³/s
0.512 m³/s

Exercice 15 :

Une pompe refoule un débit d'eau de 0,5 m^3/s, les diamètres des conduites de refoulement et d'aspiration sont 350 mm et 400 mm respectivement et $\varepsilon = 3,5mm$. La lecture de la pression exercée en refoulement à l'hauteur de l'axe de la pompe est de P_r=125 KN/m^2 et sur le manomètre situé à l'aspiration à de l'axe de la pompe est de P_a=10 KN/m^2.

Déterminer :

a. la hauteur manométrique totale de la pompe à l'aide de l'équation de Bernoulli.

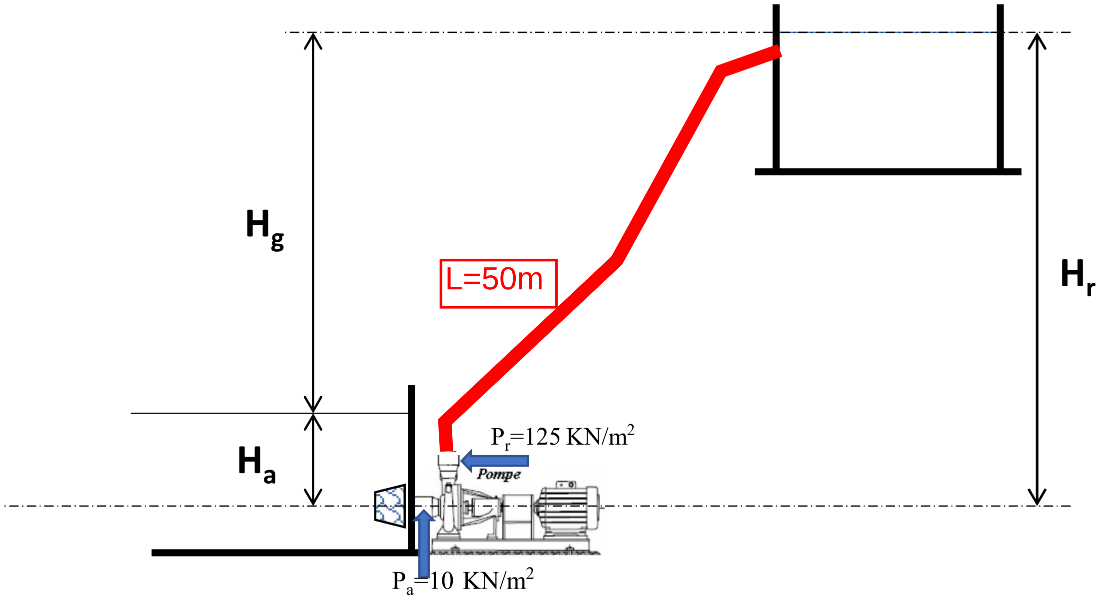
b. La puissance absorbée par la pompe si son rendement est de 75%

c. Déterminer la hauteur de refoulement Hr

On donne :

$g = 9,81\ m.s^{-2}$; $\rho_{eau} = 1000\ Kg/m^3$

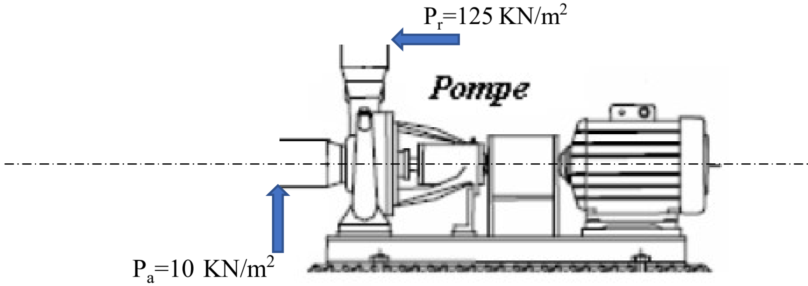
Solution EX 15:



a. Prenons comme point de référence l'axe de la pompe, si pour ce cas nous utiliserons

l'équation de Bernoulli entre l'entrée et la sortie de la pompe :

$$\frac{P_a}{\rho g}+\frac{V_a^2}{2g}+z_a=\frac{P_r}{\rho g}+\frac{V_r^2}{2g}+z_r+\sum_i \Delta H_i - H_p \quad \text{.....................(1)}$$



$$z_a = z_r = 0 \qquad\qquad \sum_i \Delta H_i \approx 0$$

La lecture de la pression exercée en refoulement est effectuée sur l'axe de la pompe, donc : $\boldsymbol{Z_r = 0}$ est P_r=125KN/m² =125KPa

$$\frac{P_r}{\rho\, g}=\frac{125\cdot 10^3}{10^3\cdot 9{,}81}=\boldsymbol{12{,}74\,m}$$

Pour l'aspiration, la pression mesuré à $\boldsymbol{Z_a = 0}$ au dessous de l'axe de la pompe est P_a=10KN/m²

$$\frac{P_a}{\rho\, g}=\frac{10\cdot 10^3}{9{,}81\cdot 10^3}=\boldsymbol{1{,}02\,m}$$

$$\frac{P_a}{\rho g}+\frac{V_a^2}{2g}=\frac{P_r}{\rho g}+\frac{V_r^2}{2g}-H_p \quad \text{..................... (2)}$$

Les vitesses d'écoulement $\quad Q = V_1\cdot S_1 = V_2\cdot S_2 \;\Rightarrow\; Q = V_1\cdot\frac{\pi\cdot D_1^2}{4} = V_2\cdot\frac{\pi\cdot D_2^2}{4} \quad avec\ V_1 = Va\ et\ V_2 = Vr$

$$V_1=\frac{4Q}{\pi\cdot D_1^2}=\frac{4\cdot 0{,}5}{3{,}14\cdot 0{,}4^2}=3{,}98\ \mathrm{m/s} \qquad \text{et} \qquad V_2=\frac{4Q}{\pi\cdot D_2^2}=5{,}2\mathrm{m/s}$$

$$\frac{V_1^2}{2g}=\frac{3{,}98^2}{2\cdot 9{,}81}=0{,}81\ mce \qquad\qquad \frac{V_2^2}{2g}=\frac{5{,}2^2}{2\cdot 9{,}81}=1{,}38\ mce$$

$$\frac{P_a}{\rho g}+\frac{V_a^2}{2g}=\frac{P_r}{\rho g}+\frac{V_r^2}{2g}-H_P \Rightarrow H_P=\frac{P_r}{\rho g}-\frac{P_a}{\rho g}+\frac{V_r^2}{2g}-\frac{V_a^2}{2g}$$

$$H_P=\mathrm{HMT}=12{,}74-1{,}02+1{,}38-0{,}81=12{,}29mce \qquad H_P=\text{Hauteur Manometrique Total de lapompe}$$

La puissance fournie par la pompe au liquide (puissance nette)

$$P_{net}=\rho\cdot g\cdot H_P\cdot Q=10^3\cdot 9{,}81\cdot 12{,}29\cdot 0{,}5=60{,}28\cdot 10^3\ Wat=60{,}28KWat$$

La puissance consommée par la pompe (fournie par le moteur) $\quad P_P=\dfrac{P_{net}}{\eta}=\dfrac{60{,}28}{0{,}75}=107{,}17\ \mathrm{KWat}$

