

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique  
Université Abou Bekr BELKAID – Tlemcen



Faculté de Technologie  
Département de Génie Civil

## **POLYCOPIE DE COURS**

*Intitulé du polycopié*

### **Dynamiques des structures : Systèmes à plusieurs degrés de liberté**

Elaboré par

Dr Meddane Benmansour  
Nassima

Dr Djafour Benkelfat  
Naoual

Première Edition : Année Universitaire 2020-2021

*A la mémoire du Professeur Djafour Mustapha.*

# Avant-propos

Ce cours de dynamique des structures : systèmes à plusieurs degrés de liberté (SPDDL), s'adresse aux étudiants de la filière Génie Civil, Master 1 spécialités Structures, Constructions Métalliques et Mixtes et Voies et Ouvrages d'Arts. Notre objectif à travers son élaboration est de faciliter à l'étudiant l'assimilation et la compréhension des cours dispensés.

On note que ce cours ne peut être assimilé sans la connaissance de la partie, de la dynamique des structures, consacrée aux systèmes à un seul degré de liberté et de son vocabulaire. Il nécessite également des connaissances sur le calcul des structures, sur la méthode des éléments finis et sur le calcul numérique.

La première partie de cet ouvrage concerne la formulation des équations différentielles de mouvements des modèles discrets soumis à des sollicitations dynamiques. Il s'agit d'une étape indispensable, dans laquelle nous avons montré comment considérer les différentes caractéristiques de la structure lors d'un calcul dynamique.

La deuxième section est consacrée à l'analyse des SPDDL non amortis soumis à des vibrations libres. Cette analyse permet de déterminer les modes et les fréquences propres de vibrations de ces systèmes, grandeurs importantes pour comprendre le comportement vibratoire propre des structures.

Dans la troisième section le calcul de la réponse dynamique des systèmes à plusieurs degrés de liberté par la méthode de superposition modale est abordé. Cette méthode qui consiste à superposer les réponses modales est simple et efficace, elle permet de découpler le système des équations différentielles et de le ramener à un système des équations différentielles des oscillateurs simples à un seul degré de liberté. Comme c'est le cas de calcul des structures, on s'intéresse généralement à la réponse maximale. Pour cela, la méthode modale peut être combinée à la notion du spectre pour aboutir à une méthode de calcul rapide et efficace, c'est la méthode modale spectrale. Cette dernière a été également présentée.

Plusieurs exemples, illustratifs, ont été présentés dans ces sections.

La quatrième partie, consacrée aux travaux dirigés relatifs à ce cours, comporte trois séries avec plusieurs exercices traitant le calcul dynamique des SPDDL. Chacune des séries commence par un résumé du cours. Cette partie permet aux étudiants de pratiquer eux même les méthodes de calculs présentées.

Des éléments de réponses aux exercices proposés dans les séries des travaux dirigés ont été exposés dans la cinquième partie.

Il est possible que cette première version comporte quelques imperfections, nous serons reconnaissantes à tous ceux qui nous feraient part de leurs remarques et suggestions

Nous tenons à remercier le Pr. Matallah Mohamed et le Pr. Derras Boumédiène d'avoir accepté d'expertiser ce polycopié.

# Table des Matières

<b>Table des Matières</b> .....	<b>i</b>
<b>Liste des Figures</b> .....	<b>iv</b>
<b>Notations utilisées</b> .....	<b>vii</b>
1. Formulation des équations de mouvements des systèmes à plusieurs degrés de liberté (SPDDL) 1	
1.1 Introduction .....	1
1.2 Cas d'un exemple simple .....	1
1.3 Approche générale pour les systèmes linéaires. ....	4
1.4 Développement des caractéristiques des matrices d'une structure .....	6
1.4.1 Caractéristiques élastiques.....	6
1.4.1.1 Propriétés de la matrice $K$ .....	6
1.4.1.2 Développement de la matrice $K$ .....	7
1.4.1.3 La condensation statique .....	15
1.4.2 Caractéristiques massiques .....	16
1.4.2.1 Structure de la matrice masse .....	16
1.4.2.2 Evaluation des masses concentrées .....	17
1.4.2.3 Evaluation de la matrice masse .....	18
1.4.3 Caractéristiques d'amortissement.....	21
1.4.4 Forces extérieures .....	21
1.4.4.1 Forces extérieures appliquées aux DDL.....	21
1.4.4.2 Forces extérieures non appliquées aux DDL.....	21
1.4.4.3 Forces extérieures induites par déplacements du support .....	22
1.5 Conclusion.....	23
2. Vibrations libres des SPDDL non amorties.....	24
2.1 Introduction .....	24
2.2 Détermination des pulsations et modes propres de vibrations .....	24

