Exercices de cours 15-20
Hydraulique Générale

Pr. BOUCHELKIA Hamid
Université de Tlemcen
bouchelkiahamid@gmail.com

Exercice 15 :

Une pompe refoule un débit d'eau de 0,5 m^3/s, les diamètres des conduites de refoulement et d'aspiration sont 350 mm et 400 mm respectivement et $\varepsilon = 3{,}5mm$. La lecture de la pression exercée en refoulement à l'hauteur de l'axe de la pompe est de P_r=125 KN/m^2 et sur le manomètre situé à l'aspiration à de l'axe de la pompe est de P_a=10 KN/m^2.

Déterminer :

a. la hauteur manométrique totale de la pompe à l'aide de l'équation de Bernoulli.

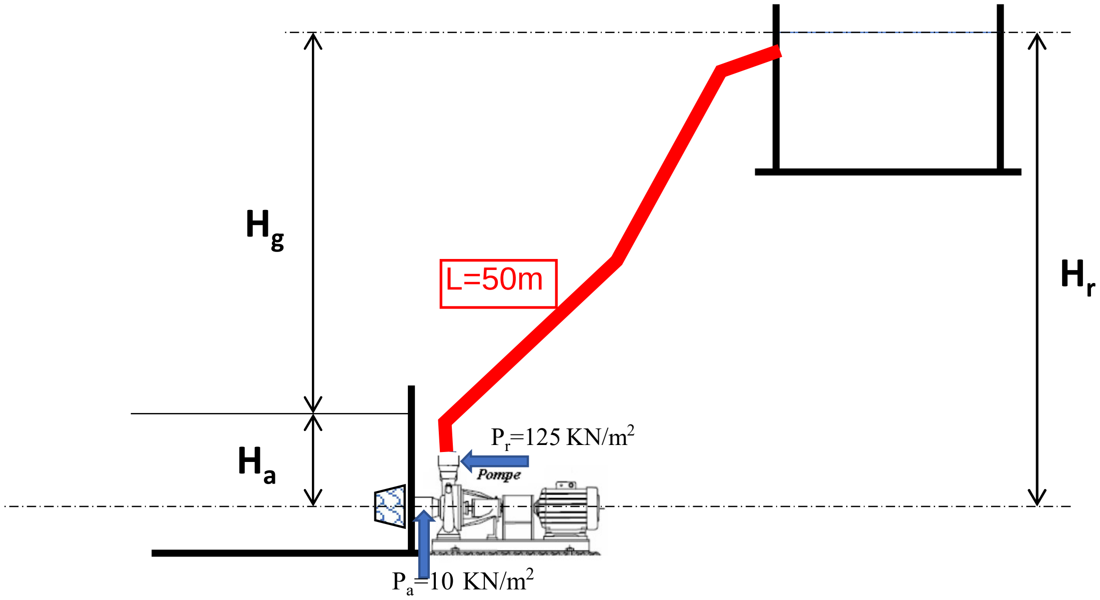
b. La puissance absorbée par la pompe si son rendement est de 75%

c. Déterminer la hauteur de refoulement Hr

On donne :

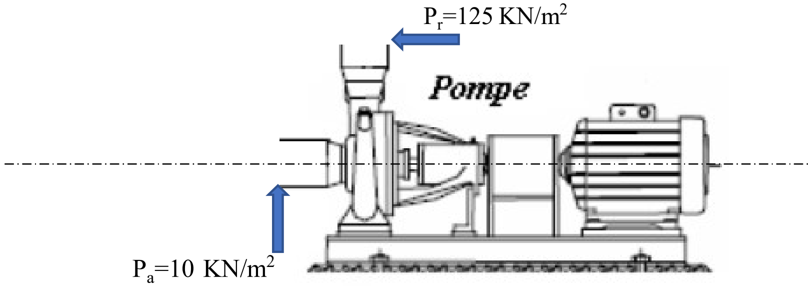
$g = 9{,}81\ m.s^{-2}$; $\rho_{eau} = 1000\ Kg/m^3$

Solution EX 15:



a. Prenons comme point de référence l'axe de la pompe, si pour ce cas nous utiliserons l'équation de Bernoulli entre l'entrée et la sortie de la pompe :

$$\frac{P_a}{\rho g} + \frac{V_a^2}{2g} + z_a = \frac{P_r}{\rho g} + \frac{V_r^2}{2g} + z_r + \sum_i \Delta H_i - H_p \text{.....................(1)}$$



$$z_a = z_r = 0 \qquad \sum_i \Delta H_i \approx 0$$

La lecture de la pression exercée en refoulement est effectuée sur l'axe de la pompe, donc : $\boldsymbol{Z_r = 0}$ est P_r=125KN/m² =125KPa

$$\frac{P_r}{\rho\, g} = \frac{125 \cdot 10^3}{10^3 \cdot 9{,}81} = \boldsymbol{12{,}74\, m}$$

Pour l'aspiration, la pression mesuré à $\boldsymbol{Z_a = 0}$ au dessous de l'axe de la pompe est P_a=10KN/m²

$$\frac{P_a}{\rho\, g} = \frac{10 \cdot 10^3}{9{,}81 \cdot 10^3} = \boldsymbol{1{,}02\, m}$$

$$\frac{P_a}{\rho g} + \frac{V_a^2}{2g} = \frac{P_r}{\rho g} + \frac{V_r^2}{2g} - H_p \text{..................... (2)}$$

Les vitesses d'écoulement $\quad Q = V_1 \cdot S_1 = V_2 \cdot S_2 \Rightarrow Q = V_1 \cdot \frac{\pi \cdot D_1^2}{4} = V_2 \cdot \frac{\pi \cdot D_2^2}{4} \quad avec\ V_1 = Va\ et\ V_2 = Vr$

$$V_1 = \frac{4Q}{\pi \cdot D_1^2} = \frac{4 \cdot 0{,}5}{3{,}14 \cdot 0{,}4^2} = 3{,}98 \text{ m/s} \qquad \text{et} \qquad V_2 = \frac{4Q}{\pi \cdot D_2^2} = 5{,}2 \text{m/s}$$

$$\frac{V_1^2}{2g} = \frac{3{,}98^2}{2 \cdot 9{,}81} = 0{,}81\ mce \qquad \frac{V_2^2}{2g} = \frac{5{,}2^2}{2 \cdot 9{,}81} = 1{,}38\ mce$$

$$\frac{P_a}{\rho g}+\frac{V_a^2}{2g}=\frac{P_r}{\rho g}+\frac{V_r^2}{2g}-H_P \Rightarrow H_P=\frac{P_r}{\rho g}-\frac{P_a}{\rho g}+\frac{V_r^2}{2g}-\frac{V_a^2}{2g}$$

$$H_P=\mathrm{HMT}=12{,}74-1{,}02+1{,}38-0{,}81=12{,}29mce \qquad H_P=\text{Hauteur Manometrique Total de lapompe}$$

La puissance fournie par la pompe au liquide (puissance nette)

$$P_{net}=\rho\cdot g\cdot H_P\cdot Q=10^3\cdot 9{,}81\cdot 12{,}29\cdot 0{,}5=60{,}28\cdot 10^3\,Wat=60{,}28KWat$$

La puissance consommée par la pompe (fournie par le moteur) $\quad P_P=\dfrac{P_{net}}{\eta}=\dfrac{60{,}28}{0{,}75}=107{,}17\text{ KWat}$

l'équation de Bernoulli entre la sortie de la pompe « r » et la section(B) :

$$\frac{P_r}{\rho g}+\frac{V_r^2}{2g}+z_r=\frac{P_B}{\rho g}+\frac{V_B^2}{2g}+z_B+\sum_i \Delta H_{rB}$$