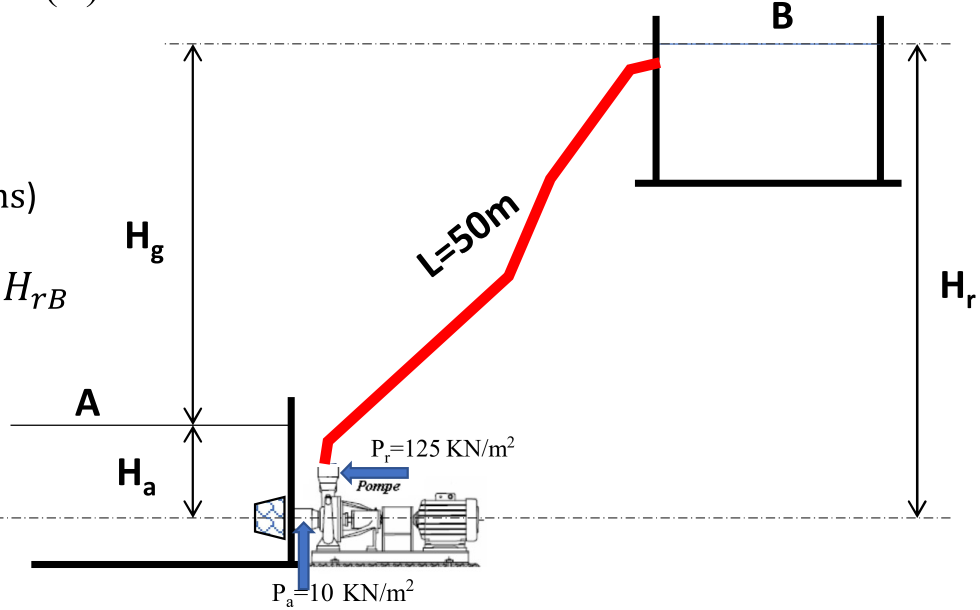
l'équation de Bernoulli entre la sortie de la pompe « r » et la section(B) :

$$\frac{P_r}{\rho g}+\frac{V_r^2}{2g}+z_r=\frac{P_B}{\rho g}+\frac{V_B^2}{2g}+z_B+\sum_i \Delta H_{rB}$$

$\dfrac{P_B}{\rho g}=\mathrm{Patm}=0\ (\text{relative}),\ \mathrm{VB}=0\ (\text{reservoir à grandes dimmensions})$

$$\Rightarrow \frac{P_r}{\rho g}+\frac{V_r^2}{2g}+z_r=z_B+\sum_i \Delta H_{rB} \Rightarrow z_B-z_r=\mathrm{Hr}=\frac{P_r}{\rho g}+\frac{V_r^2}{2g}-\Delta H_{rB}$$

$$\Delta \boldsymbol{H_{rB}}=\left(\frac{\boldsymbol{\lambda\cdot L}}{\boldsymbol{D}}\right)\frac{\boldsymbol{V_r^2}}{\boldsymbol{2g}}$$

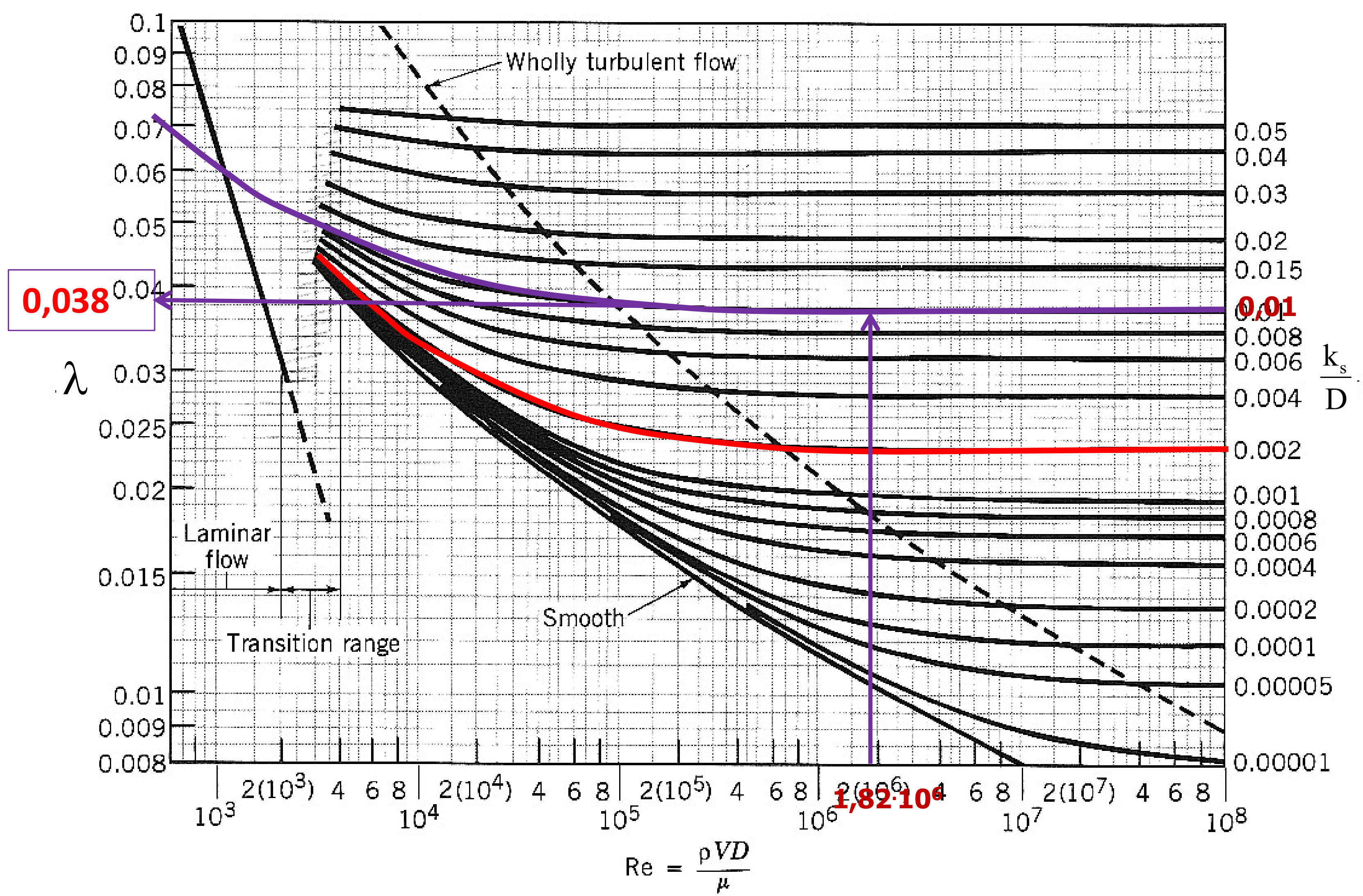


$$V_r=\frac{5{,}2\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \Rightarrow Re=\frac{VD}{\nu}=\frac{5{,}2\cdot 0{,}35}{10^{-6}}=1{,}82\cdot 10^6$$

$$\frac{\varepsilon}{D}=\frac{3{,}5}{350}=0{,}01$$

À partir de la courbe de Moody $\boldsymbol{\lambda}=0{,}038$

Diagramme de Moody



$$\Delta \boldsymbol{H_{rB}} = \left(\frac{\lambda \cdot L}{D}\right)\frac{V_r^2}{2g} = \left(\frac{0{,}038 \cdot 50}{0{,}35}\right)\frac{5{,}2^2}{2 \cdot 9{,}81} = \mathbf{7{,}48\ mce}$$

$$\Rightarrow z_B - z_r = \mathrm{Hr} = \frac{P_{\mathrm{r}}}{\rho g} + \frac{V_{\mathrm{r}}^2}{2g} - \Delta H_{rB}$$

$$\mathrm{Hr} = 12{,}74 + 1{,}38 - 7{,}48 = 6{,}64m$$

Exercice 16 : (venturi et tube de Pitot)