2.2.1	Les pulsations propres .....	25
2.2.2	Les modes propres .....	26
2.3	Propriété d'orthogonalité des modes propres .....	30
2.4	Conclusion.....	32
3.	Vibrations forcées des systèmes à plusieurs degrés de liberté .....	33
3.1	Introduction .....	33
3.2	Méthode de superposition modale .....	33
3.2.1	Principe de la méthode .....	33
3.2.2	Découplage des équations de mouvement. Cas des vibrations forcées non amorties .....	34
3.2.3	Découplage des équations de mouvement. Cas des vibrations forcées amorties .....	36
3.2.4	Détermination des caractéristiques d'amortissement .....	38
3.2.4.1	Amortissement de RAYLEIGH .....	38
3.2.4.2	Amortissement de CAUCHY .....	40
3.2.5	Calcul de la réponse dynamique des SPDDL par la méthode de superposition modale .....	41
3.3	Calcul de la réponse sismique des SPDDL par la méthode de superposition modale .....	43
3.3.1	Réponse temporelle .....	43
3.3.2	Réponse spectrale .....	45
3.3.2.1	Réponse modale maximale.....	45
3.3.2.2	Réponse totale maximale.....	46
3.4	Choix du nombre de modes.....	47
3.5	Conclusion.....	48
4.	Travaux dirigés.....	49
4.1	Série de TD N°1 : Equations de mouvements des SPDDL .....	49
4.1.1	Rappel de la formulation des équations de mouvement des SPDDL .....	49
4.1.2	Exercices.....	50
4.2	Série de TD N°2 : Calcul de la réponse dynamique des SPDDL par la méthode de superposition modale.....	53
4.2.1	Résumé du calcul de la réponse dynamique par la méthode de superposition modale	53
4.2.2	Exercices.....	54

4.3	Série de TD N°3 : Analyse modale spectrale .....	57
4.3.1	Résumé de la méthode modale spectrale .....	57
4.3.2	Exercices.....	58
5.	Eléments de réponses aux exercices des travaux dirigés .....	61
5.1	Série de TD N°1. ....	61
5.2	Série de TD N°2. ....	62
5.3	Série de TD N°3. ....	64
	<b>Bibliographies .....</b>	<b>67</b>

# Liste des Figures

Figure 1-1. Modèle simplifié d'un bâtiment par un système à deux DDL.....	2
Figure 1-2. (a) Modèle masse-ressort-amortisseur du bâtiment, (b) Forces agissantes sur les masses.....	2
Figure 1-3. Exemple de calcul de la matrice $K$ par la méthode directe,.....	9
Figure 1-4. Modèle à deux masses concentrées d'une poutre simplement appuyée. ....	10
Figure 1-5. Représentation des coefficients de flexibilité.....	11
Figure 1-6. Calcul de $\delta_{11}$ .....	12
Figure 1-7. Calcul de $\delta_{21}$ .....	13
Figure 1-8. Modèle à 2 masses concentrées d'une poutre console.....	14
Figure 1-9. Modèle en éléments finis de la poutre console.....	15
Figure 1-10. Concentration de la masse aux nœuds d'une poutre.....	18
Figure 1-11. Poutre à quatre DDL utilisée dans l'Exemple 1.6.....	19
Figure 1-12. Modèle utilisé dans l'exemple 1.7. ....	20
Figure 1-13. Exemple de calcul du vecteur chargement.....	22
Figure 1-14. Exemples de calcul du vecteur $\Delta$ . ....	23
Figure 2-1. Modèle d'un portique à 2 DDL.....	27
Figure 2-2. Modes propres du portique de l'Exemple 2.1 .....	30
Figure 3-1. Amortissement de Rayleigh. ....	39
Figure 4-1. Modèles masse-ressort-amortisseur de deux systèmes à 3 DDL .....	50
Figure 4-2. Portique constituant le bâtiment (Exercice 1.2). ....	51
Figure 4-3. Modèle de la structure étudiée en Exercice 1.3 .....	51
Figure 4-4. Modèle de la poutre étudiée en Exercice 1.4 .....	52
Figure 4-5. Modèle de la barre étudiée en Exercice 1.5 .....	52
Figure 4-6. Modèle utilisé dans Exercice 1.6.....	53
Figure 4-7. Modèle de la poutre étudié en Exercice 2.1 .....	55

Figure 4-8. Modèle du bâtiment étudié en Exercice 2.2.....	56
Figure 4-9. Portique à 2 DDL utilisé pour l'Exercice 2.3.....	56
Figure 4-10. Chargements appliquées au portique de l'Exercice 2.2.....	57
Figure 4-11. Portique constituant le bâtiment étudié en Exercice 3.1.....	59
Figure 4-12. Spectre de Pseudo vitesse (Exercice 3.1).....	59
Figure 5-1. Diagrammes des efforts tranchant (T) et des moments fléchissant (M) à $t=T_2$ ....	63



## Notations utilisées

$\alpha$	Constante liée à l'amortissement de RAYLEIGH
$\beta$	Constante liée à l'amortissement de RAYLEIGH
$\beta_i$	Rapport des fréquences relatif au mode $i$
$\Delta$	Vecteur des coefficients d'influence du déplacement du support sur le DDL.
$\delta$	Matrice de flexibilité
$\delta_{ij}$	Coefficients de la matrice flexibilité.
$\theta$	Angle de déphasage ; rotation
$\theta_i$	Angle de déphasage relatif au mode $i$
$\xi_i$	Amortissement modale correspondant au mode $i$
$\rho_{ij}$	Coefficient de corrélation entre les modes $i$ et $j$
$\Phi$	Matrice modale
$\phi_i$	Mode propre $i$
$\Omega$	Matrice spectrale
$\omega_i$	Pulsation propre du mode $i$
$\omega_{d_i}$	Pulsation propre amortie du mode $i$
$A$	Vecteur des amplitudes des déplacements
$a_i$	Facteur de participation modale
$C$	Matrice d'amortissement.