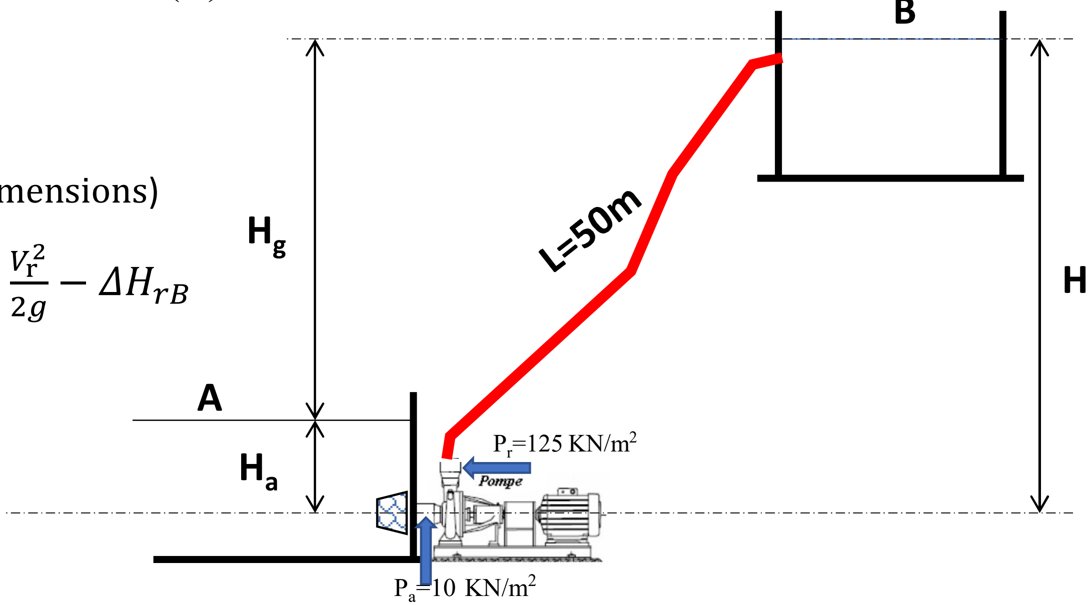
$\dfrac{P_B}{\rho g}=\mathrm{Patm}=0\text{ (relative)},\ \mathrm{VB}=0\text{ (reservoir à grandes dimmensions)}$

$$\Rightarrow \frac{P_r}{\rho g}+\frac{V_r^2}{2g}+z_r=z_B+\sum_i \Delta H_{rB} \Rightarrow z_B-z_r=\mathrm{Hr}=\frac{P_r}{\rho g}+\frac{V_r^2}{2g}-\Delta H_{rB}$$

$$\Delta \boldsymbol{H_{rB}}=\left(\frac{\boldsymbol{\lambda\cdot L}}{\boldsymbol{D}}\right)\frac{\boldsymbol{V_r^2}}{\boldsymbol{2g}}$$

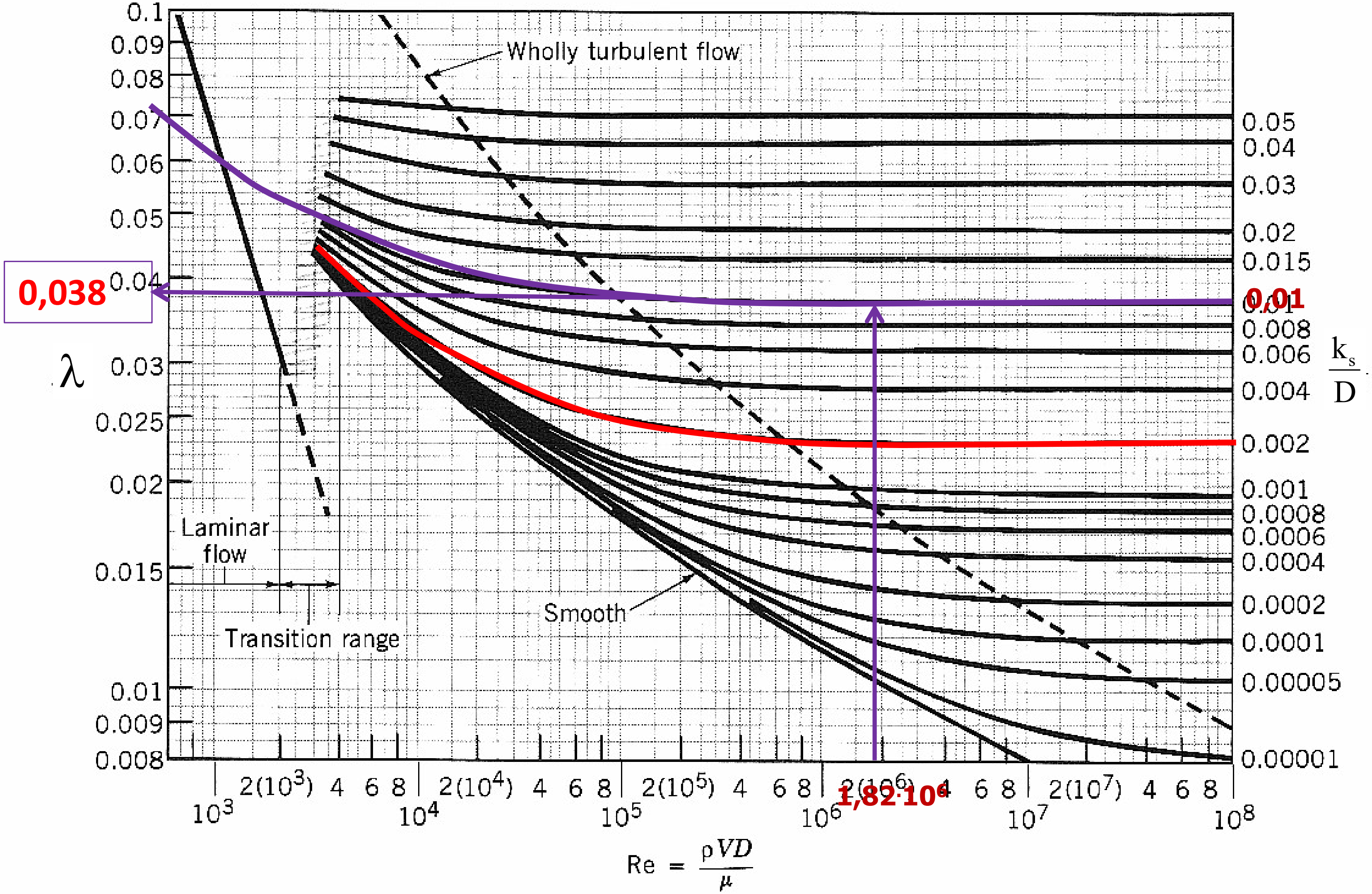
$$V_r=\frac{5{,}2\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow Re=\frac{VD}{\nu}=\frac{5{,}2\cdot 0{,}35}{10^{-6}}=1{,}82\cdot 10^6$$

$$\frac{\varepsilon}{D}=\frac{3{,}5}{350}=0{,}01$$



À partir de la courbe de Moody $\boldsymbol{\lambda}=0{,}038$

Diagramme de Moody



$$\boldsymbol{\Delta H_{rB}} = \left(\frac{\lambda \cdot L}{D}\right)\frac{V_r^2}{2g} = \left(\frac{0{,}038 \cdot 50}{0{,}35}\right)\frac{5{,}2^2}{2 \cdot 9{,}81} = \mathbf{7{,}48\ mce}$$

$$\Rightarrow z_B - z_r = \mathrm{Hr} = \frac{P_{\mathrm{r}}}{\rho g} + \frac{V_{\mathrm{r}}^2}{2g} - \Delta H_{rB}$$

$$\mathrm{Hr} = 12{,}74 + 1{,}38 - 7{,}48 = 6{,}64m$$

Exercice 16 : (venturi et tube de Pitot)