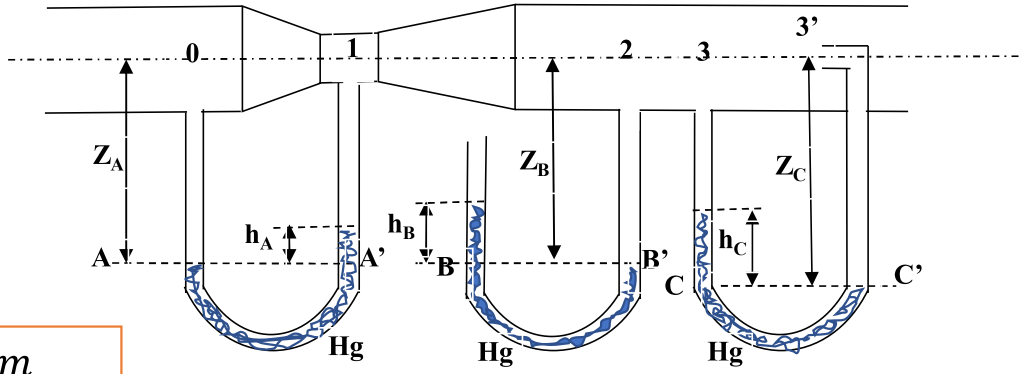
Soit le schéma hydraulique suivant : On donne : P_0=1,8 bar ; P_1=1,75 bar ; ρ_{Hg}=13600Kg/m^3; h_B=0,697m, D_0=0,2m, D_1=0,15m, D_2=D_3=0,2m,

Les pressions P_0 et P_1 sont des pressions absolues.

Déterminer : h_A, le débit Q, z_B, h_C,

Solution

AA' est une surface isobare



$$P_0 + \rho g z_A = P_1 + \rho g(z_A - h_A) + \rho_{Hg} g h_A$$

$$\Rightarrow P_0 = P_1 - \rho g h_A + \rho_{Hg} g h_A$$

$$\Rightarrow P_0 - P_1 = h_A g(\rho_{Hg} - \rho)$$

$$\Rightarrow h_A = \frac{P_0 - P_1}{g(\rho_{Hg} - \rho)} = \frac{1{,}8 \cdot 10^5 - 1{,}75 \cdot 10^5}{9{,}81(13{,}6 \cdot 10^3 - 10^3)}$$

$$= 0{,}04m = 40mm \qquad \boxed{\Rightarrow h_A = 0{,}04m = 40mm}$$

Equation de Bernoulli entre (0) et (1): $\frac{\mathbf{P_0}}{\boldsymbol{\rho g}} + \boldsymbol{z_0} + \frac{\boldsymbol{V_0}^2}{\mathbf{2g}} = \frac{\mathbf{P_1}}{\boldsymbol{\rho g}} + \boldsymbol{z_1} + \frac{\boldsymbol{V_1}^2}{\mathbf{2g}} + \boldsymbol{\Delta H_{12}} \Leftrightarrow \frac{\mathbf{P_0}}{\boldsymbol{\rho g}} + \frac{\boldsymbol{V_0}^2}{\mathbf{2g}} = \frac{\mathbf{P_1}}{\boldsymbol{\rho g}} + \frac{\boldsymbol{V_1}^2}{\mathbf{2g}}$

De l'équation de continuité : $Q = cst = V_0 \cdot S_0 = V_1 \cdot S_1 = V_2 \cdot S_2 = V_3 \cdot S_3 = V_{3'} \cdot S_{3'}$

$$V_0 = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D_0^2}; V_1 = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D_1^2}; V_2 = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D_2^2}; V_3 = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D_3^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathbf{P_0}}{\boldsymbol{\rho g}} + \frac{\left(\frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D_0^2}\right)^2}{\mathbf{2g}} = \frac{\mathbf{P_1}}{\boldsymbol{\rho g}} + \frac{\left(\frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D_1^2}\right)^2}{\mathbf{2g}} \Rightarrow \mathbf{P_1 - P_0} = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\mathbf{2}}\left(\frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D_0^2}\right)^2 - \frac{\boldsymbol{\rho}}{\mathbf{2}}\left(\frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D_1^2}\right)^2 = \frac{\mathbf{8}\boldsymbol{\rho Q^2}}{\boldsymbol{\pi^2}}\left(\frac{1}{D_0^4} - \frac{1}{D_1^4}\right)$$

$$\Rightarrow \mathbf{P_1} - \mathbf{P_0} = \frac{8\rho Q^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{D_0^4} - \frac{1}{D_1^4}\right) \Rightarrow Q^2 = \frac{\pi^2(\mathbf{P_1} - \mathbf{P_0})}{8\rho\left(\frac{1}{D_0^4} - \frac{1}{D_1^4}\right)}$$

$$\boxed{\Rightarrow Q = \sqrt{\frac{\pi^2(\mathbf{P_1} - \mathbf{P_0})}{8\rho\left(\frac{1}{D_0^4} - \frac{1}{D_1^4}\right)}} = 0,0675\ m^3/s}$$

Equation de Bernoulli entre (0) et (2): $\frac{\mathbf{P_0}}{\rho g} + z_1 + \frac{V_0{}^2}{2g} = \frac{\mathbf{P_0}}{\rho g} + z_2 + \frac{V_2{}^2}{2g} + \Delta H_{02} \Leftrightarrow \frac{\mathbf{P_0}}{\rho g} = \frac{\mathbf{P_2}}{\rho g}$

BB' est une surface isobare

$$P_{atm} + \rho_{Hg} g h_B = P_2 + \rho g\ _B \Rightarrow z_B = \frac{P_{atm} + \rho_{Hg} g h_B - P_2}{\rho g} = \frac{1{,}013 \cdot 10^5 + 13600 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}697 - 1{,}8 \cdot 10^5}{10^3 \cdot 9{,}81}$$

$$\boxed{\Rightarrow z_B = 1{,}457m}$$

Equation de Bernoulli entre (0) et (3): $\frac{\mathbf{P_0}}{\rho g} = \frac{\mathbf{P_3}}{\rho g}$

Equation de Bernoulli entre (0) et (3'): $\frac{\mathbf{P_0}}{\rho g} = \frac{\mathbf{P_{3'}}}{\rho g}$

$$\boxed{V_{3'} = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D_{3'}^2} = \frac{4 \cdot 0{,}0675}{\pi \cdot 0{,}2^2} = 2{,}15m/s}$$

À la section 3' nous avons un tube de Pitot qui mesure la pression dynamique $\mathrm{P}_{dyn} = \frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g}$

$$\boxed{\mathrm{P}_{dyn3\prime} = \mathbf{P_{3\prime}} + \frac{\boldsymbol{\rho V_{3\prime}}^{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}} = \mathbf{1,8 \cdot 10^5} + \frac{\mathbf{10^3 \cdot 2,15^2}}{\mathbf{2}} = \mathbf{1,823 \cdot 10^5}}$$