$C_i^*$	Amortissement généralisé
$c_i$	Constante d'amortissement d'un amortisseur $i$ .
$c_{ij}$	Coefficient d'influence de la matrice d'amortissement
DDL	Degré de liberté.
$E$	Module d'Young
$F_I$	Vecteur des forces d'inertie.
$F_D$	Vecteur des forces d'amortissement.
$F_S$	Vecteur des forces de rigidité.
$F_e$	Vecteur des forces élastiques.
$F_{I_i}$	Force d'inertie en DDL $i$
$F_{D_i}$	Force d'amortissement en DDL $i$
$F_{S_i}$	Force de rigidité en DDL $i$
$f_i$	Fréquence propre du mode $i$
$f_{I_i}$	Force d'inertie correspondante à la masse $m_i$
$f_{D_i}$	Force d'amortissement d'un amortisseur $i$ .
$f_{S_i}$	Force de rigidité d'un ressort $i$ .
$J_0$	Inertie rotationnel
$I$	Moment d'inertie
$K$	Matrice de rigidité
$K_{el}$	Matrice de rigidité élémentaire
$K_r$	Matrice de rigidité réduite.
$K_i^*$	Rigidité généralisée
$k_i$	Rigidité d'un ressort $i$ .

$k_{ij}$	Coefficient d'influence de la matrice de rigidité
$M$	Matrice masse.
$M_i^*$	Masse généralisée
$m_i$	Masse concentrée au DDL $i$ .
$m_i^*$	Masse modale relative au mode $i$ .
$m_{ij}$	Coefficient d'influence de la matrice masse
$\bar{m}$	Masse répartie
$N$	Nombre de degrés de liberté.
$N_{mn}$	Nombre de modes nécessaire
$P(t)$	Vecteur des forces extérieures
$P_i^*(t)$	Force généralisée
$p_i(t)$	Force extérieure appliquée au DDL $i$
$P_{eff}(t)$	Vecteur des forces effectives relatives au déplacement de support
$q(t)$	Vecteur déplacement en coordonnées modales
$q_i(t)$	Déplacement en coordonnées modales relatif au mode $i$
$R$	Réponse maximale
$R_i$	Réponse maximale relative au mode $i$ .
$S_A$	Spectre en pseudo-accélération
$S_V$	Spectre en pseudo vitesse
$S_D$	Spectre en déplacement
SPDDL	Système à plusieurs DDL
SSDDL	Systèmes à un seul DDL
$T_i$	Période propre du mode $i$
$u$	Vecteur déplacement

$\dot{u}$	Vecteur vitesse
$\ddot{u}$	Vecteur accélération
$u_i$	Déplacement au DDL $i$
$u(t)^{(i)}$	Déplacement modal correspondant au mode $i$
$\dot{u}_i$	Vitesse au DDL $i$ .
$\ddot{u}_i$	Accélération en DDL $i$ .
$u_g$	Déplacement du support.
$u_r$	DDL requis
$u_{nr}$	DDL non requis.

# 1. Formulation des équations de mouvements des systèmes à plusieurs degrés de liberté (SPDDL)

## 1.1 Introduction

En réalité les structures possèdent une infinité de degrés de liberté (DDL) : possibilité de déplacement. Les DDL sont représentés par les déplacements d'un nombre fini de points de la structure appelés nœuds où sont artificiellement concentrées les masses des éléments de la structure qui sont, toutefois, réellement réparties.

Le nombre de DDL d'un système  $N$  est le nombre de composantes de déplacements et de rotations requises pour décrire convenablement le comportement dynamique de la structure. Ces composantes sont évaluées en chacun des nœuds de la structure. Dans le cas général (3D), nous avons six (6) DDL par nœud : 3 translations et 3 rotations.

Les inconnus du problème sont alors les translations et les rotations des masses en fonction du temps. Pour les déterminer il faut passer d'abord par la formulation des équations de mouvement des SPDDL, ceci représente l'objectif de cette première section.

## 1.2 Cas d'un exemple simple

La Figure 1-1 montre le modèle d'un bâtiment à deux étages. Les planchers sont supposés infiniment rigides. Ils sont supportés par des poteaux sans masse. Les masses des planchers  $m_1$  et  $m_2$  sont considérées concentrées, ce qui permet de traiter cette structure comme un système à deux DDL dans le cas où elle serait soumise à des excitations horizontales  $p_1(t)$  et  $p_2(t)$ . Les DDL admis sont les déplacements horizontaux des planchers  $u_1$  et  $u_2$ . Par ailleurs, les déformations axiales des poteaux et poutres sont négligeables dans le calcul des rigidités équivalentes de chacun des niveaux  $k_1$  et  $k_2$ . La Figure 1-2 (a) montre un modèle masse-ressort-amortisseur de la même structure.

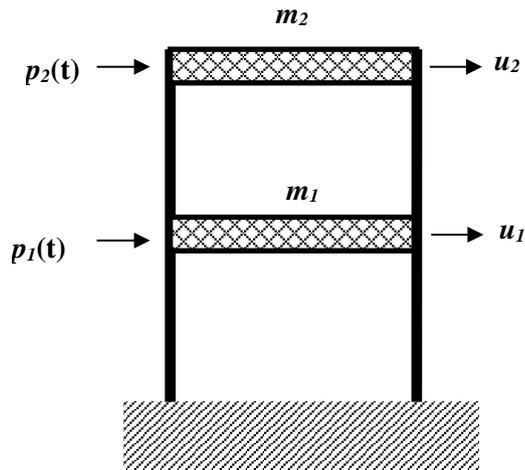


Figure 1-1. Modèle simplifié d'un bâtiment par un système à deux DDL.