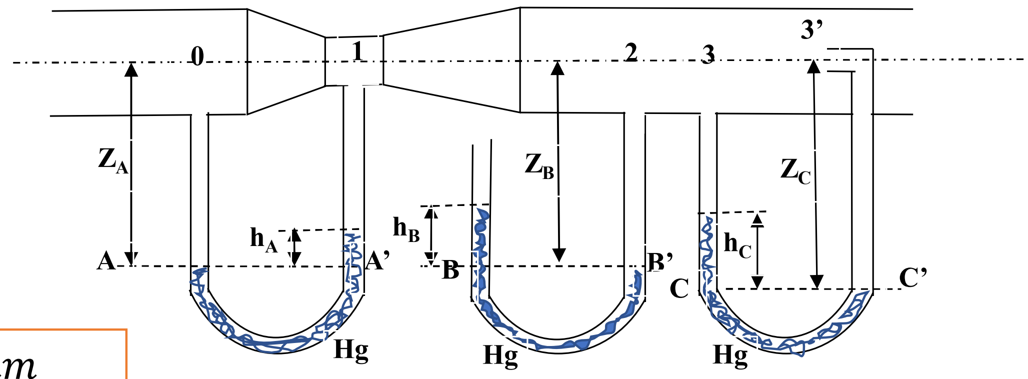
Soit le schéma hydraulique suivant : On donne : P_0=1,8 bar ; P_1=1,75 bar ; ρ_{Hg}=13600Kg/m^3; h_B=0,697m, D_0=0,2m, D_1=0,15m, D_2=D_3=0,2m,

Les pressions P_0 et P_1 sont des pressions absolues.

Déterminer : h_A, le débit Q, z_B, h_C,

Solution

AA' est une surface isobare



$$P_0 + \rho g z_A = P_1 + \rho g(z_A - h_A) + \rho_{Hg} g h_A$$

$$\Rightarrow P_0 = P_1 - \rho g h_A + \rho_{Hg} g h_A$$

$$\Rightarrow P_0 - P_1 = h_A g(\rho_{Hg} - \rho)$$

$$\Rightarrow h_A = \frac{P_0 - P_1}{g(\rho_{Hg} - \rho)} = \frac{1{,}8 \cdot 10^5 - 1{,}75 \cdot 10^5}{9{,}81(13{,}6 \cdot 10^3 - 10^3)}$$

$$= 0{,}04m = 40mm \quad \boxed{\Rightarrow h_A = 0{,}04m = 40mm}$$

Equation de Bernoulli entre (0) et (1): $\frac{\mathbf{P_0}}{\rho g} + \mathbf{z_0} + \frac{V_0{}^2}{2g} = \frac{\mathbf{P_1}}{\rho g} + \mathbf{z_1} + \frac{V_1{}^2}{2g} + \Delta H_{12} \Leftrightarrow \frac{\mathbf{P_0}}{\rho g} + \frac{V_0{}^2}{2g} = \frac{\mathbf{P_1}}{\rho g} + \frac{V_1{}^2}{2g}$

De l'équation de continuité : $Q = cst = V_0 \cdot S_0 = V_1 \cdot S_1 = V_2 \cdot S_2 = V_3 \cdot S_3 = V_{3'} \cdot S_{3'}$

$$V_0 = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D_0^2}; V_1 = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D_1^2}; V_2 = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D_2^2}; V_3 = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D_3^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathbf{P_0}}{\rho g} + \frac{\left(\frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D_0^2}\right)^2}{2g} = \frac{\mathbf{P_1}}{\rho g} + \frac{\left(\frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D_1^2}\right)^2}{2g} \Rightarrow \mathbf{P_1} - \mathbf{P_0} = \frac{\rho}{2}\left(\frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D_0^2}\right)^2 - \frac{\rho}{2}\left(\frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D_1^2}\right)^2 = \frac{8\rho Q^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{D_0^4} - \frac{1}{D_1^4}\right)$$

$$\Rightarrow \mathbf{P_1} - \mathbf{P_0} = \frac{8\rho Q^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{D_0^4} - \frac{1}{D_1^4}\right) \Rightarrow Q^2 = \frac{\pi^2(\mathbf{P_1} - \mathbf{P_0})}{8\rho\left(\frac{1}{D_0^4} - \frac{1}{D_1^4}\right)}$$

$$\Rightarrow Q = \sqrt{\frac{\pi^2(\mathbf{P_1} - \mathbf{P_0})}{8\rho\left(\frac{1}{D_0^4} - \frac{1}{D_1^4}\right)}} = \mathbf{0{,}0675}\ m^3/s$$

Equation de Bernoulli entre (0) et (2): $\frac{\mathbf{P_0}}{\rho g} + z_1 + \frac{V_0{}^2}{2g} = \frac{\mathbf{P_0}}{\rho g} + z_2 + \frac{V_2{}^2}{2g} + \Delta H_{02} \Leftrightarrow \frac{\mathbf{P_0}}{\rho g} = \frac{\mathbf{P_2}}{\rho g}$

BB' est une surface isobare

$$P_{atm} + \rho_{Hg} g h_B = P_2 + \rho g \;_B \Rightarrow z_B = \frac{P_{atm} + \rho_{Hg} g h_B - P_2}{\rho g} = \frac{1{,}013 \cdot 10^5 + 13600 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}697 - 1{,}8 \cdot 10^5}{10^3 \cdot 9{,}81}$$

$$\Rightarrow z_B = 1{,}457m$$

Equation de Bernoulli entre (0) et (3): $\frac{\mathbf{P_0}}{\rho g} = \frac{\mathbf{P_3}}{\rho g}$

Equation de Bernoulli entre (0) et (3'): $\frac{\mathbf{P_0}}{\rho g} = \frac{\mathbf{P_{3'}}}{\rho g}$

$$V_{3'} = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D_{3'}^2} = \frac{4 \cdot 0{,}0675}{\pi \cdot 0{,}2^2} = 2{,}15m/s$$

À la section 3' nous avons un tube de Pitot qui mesure la pression dynamique $\mathrm{P}_{dyn} = \frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g}$

$$\boxed{\mathrm{P}_{dyn3'} = \mathbf{P_{3'}} + \frac{\boldsymbol{\rho V_{3'}}^2}{\mathbf{2}} = \mathbf{1,8 \cdot 10^5} + \frac{\mathbf{10^3 \cdot 2,15^2}}{\mathbf{2}} = \mathbf{1,823 \cdot 10^5}}$$