CC' est une surface isobare

$$P_3 + \rho g(Z_C - h_C) + \rho_{Hg} g h_C = \mathrm{P}_{dyn3\prime} + \rho g \quad _C$$

$$\Rightarrow P_3 - \rho g(h_C) + \rho_{Hg} g h_C = \mathrm{P}_{dyn3\prime}$$

$$\Rightarrow h_C = \frac{\mathrm{P}_{dyn3\prime} - P_3}{g(\rho_{Hg} - \rho)} = \frac{\mathbf{0,023 \cdot 10^5}}{9,81(13600 - 1000)} = 0,0186m = 18,6mm$$

$$\boxed{\Rightarrow h_C = 18,6mm}$$

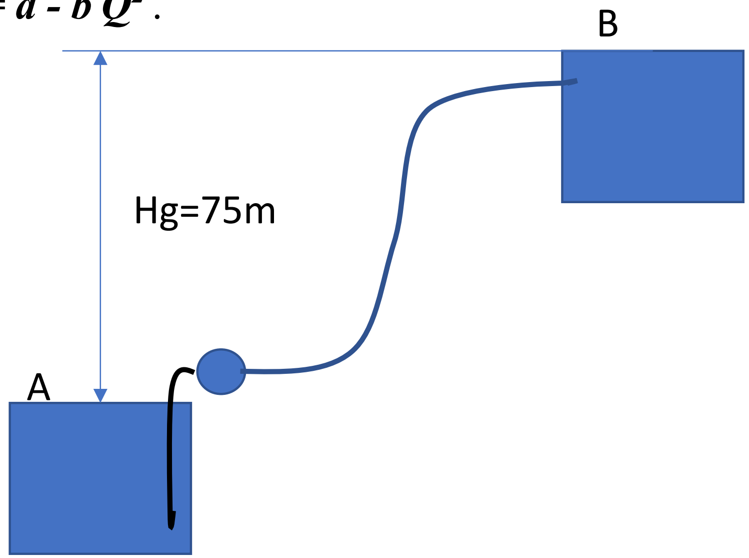
Exercice 17 :

Une pompe centrifuge, donnant 2500 l/min à une hauteur de 78 m et 1400 l/min à 110 m, refoule de l'eau à travers une conduite de fibre-ciment qui, pour le pompage 32 l/s donne une perte de charge de 10,6 m. la hauteur géométrique à soulever est de 75 m.

Calculer : a) la courbe caractéristique de la pompe en sa forme simplifiée $H_p = a - b\,Q^2$.

b) L'équation caractéristique de la conduite.

c)Point de fonctionnement.



Solution

a) courbe caractéristique de la pompe

La pompe donnant Q_1= 2500 l/min=41,66l/ à une hauteur de $H_{p1} = 78$ m

$\Leftrightarrow H_{p1} = 78 = a - b\ 41{,}66^2$ ....(1)

La pompe donnant Q_2= 1400 l/min=23,33l/ à une hauteur de $H_{p2} = 110$ m

$\Leftrightarrow H_{p2} = 110 = a - b\ 23{,}33^2$ ....(2)

$$(1) - (2) \Rightarrow (41{,}66^2 - 23{,}33^2)b = 78 - 110 \Leftrightarrow 1191{,}267 \cdot b = -32 \Rightarrow b = \frac{-32}{1191{,}2667} \approx 0{,}027$$

$$De\ H_{p1} = 78 = a - b\ 41{,}66^2 = a - 0{,}027 \cdot 41{,}66^2 \Rightarrow \mathbf{a = 78} + 0{,}027 \cdot \mathbf{41{,}662 = 124{,}86}$$

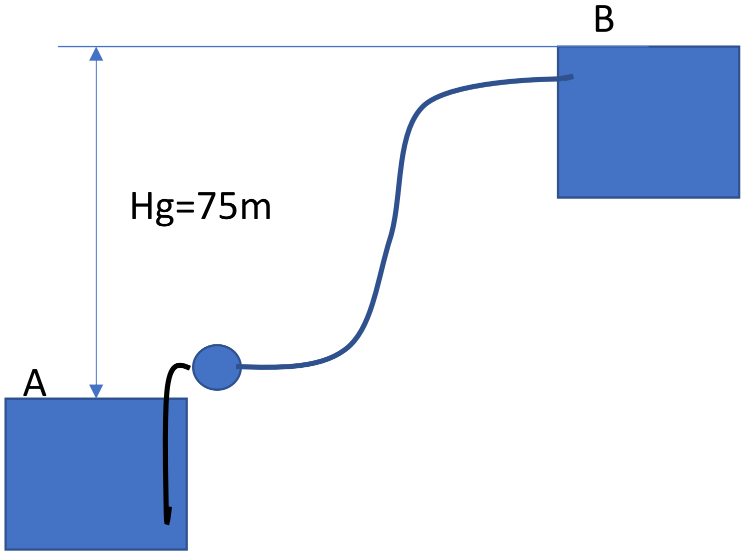
$$De\ H_{p2} = 110 = a - b\ 23{,}33^2 = a - 0{,}027 \cdot 23{,}33^2 \Rightarrow \mathbf{a = 110} + 0{,}027 \cdot 544{,}289 = \mathbf{124{,}7}$$

$$\Rightarrow \mathbf{a = amoy = 124{,}75}$$

la courbe caractéristique de la pompe sous sa forme simplifiée est $\boldsymbol{H_p = 124,75 - 0,027\,Q^2}$

b)L'équation caractéristique de la conduite

En appliquant le théorème de Bernoulli entre les points A et B:



$$\frac{P_A}{\rho g}+\frac{V_A^2}{2g}+z_A=\frac{P_B}{\rho g}+\frac{V_B^2}{2g}+z_B-H_p+\Delta H_{AB}$$

$$P_A=P_B=P_{Atm}=0;V_A=V_B\approx 0$$

$$z_A=z_B-H_p+\Delta H_{AB}$$

$$\Rightarrow H_p=z_B-z_A+\Delta H_{AB}\Rightarrow H_p=75+R\cdot Q^2$$

$$\Rightarrow H_p=\underbrace{75+R\cdot Q^2}$$

Caractéristique de la pompe Caractéristique de la conduite

$$\Delta H_{AB}=R\cdot Q^2\Rightarrow R=\frac{\Delta H_{AB}}{Q^2}$$

à $Q=32\frac{l}{s}$ on a $\Delta H_{AB}=10{,}6\text{m}\Rightarrow R=\frac{\Delta H_{AB}}{Q^2}=R=\frac{10{,}6}{32^2}=0{,}0103$

Caractéristique de la conduite $\Rightarrow H_C=75+0{,}0103\cdot Q^2$

c) Le point de fonctionnement $124{,}75-0{,}027\cdot Q^2=75+0{,}0103\cdot Q^2\Rightarrow$ $Q=\sqrt{\dfrac{49{,}75}{0{,}037}}=36{,}67\ l/s$

Le point de fonctionnement Q=36,67 et H=75m

Exercice 18 :

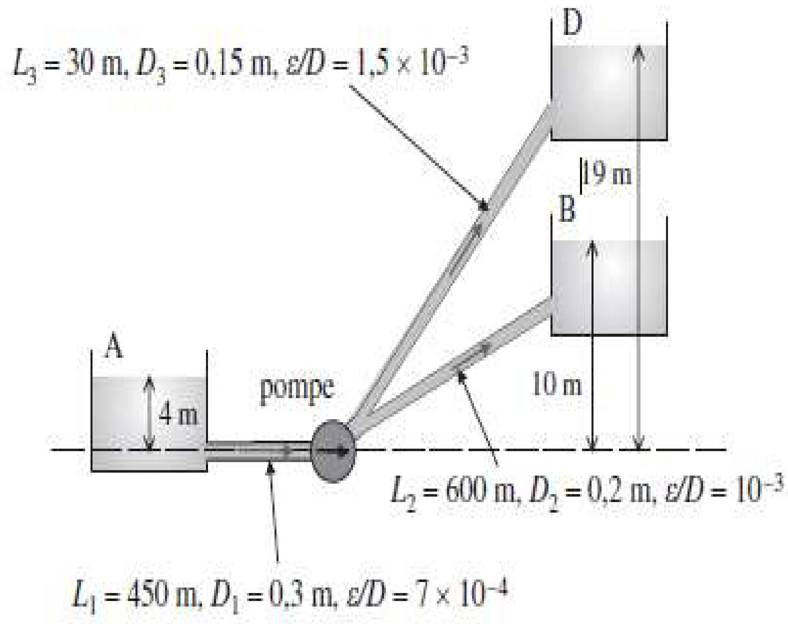
Pompe alimentant 2 réservoirs

Une pompe de rendement global η = 0,85 est utilisée pour transvaser de l'eau (ρ = 1000 kg/m3, ν = 10^{-6}ms) d'un réservoir A vers 2 réservoirs B et D. Les caractéristiques des conduits L_1, L_2 et L_3 sont indiquées sur la figure ci-dessous. On peut négliger les pertes de charge singulières. On veut assurer un débit Q_{v2} =115 l/s dans la conduite L_2.