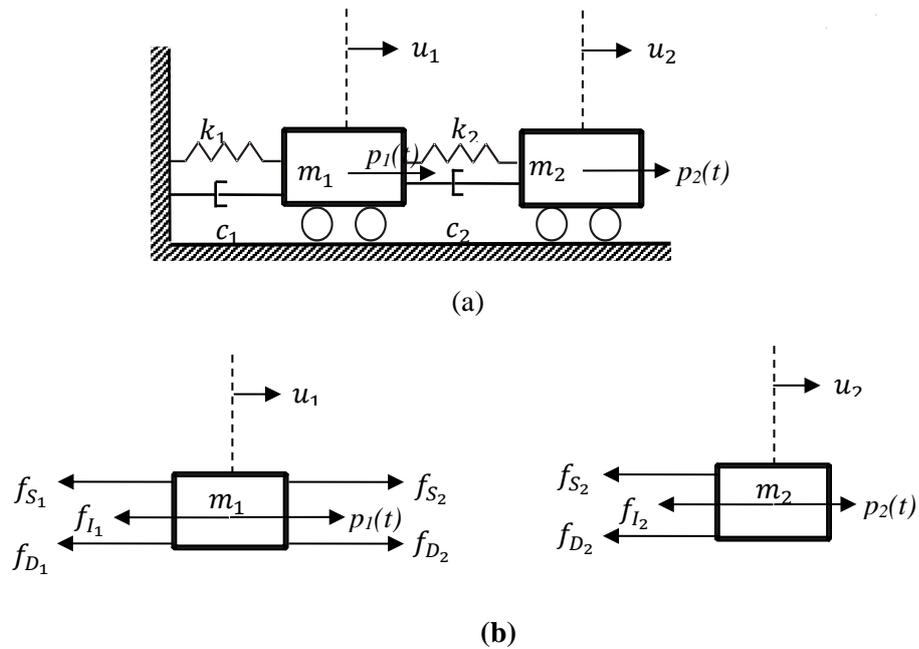


Figure 1-2. (a) Modèle masse-ressort-amortisseur du bâtiment, (b) Forces agissantes sur les masses.

Les forces agissantes sur les masses  $m_1$  et  $m_2$  sont représentées par la Figure 1-2 (b). Où :

$f_{I_1}$  et  $f_{I_2}$  sont les forces d'inertie correspondantes aux masses  $m_1$  et  $m_2$ . Elles s'expriment à partir des accélérations  $\ddot{u}_1$  et  $\ddot{u}_2$  comme suit :

$$f_{I_1} = m_1 \ddot{u}_1; f_{I_2} = m_2 \ddot{u}_2$$

(1-1)

$f_{D_1}$  et  $f_{D_2}$  sont les forces d'amortissement développées respectivement dans les amortisseurs  $c_1$  et  $c_2$ . Elles sont données en fonction des vitesses  $\dot{u}_1$  et  $\dot{u}_2$  :

$$f_{D_1} = c_1 \dot{u}_1; f_{D_2} = c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) \quad (1-2)$$

$f_{S_1}$  et  $f_{S_2}$  sont les forces de rigidité développées respectivement dans les ressorts  $k_1$  et  $k_2$ . Elles sont liées aux déplacements  $u_1$  et  $u_2$  :

$$f_{S_1} = k_1 u_1; f_{S_2} = k_2(u_2 - u_1) \quad (1-3)$$

Les équations de mouvement du système à deux DDL peuvent être formulées grâce au principe de D'Alembert, en considérant l'équilibre des forces agissantes sur les deux DDL. Ainsi on obtient le système à deux équations suivant :

$$\begin{cases} f_{I_1} + f_{D_1} - f_{D_2} + f_{S_1} - f_{S_2} = p_1(t) \\ f_{I_2} + f_{D_2} + f_{S_2} = p_2(t) \end{cases} \quad (1-4)$$

Remplaçons les équations (1-1) à (1-3) dans l'équation (1-4), nous obtenons le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{u}_1 + c_1 \dot{u}_1 - c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + k_1 u_1 - k_2(u_2 - u_1) = p_1(t) \\ m_2 \ddot{u}_2 + c_2(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + k_2(u_2 - u_1) = p_2(t) \end{cases} \quad (1-5)$$

L'équation (1-5) s'écrit sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{Bmatrix} \quad (1-6)$$

En introduisant les notations suivantes :

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}; K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}; P(t) = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{Bmatrix}$$

$$\ddot{u} = \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix}; \dot{u} = \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} \text{ et } u = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}.$$

L'équation (1-6) devient :

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = P(t) \quad (1-7)$$

On note que l'équation de mouvement dynamique du modèle à deux DDL traité dans cette partie aboutit à un système de deux équations différentielles couplées.