CC' est une surface isobare

$$P_3 + \rho g(Z_C - h_C) + \rho_{Hg} g h_C = \mathrm{P}_{dyn3'} + \rho g \quad _C$$

$$\Rightarrow P_3 - \rho g(h_C) + \rho_{Hg} g h_C = \mathrm{P}_{dyn3'}$$

$$\Rightarrow h_C = \frac{\mathrm{P}_{dyn3'} - P_3}{g(\rho_{Hg} - \rho)} = \frac{\mathbf{0,023 \cdot 10^5}}{9,81(13600 - 1000)} = 0,0186m = 18,6mm$$

$$\boxed{\Rightarrow h_C = 18,6mm}$$

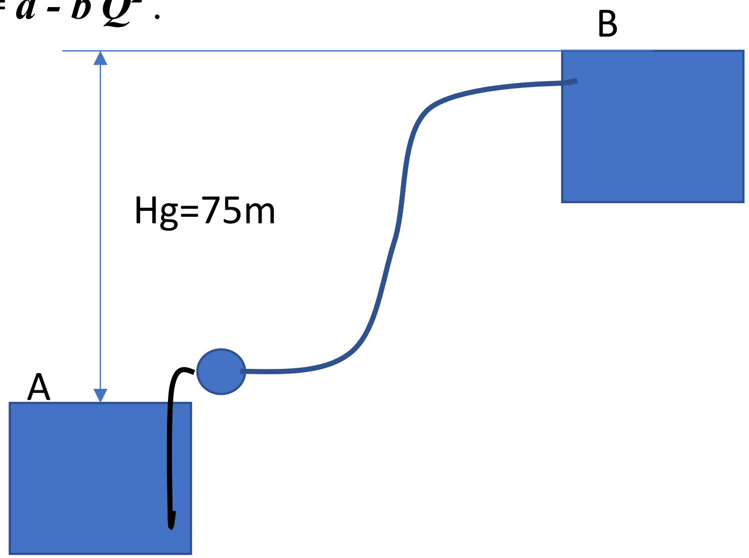
Exercice 17 :

Une pompe centrifuge, donnant 2500 l/min à une hauteur de 78 m et 1400 l/min à 110 m, refoule de l'eau à travers une conduite de fibre-ciment qui, pour le pompage 32 l/s donne une perte de charge de 10,6 m. la hauteur géométrique à soulever est de 75 m.

Calculer : a) la courbe caractéristique de la pompe en sa forme simplifiée $\boldsymbol{H_p = a - b\,Q^2}$.

b) L'équation caractéristique de la conduite.

c)Point de fonctionnement.



Solution

a) courbe caractéristique de la pompe

La pompe donnant Q_1= 2500 l/min=41,66l/ à une hauteur de $\boldsymbol{H_{p1}}$ = 78 m

$\Leftrightarrow \boldsymbol{H_{p1}} = 78 = \boldsymbol{a - b\ 41{,}66^2}$ ....*(1)*

La pompe donnant Q_2= 1400 l/min=23,33l/ à une hauteur de $\boldsymbol{H_{p2}}$ = 110 m

$\Leftrightarrow \boldsymbol{H_{p2} = 110} = \boldsymbol{a - b\ 23{,}33^2}$ ....*(2)*

$$(1)-(2) \Rightarrow (41{,}66^2 - 23{,}33^2)b = 78 - 110 \Leftrightarrow 1191{,}267 \cdot b = -32 \Rightarrow b = \frac{-32}{1191{,}2667} \approx 0{,}027$$

$$\boldsymbol{De\ H_{p1}} = 78 = \boldsymbol{a - b\ 41{,}66^2} = \boldsymbol{a} - 0{,}027 \cdot \boldsymbol{41{,}66^2} \Rightarrow \boldsymbol{a = 78} + 0{,}027 \cdot \boldsymbol{41{,}662 = 124{,}86}$$

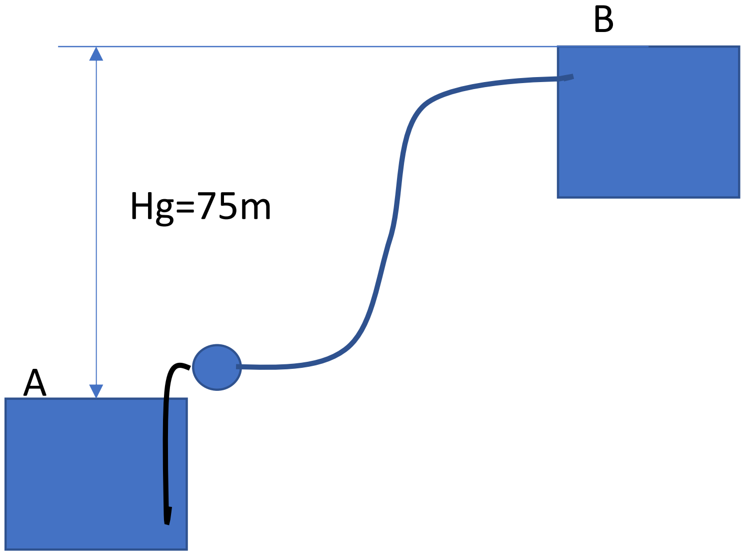
$$\boldsymbol{De\ H_{p2}} = 110 = \boldsymbol{a - b\ 23{,}33^2} = \boldsymbol{a} - 0{,}027 \cdot \boldsymbol{23{,}33^2} \Rightarrow \boldsymbol{a = 110} + 0{,}027 \cdot \boldsymbol{544{,}289} = \boldsymbol{124{,}7}$$

$$\Rightarrow \mathbf{a = amoy = 124{,}75}$$

la courbe caractéristique de la pompe sous sa forme simplifiée est $\boldsymbol{H_p = 124,75 - 0,027\,Q^2}$

b)L'équation caractéristique de la conduite

En appliquant le théorème de Bernoulli entre les points A et B:



$$\frac{P_A}{\rho g}+\frac{V_A^2}{2g}+z_A=\frac{P_B}{\rho g}+\frac{V_B^2}{2g}+z_B-H_p+\Delta H_{AB}$$

$$P_A=P_B=P_{Atm}=0;V_A=V_B\approx 0$$

$$z_A=z_B-H_p+\Delta H_{AB}$$

$$\Rightarrow H_p=z_B-z_A+\Delta H_{AB}\Rightarrow H_p=75+R\cdot Q^2$$

$$\Rightarrow H_p=\underbrace{75+R\cdot Q^2}$$

Caractéristique de la pompe Caractéristique de la conduite

$$\Delta H_{AB}=R\cdot Q^2\Rightarrow R=\frac{\Delta H_{AB}}{Q^2}$$

à $Q=32\frac{l}{s}$ on a $\Delta H_{AB}=10{,}6\text{m}\Rightarrow R=\frac{\Delta H_{AB}}{Q^2}=R=\frac{10{,}6}{32^2}=0{,}0103$