1. Quelle est la nature de l'écoulement dans la conduite L_2 ? Justifier et calculer le coefficient de perte de charge λ_2.

2. Calculer le débit dans la conduite L_3. Faire les remarques qui s'imposent.

3. Calculer la charge fournie par la pompe et la puissance sur l'arbre.



Solution:

$$V_2 = \frac{4Q_2}{\pi D_2^2} = \frac{4 \cdot 115 \cdot 10^{-3}}{3{,}14 \cdot 0{,}2^2} = 3{,}66 m/s \qquad \Rightarrow Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{3{,}66 \cdot 0{,}2}{10^{-6}} = 0{,}73 \cdot 10^6 > 10^5 (\text{regime turbulent regueux})$$

En utilisant la formule de colebrook white $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log\left(\frac{\varepsilon}{3{,}7D} + \frac{2{,}51}{R_e\sqrt{\lambda}}\right)$ $\Rightarrow \lambda_{20} = 0{,}02;\ \lambda_{21} = 0{,}02$ donc $\boldsymbol{\lambda_2 = 0{,}02}$

La relation de *Karmann-Prandtl* $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log\left(\frac{\varepsilon}{3{,}7D}\right)$ donne $\lambda_2 = 0{,}0196 \approx 0{,}02$,.

$$\lambda = \left(\frac{1}{-2\log\left(\frac{\varepsilon}{3,7D} + \frac{2,51}{R_e\sqrt{\lambda}}\right)} \right)^2$$

$$\lambda 0 = 0,02 \Rightarrow \lambda 1 = \left(\frac{1}{-2\log\left(\frac{10^{-3}}{3,7} + \frac{2,51}{0,73 \cdot 10^6\sqrt{0,02}}\right)} \right)^2 = 0,02$$

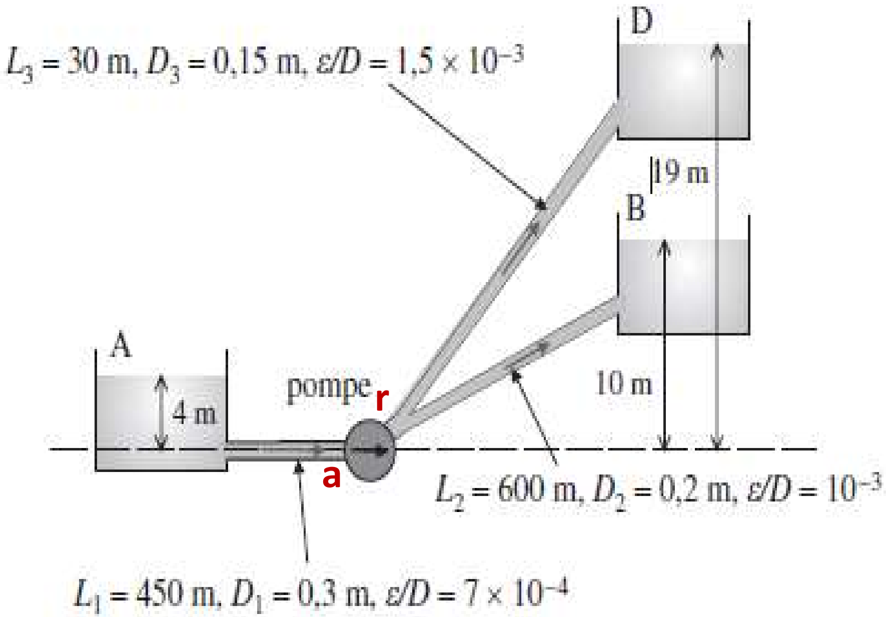
$\lambda 0 = \lambda 1 = 0,02$ donc $\lambda = 0,02$

2. On applique le théorème de Bernoulli entre la sortie de la pompe et la surface libre du réservoir B :

$$\frac{P_r}{\rho g}+\frac{V_r^2}{2g}+z_r=\frac{P_B}{\rho g}+\frac{V_B^2}{2g}+z_B+\Delta H_{rB}$$

$P_B=P_{atm}=0 \quad et \quad V_B\approx 0$ (réservoir à grandes dimensions)

$$\frac{P_r}{\rho g}+\frac{V_r^2}{2g}+z_r=z_B+\frac{\lambda_2 L_2}{D_2}\cdot\frac{V_2^2}{2g}\text{.......................(1)}$$



On applique le théorème de Bernoulli entre la sortie de la pompe et la surface libre du réservoir D :

$$\frac{P_r}{\rho g}+\frac{V_r^2}{2g}+z_r=\frac{P_D}{\rho g}+\frac{V_D^2}{2g}+z_D+\Delta H_{rD}$$

$P_D=P_{atm}=0 \quad et \quad V_D\approx 0$ (réservoir à grandes dimensions)

$$\frac{P_r}{\rho g}+\frac{V_r^2}{2g}+z_r=z_D+\frac{\lambda_3 L_3}{D_3}\cdot\frac{V_3^2}{2g}\text{.......................(2)}$$

$$(1)=(2)\Rightarrow z_B+\frac{\lambda_2 L_2}{D_2}\cdot\frac{V_2^2}{2g}=z_D+\frac{\lambda_3 L_3}{D_3}\cdot\frac{V_3^2}{2g}\Leftrightarrow V_3^2=\frac{2gD_3}{\lambda_3 L_3}\left(z_B-z_D+\frac{\lambda_2 L_2}{D_2}\cdot\frac{V_2^2}{2g}\right)$$

$$\Rightarrow V_3=\sqrt{\frac{2gD_3}{\lambda_3 L_3}\left(z_B-z_D+\frac{\lambda_2 L_2}{D_2}\cdot\frac{V_2^2}{2g}\right)}\Rightarrow V_3=\sqrt{\frac{2\cdot 9{,}81\cdot 0{,}15}{\lambda_3\cdot 30}\left(19-10+\frac{0{,}02\cdot 600}{0{,}2}\cdot\frac{3{,}66^2}{2\cdot 9{,}81}\right)}\Leftrightarrow\Rightarrow \mathbf{V_3}=\sqrt{\frac{\mathbf{4{,}90}}{\boldsymbol{\lambda_3}}}$$

Nous procéderons par itérations en utilisant la formule de colebrook pour le calcul de λ

$$\lambda_{30} = 0{,}02\ ;\ V_{31} = \sqrt{\frac{4{,}90}{0{,}02}} = 15{,}65 m/s; \quad Re = \frac{VD}{\nu} = 2347500 \Rightarrow \lambda_{31} = 0{,}0218; V_{31} = 15\frac{m}{s};$$

$$Re = 2250000; \Rightarrow \lambda_{32} = 0{,}0218; V_{32} = 15\frac{m}{s}$$

$$Donc\ V_3 = 15\frac{m}{s} \Rightarrow Q_3 = V_3 \cdot \frac{\pi D_3}{4} = 15 \cdot \frac{3{,}14 \cdot 0{,}15^2}{4} = \mathbf{0{,}265\frac{m^3}{s} = 265 l/s}$$

Ou bien Nous procéderons en utilisant la formule de *Karmann-Prandtl* $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log\left(\frac{\varepsilon}{3{,}7D}\right)$ pour le calcul de λ

$\Rightarrow \lambda_3 = 0{,}0217\ ;\ V_3 = \sqrt{\frac{4{,}90}{0{,}0217}} = 15{,}00 m/s; Donc\ V_3 = 15\frac{m}{s} \Rightarrow Q_3 = V_3 \cdot \frac{\pi D_3}{4} = 15 \cdot \frac{3{,}14 \cdot 0{,}15^2}{4} = \mathbf{0{,}265\frac{m^3}{s} = 265 l/s}$

Ce débit est plus que le double de celui dans L_2 pour un plus petit diamètre. Les pertes de charge sont beaucoup plus importantes dans L_2 que dans L_3 (car $L_2 >> L_3$).