### 1.3 Approche générale pour les systèmes linéaires.

Dans le cas des SPDDL, les équations de mouvement d'un système discret à  $N$  DDL peuvent être obtenues par le principe de D'Alembert. Pour chaque DDL  $i$  on considère l'équilibre des forces agissantes, les équations de mouvement du système s'expriment alors par l'équation (1-8) ci-dessous.

$$F_{I_i} + F_{D_i} + F_{S_i} = p_i(t) \quad (i = 1, \dots, N) \tag{1-8}$$

Avec :

$F_{I_i}$  : Force d'inertie en DDL  $i$

$F_{D_i}$  : Force d'amortissement en DDL  $i$

$F_{S_i}$  : Force de rigidité en DDL  $i$

$p_i(t)$  : Force extérieure en DDL  $i$

En considérant le principe de superposition, les forces d'inertie, d'amortissement et élastiques sont développées comme suit :

- Les forces élastiques  $F_{S_i}$  :

$$F_{S_i} = k_{i1}u_1 + k_{i2}u_2 + \dots + k_{ij}u_j + \dots + k_{iN}u_N = \sum_{j=1}^N k_{ij}u_j \quad (i = 1, \dots, N) \tag{1-9}$$

Soit sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} F_{S_1} \\ F_{S_2} \\ \vdots \\ F_{S_i} \\ \vdots \\ F_{S_N} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1j} & \dots & k_{1N} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2j} & \dots & k_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{i1} & k_{i2} & \dots & k_{ij} & \dots & k_{iN} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{N1} & k_{N2} & \dots & k_{iN} & \dots & k_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_j \\ \vdots \\ u_N \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad F_S = Ku \tag{1-10}$$

$F_S$  est le vecteur des forces de rigidité. Il donne le produit entre le vecteur déplacement  $u$  et la matrice de rigidité du système  $K$ . Chacun des coefficients d'influence de rigidité  $k_{ij}$  représente la force élastique correspondante au DDL  $i$  produite par un déplacement unitaire dans la direction du DDL  $j$  quand tous les autres déplacements sont nuls.

- Les forces d'amortissement  $F_{D_i}$  :

$$F_{D_i} = c_{i1}\dot{u}_1 + c_{i2}\dot{u}_2 + \dots + c_{ij}\dot{u}_j + \dots + c_{iN}\dot{u}_N = \sum_{j=1}^N c_{ij}\dot{u}_j \quad (i = 1, \dots, N) \quad (1-11)$$

Soit sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} F_{D_1} \\ F_{D_2} \\ \vdots \\ F_{D_i} \\ \vdots \\ F_{D_N} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2j} & \dots & c_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{iN} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{N1} & c_{N2} & \dots & c_{iN} & \dots & c_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \vdots \\ \dot{u}_j \\ \vdots \\ \dot{u}_N \end{Bmatrix} \quad \text{Où} \quad F_D = C\dot{u} \quad (1-12)$$

$F_D$  est le vecteur des forces d'amortissement. Il s'exprime en fonction du vecteur vitesse  $\dot{u}$  au moyen de la matrice d'amortissement  $C$ . Les coefficients d'influence  $c_{ij}$  de la matrice  $C$  représente la force d'amortissement correspondante au DDL  $i$ , due à une vitesse unitaire appliquée dans la direction du DDL  $j$  quand toutes les autres vitesses sont nulles.

- Les forces d'inertie  $F_{I_i}$  :

$$F_{I_i} = m_{i1}\ddot{u}_1 + m_{i2}\ddot{u}_2 + \dots + m_{ij}\ddot{u}_j + \dots + m_{iN}\ddot{u}_N = \sum_{j=1}^N m_{ij}\ddot{u}_j \quad (i = 1, \dots, N) \quad (1-13)$$

Soit sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} F_{I_1} \\ F_{I_2} \\ \vdots \\ F_{I_i} \\ \vdots \\ F_{I_N} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1j} & \dots & m_{1N} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2j} & \dots & m_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{i1} & m_{i2} & \dots & m_{ij} & \dots & m_{iN} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{N1} & m_{N2} & \dots & m_{iN} & \dots & m_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \vdots \\ \ddot{u}_j \\ \vdots \\ \ddot{u}_N \end{Bmatrix} \quad \text{Où} \quad F_I = M\ddot{u} \quad (1-14)$$

$F_I$  est le vecteur des forces d'inertie. Il est relié au vecteur des accélérations  $\ddot{u}$  par la matrice masse  $M$ . Les composantes de la matrice  $m_{ij}$  représentent la force d'inertie correspondante suivant le DDL  $i$ , produite par une accélération unitaire dans la direction du DDL  $j$  quand toutes les autres accélérations sont nulles.

En conséquence, pour les systèmes linéaires chacune des forces, d'inertie, d'amortissement ou élastiques s'exprime à l'aide des coefficients d'influence traduisant la dépendance de la force en un DDL  $i$  sur le mouvement de tous les autres DDL. Ainsi l'Eq. (1-8) peut être écrite sous la forme suivante.

$$\sum_{j=1}^N m_{ij} \ddot{u}_j + \sum_{j=1}^N c_{ij} \dot{u}_j + \sum_{j=1}^N k_{ij} u_j = p_i(t) \quad (i = 1, \dots, N) \quad (1-15)$$

Ou bien sous forme de vecteur de forces :

$$F_I + F_D + F_S = P(t) \quad (1-16)$$

Où  $P(t)$  est le vecteur des forces extérieures.

L'eq.(1-16) donne la forme matricielle des équations de mouvement des SPDDL. Il est à noter que ces équations s'expriment par un système d'équations différentielles du second ordre couplées.

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = P(t). \quad (1-17)$$

Connaissant les différentes matrices  $M$ ,  $C$  et  $K$  ainsi que le vecteur  $P(t)$  l'équation de mouvement des SPDDL peut être donc formulée.