Caractéristique de la conduite $\Rightarrow H_C=75+0{,}0103\cdot Q^2$

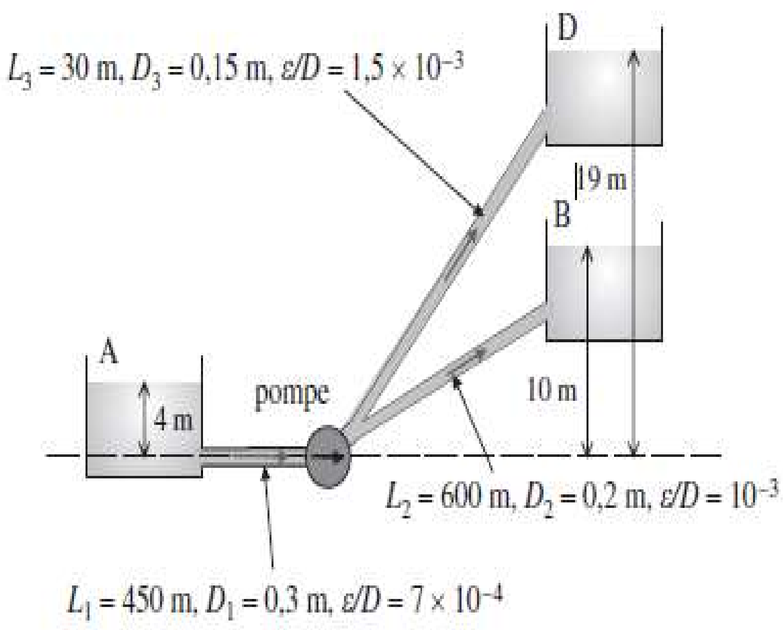
c) Le point de fonctionnement $124{,}75-0{,}027\cdot Q^2=75+0{,}0103\cdot Q^2\Rightarrow$ $Q=\sqrt{\dfrac{49{,}75}{0{,}037}}=36{,}67\ l/s$

Le point de fonctionnement Q=36,67 et H=75m

Exercice 18 :

Pompe alimentant 2 réservoirs

Une pompe de rendement global η = 0,85 est utilisée pour transvaser de l'eau (ρ = 1000 kg/m3, ν = 10^{-6}ms) d'un réservoir A vers 2 réservoirs B et D. Les caractéristiques des conduits L_1, L_2 et L_3 sont indiquées sur la figure ci-dessous. On peut négliger les pertes de charge singulières. On veut assurer un débit Q_{v2} =115 l/s dans la conduite L_2.



1. Quelle est la nature de l'écoulement dans la conduite L_2 ? Justifier et calculer le coefficient de perte de charge λ_2.

2. Calculer le débit dans la conduite L_3. Faire les remarques qui s'imposent.

3. Calculer la charge fournie par la pompe et la puissance sur l'arbre.

Solution:

$$V_2 = \frac{4Q_2}{\pi D_2^2} = \frac{4 \cdot 115 \cdot 10^{-3}}{3{,}14 \cdot 0{,}2^2} = 3{,}66 m/s \qquad \Rightarrow Re = \frac{VD}{\nu} = \frac{3{,}66 \cdot 0{,}2}{10^{-6}} = 0{,}73 \cdot 10^6 > 10^5 (\text{regime turbulent regueux})$$

En utilisant la formule de colebrook white $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log\left(\frac{\varepsilon}{3{,}7D} + \frac{2{,}51}{R_e\sqrt{\lambda}}\right)$ $\Rightarrow \lambda_{20} = 0{,}02;\ \lambda_{21} = 0{,}02$ donc $\boldsymbol{\lambda_2 = 0{,}02}$

La relation de *Karmann-Prandtl* $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log\left(\frac{\varepsilon}{3{,}7D}\right)$ donne $\lambda_2 = 0{,}0196 \approx 0{,}02$,.

$$\lambda = \left(\frac{1}{-2\log\left(\frac{\varepsilon}{3{,}7D} + \frac{2{,}51}{R_e\sqrt{\lambda}}\right)} \right)^2$$

$$\lambda 0 = 0{,}02 \Rightarrow \lambda 1 = \left(\frac{1}{-2\log\left(\frac{10^{-3}}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{0{,}73 \cdot 10^6\sqrt{0{,}02}}\right)} \right)^2 = 0{,}02$$

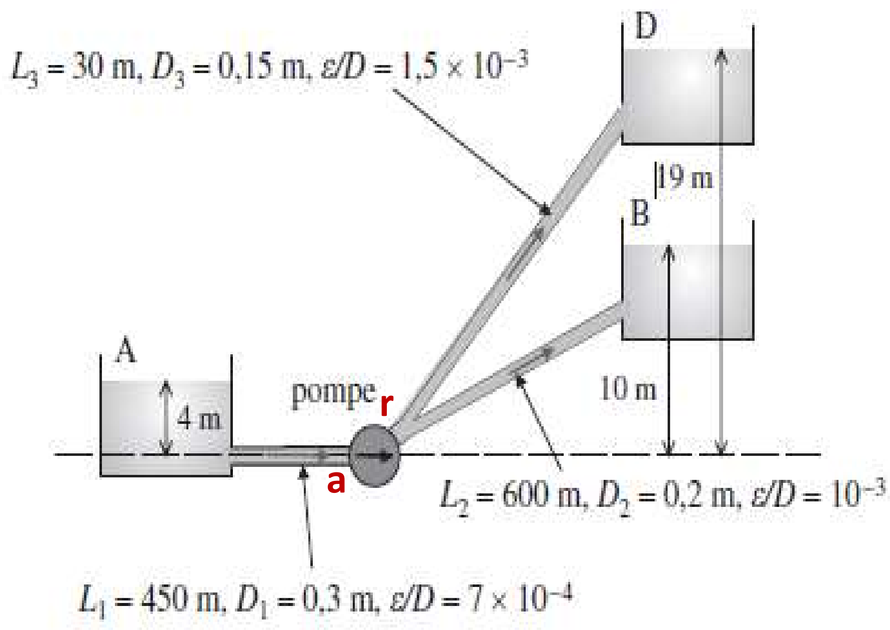
$\lambda 0 = \lambda 1 = 0{,}02$ donc $\lambda = 0{,}02$

2. On applique le théorème de Bernoulli entre la sortie de la pompe et la surface libre du réservoir B :

$$\frac{P_r}{\rho g}+\frac{V_r^2}{2g}+z_r=\frac{P_B}{\rho g}+\frac{V_B^2}{2g}+z_B+\Delta H_{rB}$$

$P_B=P_{atm}=0 \quad et \quad V_B\approx 0$ (réservoir à grandes dimensions)

$$\frac{P_r}{\rho g}+\frac{V_r^2}{2g}+z_r=z_B+\frac{\lambda_2 L_2}{D_2}\cdot\frac{V_2^2}{2g}\text{.......................(1)}$$



On applique le théorème de Bernoulli entre la sortie de la pompe et la surface libre du réservoir D :

$$\frac{P_r}{\rho g}+\frac{V_r^2}{2g}+z_r=\frac{P_D}{\rho g}+\frac{V_D^2}{2g}+z_D+\Delta H_{rD}$$

$P_D=P_{atm}=0 \quad et \quad V_D\approx 0$ (réservoir à grandes dimensions)

$$\frac{P_r}{\rho g}+\frac{V_r^2}{2g}+z_r=z_D+\frac{\lambda_3 L_3}{D_3}\cdot\frac{V_3^2}{2g}\text{.......................(2)}$$

$$(1)=(2)\Rightarrow z_B+\frac{\lambda_2 L_2}{D_2}\cdot\frac{V_2^2}{2g}=z_D+\frac{\lambda_3 L_3}{D_3}\cdot\frac{V_3^2}{2g}\Leftrightarrow V_3^2=\frac{2gD_3}{\lambda_3 L_3}\left(z_B-z_D+\frac{\lambda_2 L_2}{D_2}\cdot\frac{V_2^2}{2g}\right)$$

$$\Rightarrow V_3=\sqrt{\frac{2gD_3}{\lambda_3 L_3}\left(z_B-z_D+\frac{\lambda_2 L_2}{D_2}\cdot\frac{V_2^2}{2g}\right)}\Rightarrow V_3=\sqrt{\frac{2\cdot 9{,}81\cdot 0{,}15}{\lambda_3\cdot 30}\left(19-10+\frac{0{,}02\cdot 600}{0{,}2}\cdot\frac{3{,}66^2}{2\cdot 9{,}81}\right)}\Leftrightarrow\Rightarrow \mathbf{V_3}=\sqrt{\frac{\mathbf{4,90}}{\boldsymbol{\lambda_3}}}$$