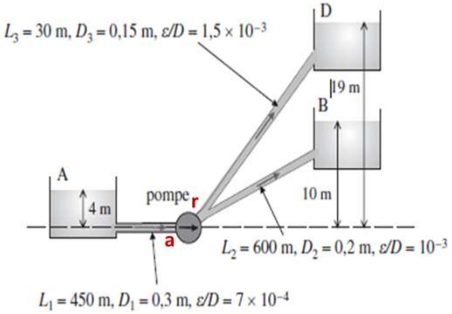
3. La puissance de la pompe et la puissance sur l'arbre

Le débit dans L_1 est : $Q_1 = Q_2 + Q_3 = 0{,}38 m^3/s$. Donc la vitesse du fluide est : $V_1 = \frac{4Q_1}{\pi D_1^2} = 5{,}379$m/s. Ceci conduit à un nombre de Reynolds : Re= 1613588,11 , . L'écoulement est turbulent rugueux

En utilisant la formule de colebrook white $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log\left(\frac{\varepsilon}{3{,}7D} + \frac{2{,}51}{R_e\sqrt{\lambda}}\right) \Rightarrow \lambda_{10} = 0{,}02;\ \lambda_{11} = 0{,}0183;\ ;\ \lambda_{12} = 0{,}0183$ donc $\boldsymbol{\lambda_1 = 0{,}0183}$

La relation de *Karmann-Prandtl* $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log\left(\frac{\varepsilon}{3{,}7D}\right)$ donne $\lambda_1 = 0{,}018$,.

En appliquant le théorème de Bernoulli entre les points A et B:



$$\frac{P_A}{\rho g}+\frac{V_A^2}{2g}+z_A=\frac{P_B}{\rho g}+\frac{V_B^2}{2g}+z_B-H_p+\Delta H_{AB}$$

$$P_A=P_B=P_{Atm}=0;V_A=V_B\approx 0$$

$$z_A=z_B-H_p+\Delta H_{AB}\Rightarrow H_p=z_B-z_A+\Delta H_{Aa}+\Delta H_{rB}=$$

$$\Rightarrow\ H_p=z_B-z_A+\frac{\lambda_1 L_1}{D_1}\cdot\frac{V_1^2}{2g}+\frac{\lambda_3 L_3}{D_3}\cdot\frac{V_3^2}{2g}=19-4+\frac{0{,}0183\cdot 450}{0{,}3}\cdot\frac{5{,}379^2}{2\cdot 9{,}81}+\frac{0{,}0218\cdot 30}{0{,}15}\cdot\frac{15^2}{2\cdot 9{,}81}$$
$$=105{,}48\text{m}$$

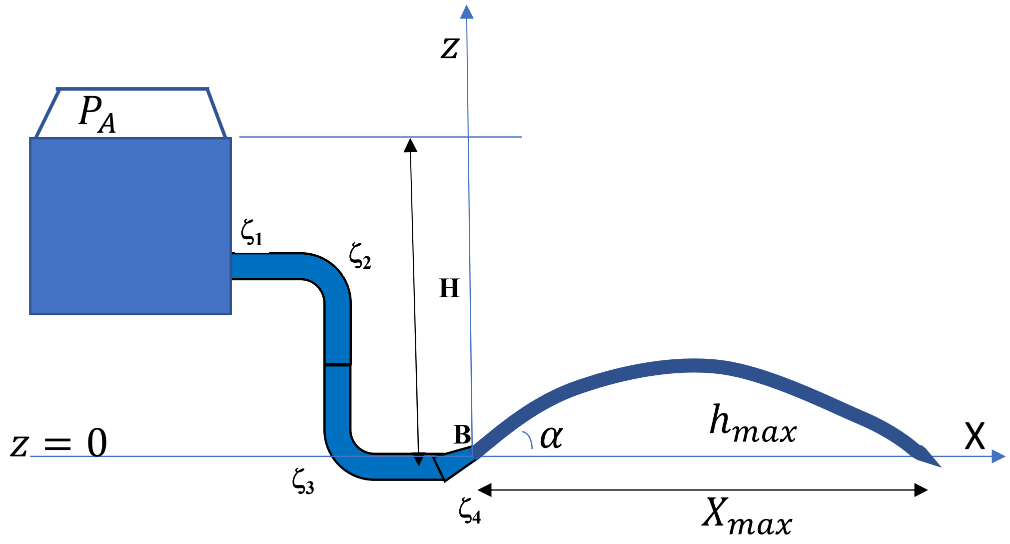
La puissance fournie par la pompe (puissance nette) est $P_{pompe}=\rho\cdot g\cdot H_p\cdot Q_1=10^3\cdot 9{,}81\cdot 105{,}48\cdot 0{,}38=393{,}21\cdot 10^3 wat=393{,}21 Kwat$

Et la puissance reçue par la pompe (puissance sur l'arbre) est :
$P_{arb}=\frac{P_{pompe}}{\eta}=\frac{393{,}21}{0{,}85}=462{,}6\ Kwat$

Exercice 19 :

Soit un system hydraulique de figure en face (le jet sort à l'air libre). La perte de charge du convergent est négligeable (ζ_4=0) par rapport aux pertes dues à l'entrance et aux coudes. On demande de calculer:

1. le débit en volume
2. Hmax
3. Xmax



Solution

sachant que :

P_A=2bar (pression manometrique); H=20m; D_1= 0,2m; D_2= 0,1m ; L= 300m; ζ_1= 0.08 ζ_2= ζ_3= 0.25; υ= 10^{-6} m²/s; ε = 0,8mm, $\alpha = 45°$

1. le débit

En appliquant le théorème de Bernoulli entre les points A et B:

$$\frac{P_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g} + z_A = \frac{P_B}{\rho g} + \frac{V_B^2}{2g} + z_B + \Delta H_{AB}$$

$$P_A = 2 \cdot 10^5\ Pa; V_A \approx 0; P_B = P_{Atm} = 0$$

$$\frac{P_A}{\rho g} + z_A = \frac{V_B^2}{2g} + z_B + \Delta H_{AB}$$

$$\Delta H_{AB} = \Delta \boldsymbol{H}_{A3} = \left(\frac{\lambda \cdot L}{D_1} + \xi_1 + \xi_2 + \xi_3\right)\frac{V^2}{2g} + \xi_4 \frac{V_B^2}{2g}$$

V est la vitesse du liquide dans la conduite

$$\Delta H_{AB} = \left(\frac{\lambda \cdot L}{D_1} + \xi_1 + \xi_2 + \xi_3\right)\frac{V^2}{2g} = \left(\frac{\lambda \cdot 300}{0,2} + 0,08 + 0,25 + 0,25\right)\frac{V^2}{2 \cdot 9,81} = (1500 \cdot \lambda + 0,58)\frac{V^2}{19,62}$$

$$\frac{P_A}{\rho g} + z_A - z_B = \frac{V_B^2}{2g} + (1500 \cdot \lambda + 0,58)\frac{V^2}{2g}$$