#### **1.4 Développement des caractéristiques des matrices d'une structure**

##### **1.4.1 Caractéristiques élastiques**

###### **1.4.1.1 Propriétés de la matrice $K$**

###### **a. $K$ définie positive**

L'énergie de déformation  $V$  accumulée dans une structure sous l'action des chargements  $p_i$  appliqué aux DDL  $u_i$  est exprimée par :

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N p_i u_i = \frac{1}{2} P^T u \quad (1-18)$$

Où  $P^T$  représente la transposé du vecteur  $P$ .

Sachant qu'en statique  $P = K u$ , et en transposant l'Eq. (1-18), l'énergie de déformation s'écrit en fonction de la rigidité (matrice carrée) par la relation suivante :

$$V = \frac{1}{2} u^T K u \quad (1-19)$$

Comme l'énergie de déformation est une quantité positive, il s'ensuit que  $K$  est une matrice définie positive et inversible (s'il n'y a pas de déplacements rigides).

b.  $K$  symétrique

A partir du théorème de réciprocité de Maxwell-Betti on peut avoir une propriété très intéressante. Soit deux champs de forces  $P_1$  et  $P_2$  induisant les champs de déplacements  $u_1$  et  $u_2$ , par conséquent le travail de  $P_1$  dans le champ  $u_2$  est égal au travail de  $P_2$  dans le champ  $u_1$  :

$$P_1^T u_2 = P_2^T u_1 \tag{1-20}$$

On sait que :

$$P_1^T u_2 = u_1^T K^T u_2 \tag{1-21}$$

$$P_2^T u_1 = (P_2^T u_1)^T = u_1^T P_2 = u_1^T K u_2 \tag{1-22}$$

Tenant en compte des égalités obtenues à travers les équations de (1-20) à (1-22), on déduit que  $K$  est une matrice symétrique (Eq. (1-23)).

$$K = K^T \tag{1-23}$$

1.4.1.2 Développement de la matrice  $K$

Les caractéristiques élastiques d'une structure peuvent être définies par sa rigidité ou bien par sa flexibilité. La matrice de rigidité peut aussi être déterminée par la méthode des éléments finis.

a. Méthode directe ou de rigidité

La matrice de rigidité  $K$  est déterminée dans ce cas par la définition directe de ses éléments  $k_{ij}$ . Ces derniers représentent les forces développées dans la structure suite à l'application d'un déplacement unitaire suivant le DDL  $j$  quand les autres déplacements sont nuls (bloqués).

**Exemple 1.1**

A titre d'exemple on utilise la méthode directe pour la détermination de la matrice de rigidité du modèle de la Figure 1-1.

C'est un modèle à deux DDL donc la matrice  $K$  a les dimensions  $2 \times 2$ , elle s'écrit comme suit :

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

Lorsqu'on applique un déplacement  $u_1$  unitaire à la masse  $m_1$  ( $u_1 = 1$ ) et on maintient le déplacement  $u_2$  de la masse  $m_2$  nul ( $u_2 = 0$ ) les forces élastiques  $k_{11}$  et  $k_{21}$  qui se développent respectivement suivant les DDL  $u_1$  et  $u_2$  sont les suivantes :

$$k_{11} = k_1 u_1 + k_2 u_1 = k_1 + k_2$$

$$k_{21} = -k_2 u_1 = -k_2$$

De même, si un déplacement unitaire  $u_2$  est appliqué à la masse  $m_2$  ( $u_2 = 1$ ), tout en maintenant une valeur nulle pour  $u_1$  ( $u_1 = 0$ ), il en résulte les forces élastiques  $k_{12}$  et  $k_{22}$  qui se développent respectivement suivant les DDL  $u_1$  et  $u_2$ . Ces forces s'expriment comme suit :

$$k_{12} = -k_2 u_2 = -k_2$$

$$k_{22} = k_2 u_2 = k_2$$

La matrice de rigidité de cette structure est donc :

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

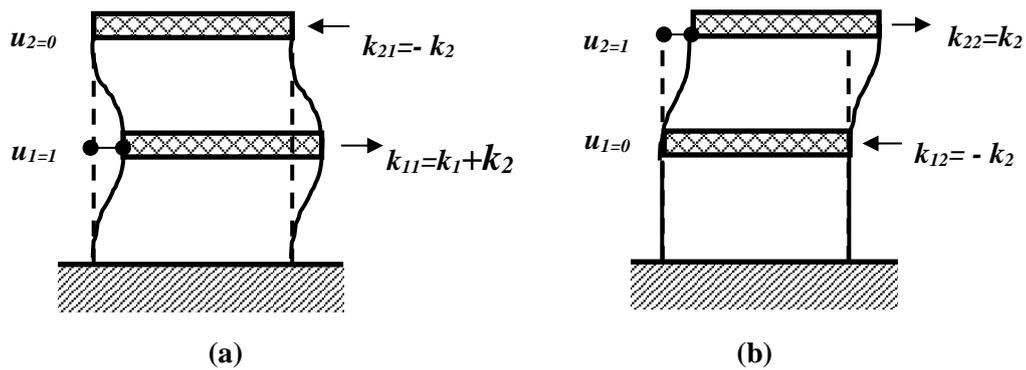
b. Méthode de flexibilité

On sait que les forces élastiques sont égales au produit de la matrice de rigidité par le vecteur déplacement. D'autre part la matrice  $K$  est une matrice définie positive. Elle possède donc toujours son inverse nommée la matrice de flexibilité. Cette dernière multipliée par le vecteur chargement donne les déplacements (Eq.(1-24) et (1-25)).