Nous procéderons par itérations en utilisant la formule de colebrook pour le calcul de λ

$$\lambda_{30} = 0{,}02 \; ; \; V_{31} = \sqrt{\frac{4{,}90}{0{,}02}} = 15{,}65m/s; \quad Re = \frac{VD}{\nu} = 2347500 \Rightarrow \lambda_{31} = 0{,}0218;\, V_{31} = 15\,\frac{m}{s};$$

$$Re = 2250000; \Rightarrow \lambda_{32} = 0{,}0218;\, V_{32} = 15\,\frac{m}{s}$$

$$Donc\ V_3 = 15\,\frac{m}{s} \;\Rightarrow Q_3 = V_3 \cdot \frac{\pi D_3}{4} = 15 \cdot \frac{3{,}14 \cdot 0{,}15^2}{4} = \mathbf{0,265\,\frac{m^3}{s} = 265l/s}$$

Ou bien Nous procéderons en utilisant la formule de *Karmann-Prandtl* $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log\left(\frac{\varepsilon}{3{,}7D}\right)$ pour le calcul de λ

$\Rightarrow \lambda_3 = 0{,}0217 \; ; \; V_3 = \sqrt{\frac{4{,}90}{0{,}0217}} = 15{,}00m/s;\, Donc\ V_3 = 15\,\frac{m}{s} \;\Rightarrow Q_3 = V_3 \cdot \frac{\pi D_3}{4} = 15 \cdot \frac{3{,}14 \cdot 0{,}15^2}{4} = \mathbf{0,265\,\frac{m^3}{s} = 265l/s}$

Ce débit est plus que le double de celui dans L_2 pour un plus petit diamètre. Les pertes de charge sont beaucoup plus importantes dans L_2 que dans L_3 (car $L_2 >> L_3$).

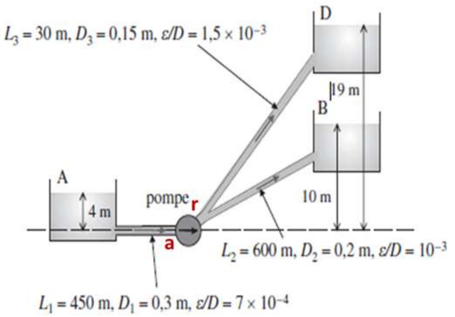
3. La puissance de la pompe et la puissance sur l'arbre

Le débit dans L_1 est :$Q_1 = Q_2 + Q_3 = 0{,}38m^3/s$. Donc la vitesse du fluide est : $V_1 = \frac{4Q_1}{\pi D_1^2} = 5{,}379$m/s. Ceci conduit à un nombre de Reynolds : Re= 1613588,11 , . L'écoulement est turbulent rugueux

En utilisant la formule de colebrook white $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log\left(\frac{\varepsilon}{3{,}7D} + \frac{2{,}51}{R_e\sqrt{\lambda}}\right)$ $\Rightarrow \lambda_{10} = 0{,}02;\ \lambda_{11} = 0{,}0183;\, ;\ \lambda_{12} = 0{,}0183$ donc $\boldsymbol{\lambda_1 = 0,0183}$

La relation de *Karmann-Prandtl* $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log\left(\frac{\varepsilon}{3{,}7D}\right)$ donne $\lambda_1 = 0{,}018$,.

En appliquant le théorème de Bernoulli entre les points A et B:



$$\frac{P_A}{\rho g} + \frac{V_{\mathrm{A}}^2}{2g} + z_A = \frac{P_{\mathrm{B}}}{\rho g} + \frac{V_{\mathrm{B}}^2}{2g} + z_B - H_p + \Delta H_{AB}$$

$$P_A = P_B = P_{Atm} = 0; V_A = V_B \approx 0$$

$$z_A = z_B - H_p + \Delta H_{AB} \Rightarrow H_p = z_B - z_A + \Delta H_{Aa} + \Delta H_{rB} =$$

$$\Rightarrow \ H_p = z_B - z_A + \frac{\lambda_1 L_1}{D_1} \cdot \frac{V_1^2}{2g} + \frac{\lambda_3 L_3}{D_3} \cdot \frac{V_3^2}{2g} = 19 - 4 + \frac{0{,}0183 \cdot 450}{0{,}3} \cdot \frac{5{,}379^2}{2 \cdot 9{,}81} + \frac{0{,}0218 \cdot 30}{0{,}15} \cdot \frac{15^2}{2 \cdot 9{,}81}$$
$$= 105{,}48\text{m}$$

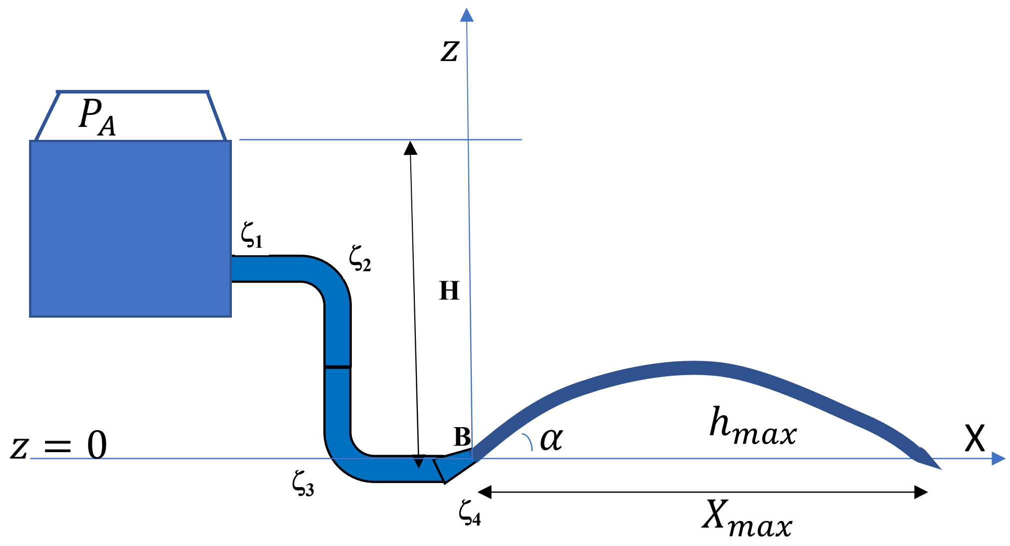
La puissance fournie par la pompe (puissance nette) est $P_{pompe} = \rho \cdot g \cdot H_p \cdot Q_1 = 10^3 \cdot 9{,}81 \cdot 105{,}48 \cdot 0{,}38 = 393{,}21 \cdot 10^3 wat = 393{,}21 Kwat$

Et la puissance reçue par la pompe (puissance sur l'arbre) est :
$P_{arb} = \frac{P_{pompe}}{\eta} = \frac{393{,}21}{0{,}85} = 462{,}6\ Kwat$

Exercice 19 :

Soit un system hydraulique de figure en face (le jet sort à l'air libre). La perte de charge du convergent est négligeable (ζ_4=0) par rapport aux pertes dues à l'entrance et aux coudes. On demande de calculer:

1. le débit en volume
2. Hmax
3. Xmax



Solution

sachant que :