De l'équation de continuité: $Q = V \cdot \frac{\pi \cdot D_1^2}{4} = V_B \cdot \frac{\pi \cdot D_2^2}{4} \Rightarrow V_B = V \cdot \frac{D_1^2}{D_2^2} = 4V$

$$\frac{P_A}{\rho g} + z_A - z_B = \frac{16\ \ ^2}{2g} + (1500 \cdot \lambda + 0,58)\frac{V^2}{2g} \Rightarrow \frac{P_A}{\rho g} + H = \frac{16\ \ ^2}{2g} + (1500 \cdot \lambda + 0,58)\frac{V^2}{2g}$$

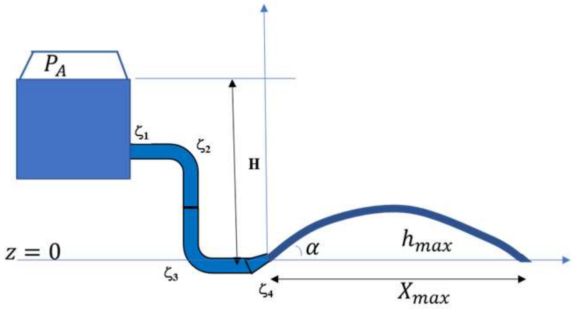
$$\Rightarrow \frac{2 \cdot 10^5}{10^3 \cdot 9,81} + 20 = (1500 \cdot \lambda + 16,58)\frac{V^2}{19,62} \qquad \Rightarrow 792,4 = (1500 \cdot \lambda + 16,58)V^2$$

$$\Rightarrow \mathrm{V} = \sqrt{\frac{792,4}{(1500 \cdot \lambda + 16,58)}}$$

En utilisant La relation de *Karmann-Prandtl*

$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log\left(\frac{\varepsilon}{3,7D}\right) = -2\log\left(\frac{0,8 \cdot 10^{-3}}{3,7 \cdot 0,2}\right) \Rightarrow \lambda$ =donne $\lambda = 0,0284$,.

$$\Rightarrow V = \sqrt{\frac{792{,}4}{(1500\cdot 0{,}0284+16{,}58)}} = 3{,}659 \text{m/s} \qquad \Rightarrow V_B = 4\cdot 3{,}659 = 14{,}637 \text{ m/s}$$



$$\boxed{Q = V\cdot\frac{\pi\cdot D_1^2}{4} = 0{,}115 \text{ m}^3/\text{s}}$$

2. Hmax

Sur OX: $\gamma_x = 0 \Rightarrow V_X = V_{0X} = V_B\cdot cos\alpha \Rightarrow X = V_B\cdot cos\alpha\cdot t + X_0 = V_B\cdot cos\alpha\cdot t$

Sur OZ: $\gamma_Z = -g \Rightarrow V_X = -g\cdot t + V_{0Z} = -g\cdot t + V_B\cdot sin\alpha \Rightarrow Z = -\frac{1}{2}gt^2 + V_B\cdot sin\alpha\cdot t + Z_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + V_B\cdot sin\alpha\cdot t$

$$\begin{cases} X = V_B\cdot cos\alpha\cdot t = 14{,}637\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot t \\ Z = -\frac{1}{2}gt^2 + V_B\cdot sin\alpha\cdot t = -\frac{1}{2}\cdot 9{,}81\cdot t^2 + 14{,}637\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = 10{,}35\cdot t \ldots\ldots\ldots (1) \\ Z = 4{,}905\cdot t^2 + 10{,}35\cdot t \ldots\ldots..(2) \end{cases}$$

Équation décrivant l'allure du jet De (1): $t = \frac{X}{10{,}35}$

$$(1) en\ (2):\quad Z = 4{,}905\cdot\left(\frac{X}{10{,}35}\right)^2 + 10{,}35\cdot\frac{X}{10{,}35} \Leftrightarrow Z = 0{,}048\cdot X^2 + X$$

$$\boxed{Z = 0{,}048\cdot X^2 + X}$$

$$Hmax\ est\ une\ valeur\ extreme\ de\ la\ fonction\ Z = f(x) c\ à\ d\ à\ Z' = \frac{dZ}{dX} = 0 \Rightarrow \frac{dZ}{dX} = 2\cdot 0{,}048\cdot X + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 0{,}096\cdot X + 1 = 0 \Rightarrow X = \frac{1}{0{,}096} = 10{,}416m$$