$$F_s = Ku \Rightarrow u = K^{-1}F_s \Rightarrow u = \delta F_s \tag{1-24}$$

$\delta$  est la matrice de flexibilité, elle est égale à :

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1j} & \cdots & \delta_{1N} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2j} & \cdots & \delta_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \delta_{i1} & \delta_{i2} & \cdots & \delta_{ij} & \cdots & \delta_{iN} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \delta_{N1} & \delta_{N2} & \cdots & \delta_{iN} & \cdots & \delta_{NN} \end{bmatrix} \tag{1-25}$$



**Figure 1-3. Exemple de calcul de la matrice  $K$  par la méthode directe,**

**(a) Déplacement unitaire appliqué à la masse  $m_1$  ( $u_1 = 1$ ),**

**(b) Déplacement unitaire appliqué au nœud  $m_2$  ( $u_2 = 1$ ).**

La matrice de rigidité d'une structure peut être alors déterminée à partir de la matrice de flexibilité  $\delta$ :

$$K = \delta^{-1} \tag{1-26}$$

Le déplacement en chaque DDL  $i$  s'exprime par la relation suivante :

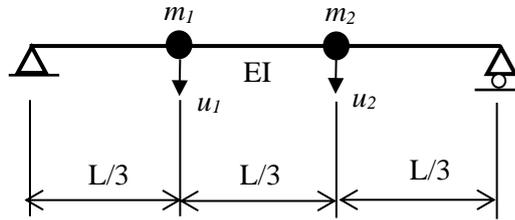
$$u_i = \sum_{j=1}^N \delta_{ij} F_{S_j} \quad (i = 1, \dots, N) \tag{1-27}$$

Le coefficient de flexibilité  $\delta_{ij}$  représente donc le déplacement (rotation) en  $i$  dû à une force (moment) unitaire appliquée en  $j$  lorsque tous les autres DDL sont nuls. Le calcul des  $\delta_{ij}$  peut être effectué par les méthodes statiques de résistance des matériaux.

**Exemple 1.2**

Soit à déterminer la matrice de rigidité par la méthode de flexibilité de la poutre en béton armé montrée par la Figure 1-4. Le modèle retenu est un modèle à deux masses concentrées égales

respectivement à  $m_1$  et  $m_2$ . Seuls les déplacements verticaux sont considérés. La raideur de la poutre est  $EI$ , sa longueur est  $L$ .



**Figure 1-4. Modèle à deux masses concentrées d'une poutre simplement appuyée.**

En utilisant la méthode de flexibilité on a :

$$K = \delta^{-1} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix}^{-1}$$

$\delta_{11}$  et  $\delta_{21}$  sont respectivement les déplacements suivant les DDL 1 et 2 dues à l'application d'une force unitaire en DDL 1 (Figure 1-5 (a)).

$\delta_{12}$  et  $\delta_{22}$  sont respectivement les déplacements suivant les DDL 1 et en 2 dues à l'application d'une force unitaire en DDL 2 (Figure 1-5 (b)).

Les coefficients de flexibilité sont calculés par la statique (l'intégrale de Maxwell-Mohr) tel que :

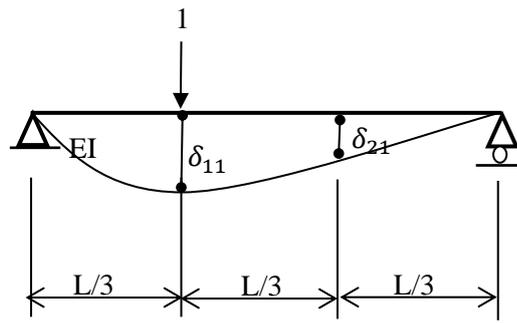
$$\delta_{ij} = \frac{1}{EI} \int_0^L M_i M_j dx = \frac{1}{EI} A y_G$$

Avec :

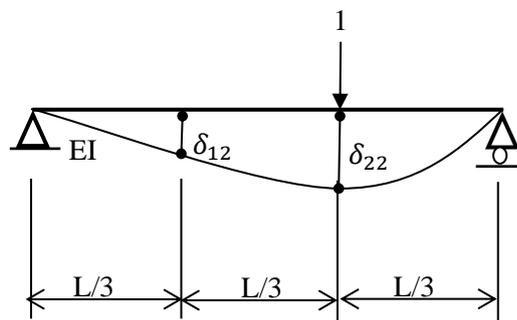
$M_i$  et  $M_j$  sont les moments fléchissant obtenus suite à l'application des forces unitaires respectivement en  $i$  et en  $j$ .

$A$  est l'aire du diagramme des moments  $M_i$ .

$y_G$  est la projection du centre de gravité  $G$  de  $M_i$  sur  $M_j$ .