P_A=2bar (pression manometrique); H=20m; D_1= 0,2m; D_2= 0,1m ; L= 300m; ζ_1= 0.08 ζ_2= ζ_3= 0.25; υ= 10^{-6} m²/s; ε = 0,8mm, $\alpha = 45°$

1. le débit

En appliquant le théorème de Bernoulli entre les points A et B:

$$\frac{P_A}{\rho g}+\frac{V_A^2}{2g}+z_A=\frac{P_B}{\rho g}+\frac{V_B^2}{2g}+z_B+\Delta H_{AB}$$

$$P_A=2\cdot 10^5\ Pa; V_A\approx 0; P_B=P_{Atm}=0$$

$$\frac{P_A}{\rho g}+z_A=\frac{V_B^2}{2g}+z_B+\Delta H_{AB}$$

$$\Delta H_{AB}=\Delta \boldsymbol{H}_{A3}=\left(\frac{\lambda\cdot L}{D_1}+\xi_1+\xi_2+\xi_3\right)\frac{V^2}{2g}+\xi_4\frac{V_B^2}{2g}$$

V est la vitesse du liquide dans la conduite

$$\Delta H_{AB} = \left(\frac{\lambda \cdot L}{D_1} + \xi_1 + \xi_2 + \xi_3\right)\frac{V^2}{2g} = \left(\frac{\lambda \cdot 300}{0,2} + 0,08 + 0,25 + 0,25\right)\frac{V^2}{2 \cdot 9,81} = (1500 \cdot \lambda + 0,58)\frac{V^2}{19,62}$$

$$\frac{P_A}{\rho g} + z_A - z_B = \frac{V_B^2}{2g} + (1500 \cdot \lambda + 0,58)\frac{V^2}{2g}$$

De l'équation de continuité: $Q = V \cdot \frac{\pi \cdot D_1^2}{4} = V_B \cdot \frac{\pi \cdot D_2^2}{4} \Rightarrow V_B = V \cdot \frac{D_1^2}{D_2^2} = 4V$

$$\frac{P_A}{\rho g} + z_A - z_B = \frac{16\ ^2}{2g} + (1500 \cdot \lambda + 0,58)\frac{V^2}{2g} \Rightarrow \frac{P_A}{\rho g} + H = \frac{16\ ^2}{2g} + (1500 \cdot \lambda + 0,58)\frac{V^2}{2g}$$

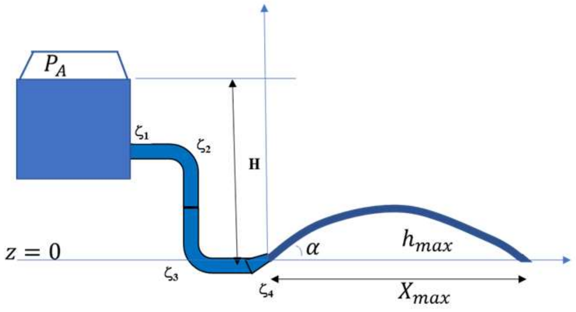
$$\Rightarrow \frac{2 \cdot 10^5}{10^3 \cdot 9,81} + 20 = (1500 \cdot \lambda + 16,58)\frac{V^2}{19,62} \qquad \Rightarrow 792,4 = (1500 \cdot \lambda + 16,58)V^2$$

$$\Rightarrow \mathrm{V} = \sqrt{\frac{792,4}{(1500 \cdot \lambda + 16,58)}}$$

En utilisant La relation de *Karmann-Prandtl*

$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log\left(\frac{\varepsilon}{3,7D}\right) = -2\log\left(\frac{0,8 \cdot 10^{-3}}{3,7 \cdot 0,2}\right) \Rightarrow \lambda$ =donne $\lambda = 0,0284$,.

$\Rightarrow V = \sqrt{\dfrac{792{,}4}{(1500 \cdot 0{,}0284 + 16{,}58)}} = 3{,}659 \text{m/s}$ $\Rightarrow V_B = 4 \cdot 3{,}659 = 14{,}637 \text{ m/s}$



$$\boxed{Q = V \cdot \frac{\pi \cdot D_1^2}{4} = 0{,}115 \text{ m}^3/\text{s}}$$

2. Hmax

Sur OX: $\gamma_X = 0 \Rightarrow V_X = V_{0X} = V_B \cdot cos\alpha \Rightarrow X = V_B \cdot cos\alpha \cdot t + X_0 = V_B \cdot cos\alpha \cdot t$

Sur OZ: $\gamma_Z = -g \Rightarrow V_X = -g \cdot t + V_{0Z} = -g \cdot t + V_B \cdot sin\alpha \Rightarrow Z = -\frac{1}{2} g t^2 + V_B \cdot sin\alpha \cdot t + Z_0 = -\frac{1}{2} g t^2 + V_B \cdot sin\alpha \cdot t$

$$\begin{cases} X = V_B \cdot cos\alpha \cdot t = 14{,}637 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot t \\ Z = -\frac{1}{2} g t^2 + V_B \cdot sin\alpha \cdot t = -\frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot t^2 + 14{,}637 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = 10{,}35 \cdot t \dots\dots\dots (1) \\ Z = 4{,}905 \cdot t^2 + 10{,}35 \cdot t \dots\dots (2) \end{cases}$$

Équation décrivant l'allure du jet De (1): $t = \dfrac{X}{10{,}35}$

(1)en (2): $Z = 4{,}905 \cdot \left(\frac{X}{10{,}35}\right)^2 + 10{,}35 \cdot \frac{X}{10{,}35} \Leftrightarrow Z = 0{,}048 \cdot X^2 + X$

$$\boxed{Z = 0{,}048 \cdot X^2 + X}$$

$Hmax\ est\ une\ valeur\ extreme\ de\ la\ fonction\ Z = f(x) c\ à\ d\ à\ Z' = \dfrac{dZ}{dX} = 0 \Rightarrow \dfrac{dZ}{dX} = 2 \cdot 0{,}048 \cdot X + 1 = 0$

$\Rightarrow 0{,}096 \cdot X + 1 = 0 \Rightarrow X = \dfrac{1}{0{,}096} = 10{,}416m$