$$\boxed{\Rightarrow \boldsymbol{H_{max} = 10{,}416m}}$$

3. Xmax

Xmax est atteint à Z=0

$$Z = 0{,}048 \cdot X^2 + X = 0$$

$$\Rightarrow soit\ X = 0\ (cas\ initiale\ )$$

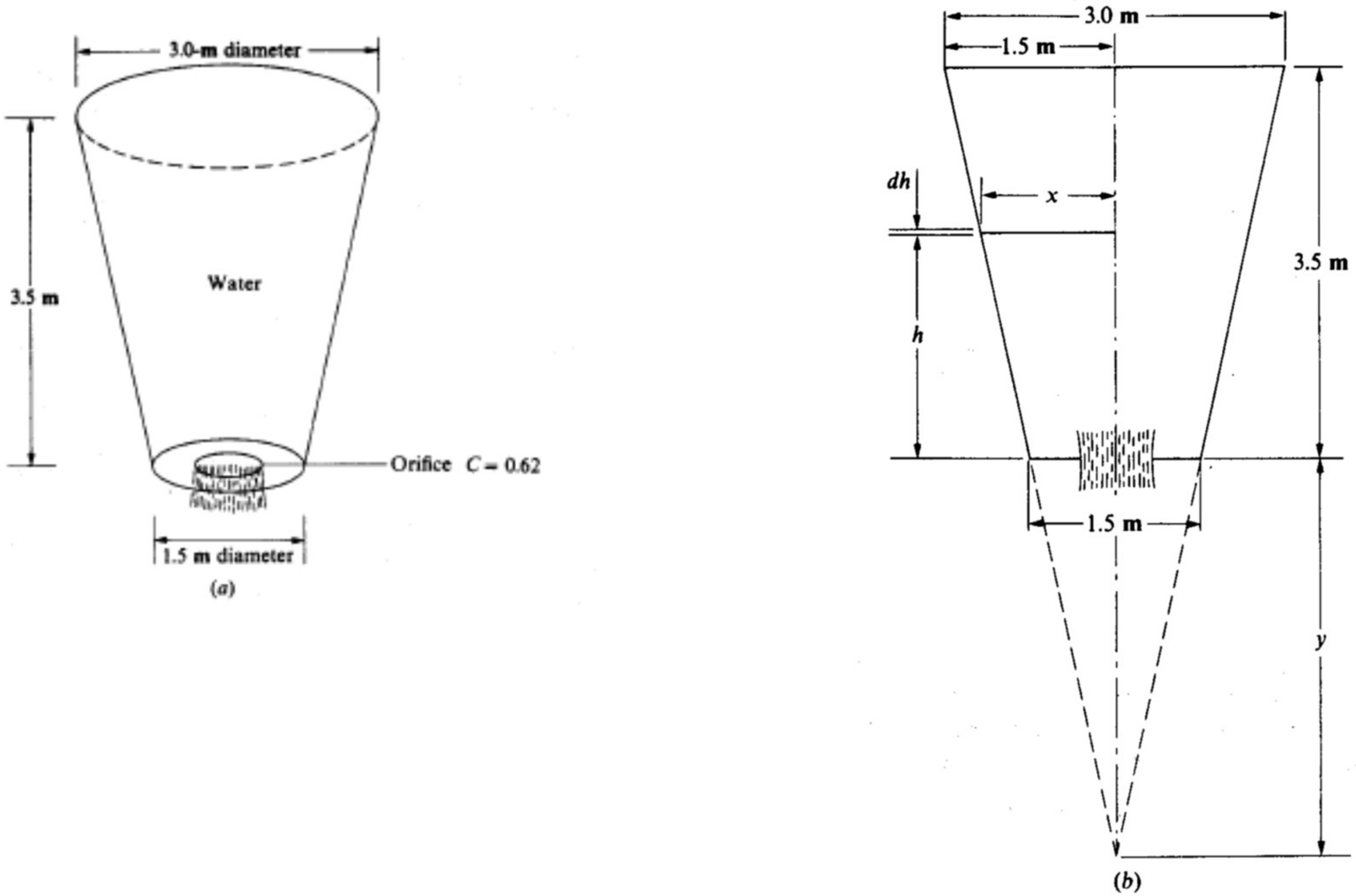
$$ou$$

$0{,}048 \cdot X + 1 = 0 \Rightarrow X = \frac{1}{0{,}048}$=20,83m

$$\boxed{\boldsymbol{X_{max} = 20{,}83m}}$$

Exercice 20

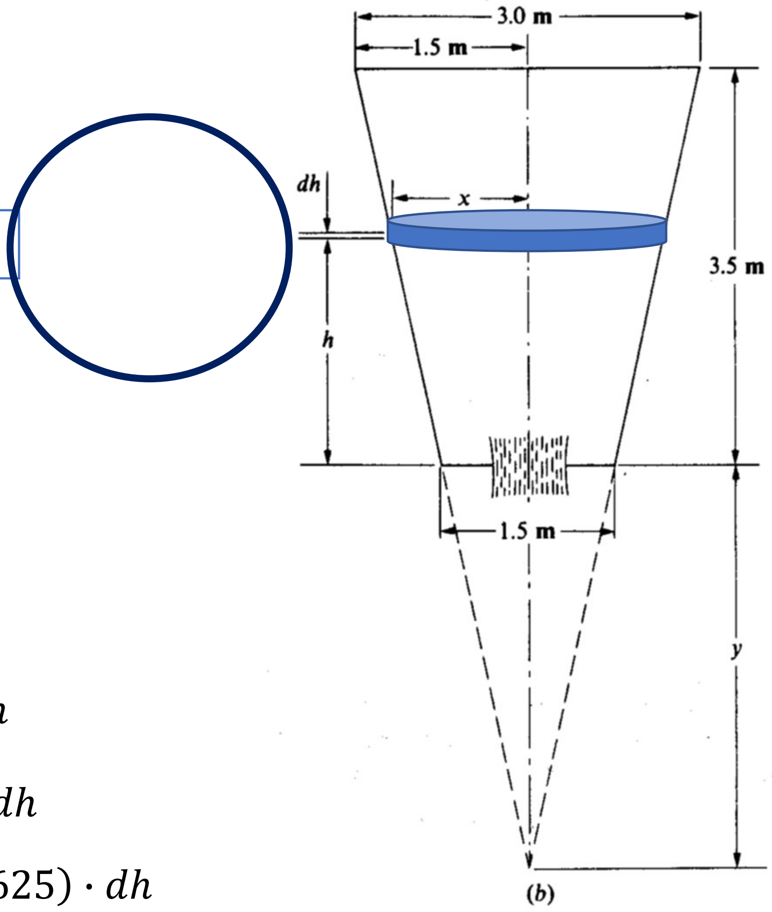
Le réservoir illustré à la Figure en bas à la forme d'un tronc de cône aux dimensions indiquées sur la figure. Le fond du réservoir contient un orifice qui a un coefficient de débit de 0,62. Le réservoir contient de l'eau jusqu'à sa profondeur de 3,5 m. Trouver le diamètre de l'orifice nécessaire pour vider le réservoir en 8 min.



Solution

$$tg\alpha = \frac{1{,}5 - 0{,}75}{3{,}5} = 0{,}2143 \qquad ou\ tg\alpha = \frac{1{,}5}{7{,}5} = 0{,}2143$$

$$de\ plus\ tg\alpha = \frac{\mathrm{X} - 0{,}75}{\mathrm{h}} = 0{,}2143 \qquad \boxed{\Rightarrow \mathrm{X} = 0{,}2143 \cdot h + 0{,}75}$$



durant un istant dt il s'ecoule un volume v =-$dh.S$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{avec } \mathrm{S} = \pi \cdot X^2 \Rightarrow v = -\pi \cdot X^2 \cdot dh \\ \Rightarrow v = -\pi \cdot (0{,}2143 \cdot h + 0{,}75)^2 \cdot dh \ldots\ldots..(1) \end{array}}$$

$$\boxed{\text{Ce volume } v = Q \cdot dt = C_d \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \cdot s \cdot dt \ldots\ldots\ldots\ldots(2)}$$

$$(1) = (2) \Leftrightarrow C_d \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \cdot s \cdot dt = -\pi \cdot (0{,}2143 \cdot h + 0{,}75)^2 \cdot dh$$

$$\Rightarrow 0{,}62 \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}81} \cdot \sqrt{h} \cdot s \cdot dt = -3{,}14 \cdot (0{,}2143 \cdot h + 0{,}75)^2 \cdot dh$$

$$\Rightarrow 2{,}7452 \cdot \sqrt{h} \cdot s \cdot dt = -3{,}14 \cdot (0{,}0459 \cdot h^2 + 0{,}3214 \cdot h + 0{,}5625) \cdot dh$$

$$\Rightarrow 2{,}7452 \cdot s \cdot dt = -3{,}14 \cdot (0{,}0459 \cdot h^2 + 0{,}3214 \cdot h + 0{,}5625) \cdot h^{-1/2} dh$$

$$\Rightarrow 2{,}7452 \cdot s \cdot dt = -3{,}14 \cdot \left(0{,}0459 \cdot h^{3/2} + 0{,}3214 \cdot h^{1/2} + 0{,}5625 \cdot h^{-1/2}\right) \cdot dh$$

$$\Rightarrow 2{,}7452 \cdot s \cdot dt = -\left(0{,}1441 \cdot h^{3/2} + 1{,}009 \cdot h^{1/2} + 1{,}7662 \cdot h^{-1/2}\right) \cdot dh$$

$$\Rightarrow 2{,}7452 \int_0^{480} s \cdot dt = -\int_{3,5}^{0} \left(0{,}1441 \cdot h^{3/2} + 1{,}009 \cdot h^{1/2} + 1{,}7662 \cdot h^{-1/2}\right) \cdot dh$$

$$\Rightarrow 2{,}7452 \int_0^{480} s \cdot dt = \int_{0}^{3,5} \left(0{,}1441 \cdot h^{3/2} + 1{,}009 \cdot h^{1/2} + 1{,}7662 \cdot h^{-1/2}\right) \cdot dh$$

$$\Rightarrow 2{,}7452 \cdot 480 \cdot s = \left.\left(0{,}1441 \cdot \frac{2}{5} h^{\frac{5}{2}} + 1{,}009 \cdot \frac{2}{3} h^{\frac{3}{2}} + 1{,}7662 \cdot 2h^{\frac{1}{2}}\right)\right|_0^{3,5}$$

$$\Rightarrow 1317{,}696 \cdot s = 1{,}321 + 4{,}4045 + 6{,}6085 = 12{,}334$$

$$\Rightarrow s = 9{,}36 \cdot 10^{-3} m^2$$

$$s = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{4s}{\pi}} = 0{,}109m = 109mm$$

$$\boxed{d = 109mm}$$

Exercice 21:

Dans le système en face la pompe BC doit amener avec un débit de 160 l/s de l'huile de densité dH=0,762 au réservoir D. en admettant que l'Energie perdue de A à B est de 2,5 J/N et entre C et D de 6,5 J/N.

a. Combien la pompe doit-elle fournir en kW au système ?

b. Tracer la ligne de charge