$$\boxed{\Rightarrow \boldsymbol{H_{max} = 10{,}416m}}$$

3. Xmax

Xmax est atteint à Z=0

$$Z = 0{,}048 \cdot X^2 + X = 0$$

$$\Rightarrow soit\ X = 0\ (cas\ initiale\ )$$

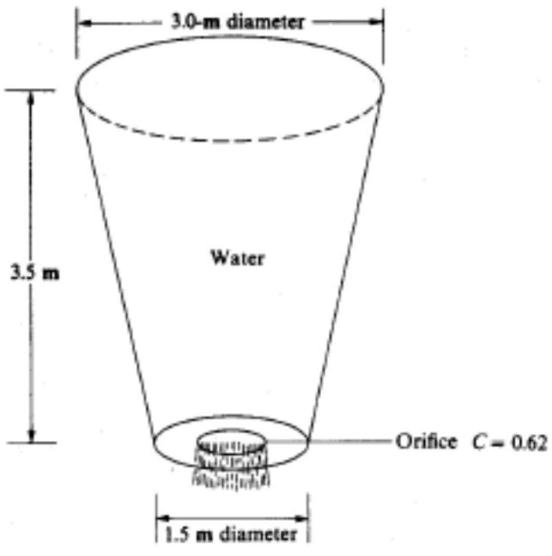
$$ou$$

$0{,}048 \cdot X + 1 = 0 \Rightarrow X = \frac{1}{0{,}048}$=20,83m

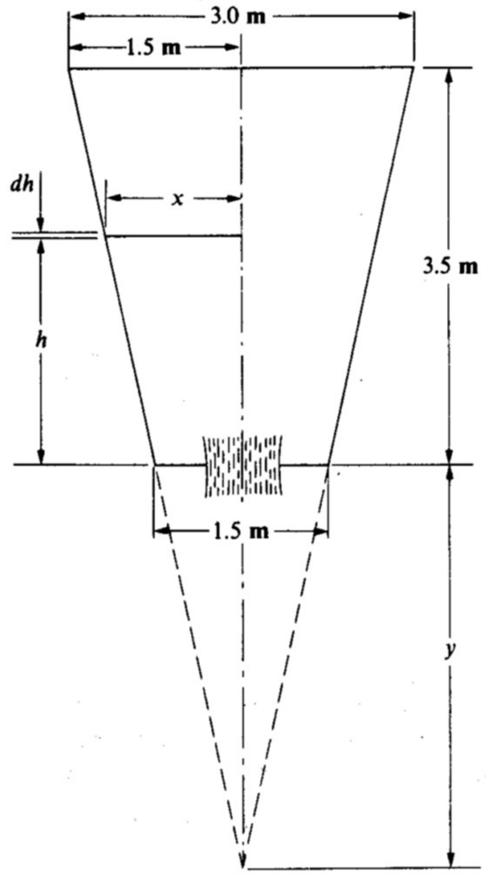
$$\boxed{\boldsymbol{X_{max} = 20{,}83m}}$$

Exercice 20

Le réservoir illustré à la Figure en bas à la forme d'un tronc de cône aux dimensions indiquées sur la figure. Le fond du réservoir contient un orifice qui a un coefficient de débit de 0,62. Le réservoir contient de l'eau jusqu'à sa profondeur de 3,5 m. Trouver le diamètre de l'orifice nécessaire pour vider le réservoir en 8 min.



(a)

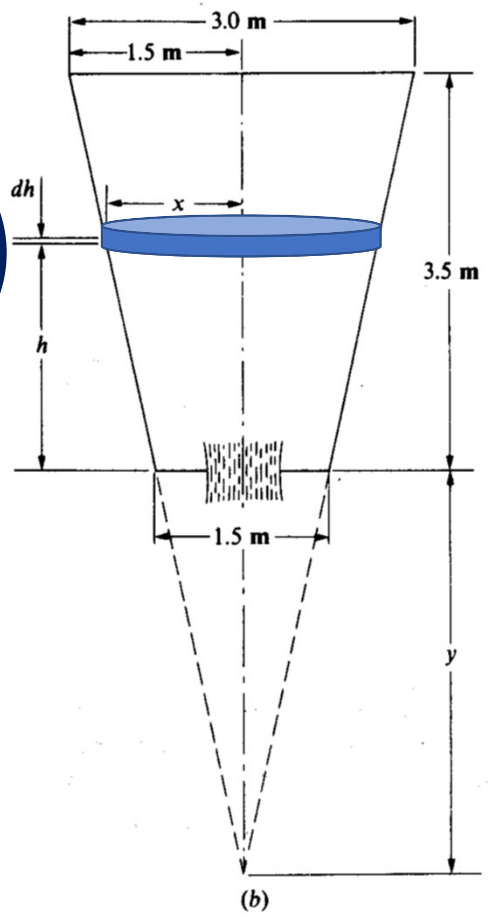


(b)

Solution

$$tg\alpha = \frac{1{,}5 - 0{,}75}{3{,}5} = 0{,}2143 \qquad ou\ tg\alpha = \frac{1{,}5}{7{,}5} = 0{,}2143$$

$$de\ plus\ tg\alpha = \frac{X - 0{,}75}{h} = 0{,}2143 \qquad \boxed{\Rightarrow X = 0{,}2143 \cdot h + 0{,}75}$$



durant un istant dt il s'ecoule un volume v =-*dh.S*

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{avec } S = \pi \cdot X^2 \Rightarrow v = -\pi \cdot X^2 \cdot dh \\ \Rightarrow v = -\pi \cdot (0{,}2143 \cdot h + 0{,}75)^2 \cdot dh \ldots\ldots..(1) \end{array}}$$

$$\boxed{\text{Ce volume } v = Q \cdot dt = C_d \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \cdot s \cdot dt \ldots\ldots\ldots\ldots(2)}$$

$$(1) = (2) \Leftrightarrow C_d \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \cdot s \cdot dt = -\pi \cdot (0{,}2143 \cdot h + 0{,}75)^2 \cdot dh$$

$$\Rightarrow 0{,}62 \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}81} \cdot \sqrt{h} \cdot s \cdot dt = -3{,}14 \cdot (0{,}2143 \cdot h + 0{,}75)^2 \cdot dh$$

$$\Rightarrow 2{,}7452 \cdot \sqrt{h} \cdot s \cdot dt = -3{,}14 \cdot (0{,}0459 \cdot h^2 + 0{,}3214 \cdot h + 0{,}5625) \cdot dh$$

$$\Rightarrow 2{,}7452 \cdot s \cdot dt = -3{,}14 \cdot (0{,}0459 \cdot h^2 + 0{,}3214 \cdot h + 0{,}5625) \cdot h^{-1/2} dh$$

$$\Rightarrow 2{,}7452 \cdot s \cdot dt = -3{,}14 \cdot \left(0{,}0459 \cdot h^{3/2} + 0{,}3214 \cdot h^{1/2} + 0{,}5625 \cdot h^{-1/2}\right) \cdot dh$$

$$\Rightarrow 2{,}7452 \cdot s \cdot dt = -\left(0{,}1441 \cdot h^{3/2} + 1{,}009 \cdot h^{1/2} + 1{,}7662 \cdot h^{-1/2}\right) \cdot dh$$

$$\Rightarrow 2{,}7452 \int_{0}^{480} s \cdot dt = -\int_{3{,}5}^{0} \left(0{,}1441 \cdot h^{3/2} + 1{,}009 \cdot h^{1/2} + 1{,}7662 \cdot h^{-1/2}\right) \cdot dh$$

$$\Rightarrow 2{,}7452 \int_{0}^{480} s \cdot dt = \int_{0}^{3{,}5} \left(0{,}1441 \cdot h^{3/2} + 1{,}009 \cdot h^{1/2} + 1{,}7662 \cdot h^{-1/2}\right) \cdot dh$$

$$\Rightarrow 2{,}7452 \cdot 480 \cdot s = \left(0{,}1441 \cdot \frac{2}{5} h^{\frac{5}{2}} + 1{,}009 \cdot \frac{2}{3} h^{\frac{3}{2}} + 1{,}7662 \cdot 2h^{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_{0}^{3{,}5}$$

$$\Rightarrow 1317{,}696 \cdot s = 1{,}321 + 4{,}4045 + 6{,}6085 = 12{,}334$$

$$\Rightarrow s = 9{,}36 \cdot 10^{-3} m^2$$

$$s = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{4s}{\pi}} = 0{,}109m = 109mm \qquad \boxed{d = 109mm}$$

Exercice 21:

Dans le système en face la pompe BC doit amener avec un débit de 160 l/s de l'huile de densité dH=0,762 au réservoir D. en admettant que l'Energie perdue de A à B est de 2,5 J/N et entre C et D de 6,5 J/N.

a. Combien la pompe doit-elle fournir en kW au système ?

b. Tracer la ligne de charge