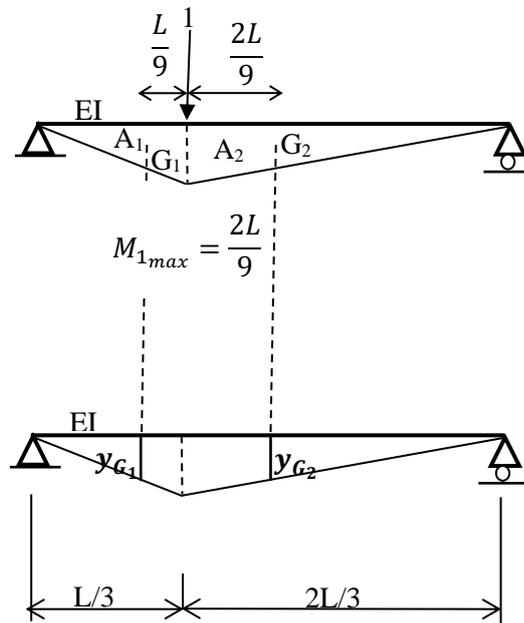
(a)



(b)

**Figure 1-5. Représentation des coefficients de flexibilité.**

- $\delta_{11} = \frac{1}{EI} (A_1 y_{G_1} + A_2 y_{G_2})$



**Figure 1-6. Calcul de  $\delta_{11}$ .**

$$A_1 = \frac{1}{2} \frac{L}{3} \frac{2L}{9} = \frac{L^2}{27}$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \frac{2L}{3} \frac{2L}{9} = \frac{2L^2}{27}$$

$$y_{G_1} = \frac{2}{3} \frac{2L}{9} = \frac{4L}{27}$$

$$y_{G_2} = \frac{2}{3} \frac{2L}{9} = \frac{4L}{27}$$

$$\delta_{11} = \frac{4L^3}{243 EI}$$

- La poutre est symétrique donc :

$$\delta_{22} = \delta_{11} = \frac{4L^3}{243 EI}$$

- $\delta_{21} = \frac{1}{EI} (A_1 y_{G_1} + A_2 y_{G_2} + A_3 y_{G_3})$

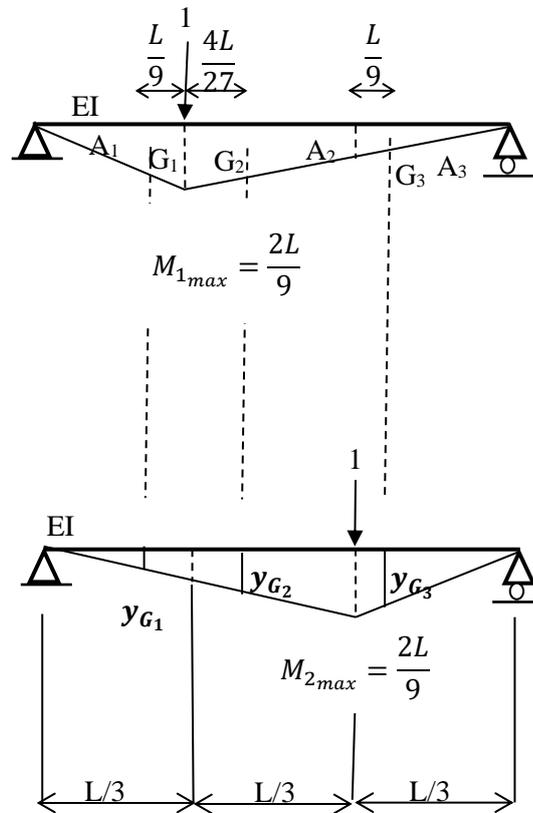


Figure 1-7. Calcul de  $\delta_{21}$ .

$$A_1 = \frac{1}{2} \frac{L}{3} \frac{2L}{9} = \frac{L^2}{27}$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{L}{9} + \frac{2L}{9} \right) \frac{L}{3} = \frac{L^2}{18}$$

$$A_3 = \frac{1}{2} \frac{L}{3} \frac{L}{9} = \frac{L^2}{54}$$

$$y_{G_1} = \frac{2L}{3 \cdot 9} = \frac{2L}{27}$$

$$y_{G_2} = \left( \frac{4L}{27} + \frac{L}{3} \right) \frac{L}{9} \frac{3}{L} = \frac{13L}{81}$$

$$y_{G_3} = \frac{2}{3} \frac{2L}{9} = \frac{4L}{27}$$

$$\delta_{21} = \frac{7L^3}{486EI}$$

- $\delta_{21} = \delta_{12}$  (La matrice de flexibilité est symétrique)

La matrice de flexibilité est donc égale à :

$$\delta = \frac{L^3}{486EI} \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Par conséquent la matrice de rigidité est :

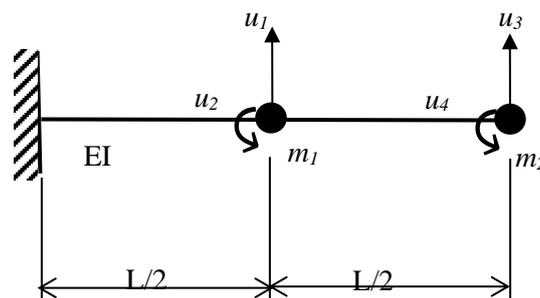
$$K = \frac{162 EI}{5L^3} \begin{bmatrix} 8 & -7 \\ -7 & 8 \end{bmatrix}$$

c. Méthode des éléments finis

Comme il a été mentionné précédemment la matrice de rigidité peut être déterminée en calculant les coefficients de rigidité ou de flexibilité correspondant à la structure. Cependant, ce calcul devient laborieux sachant qu'en réalité toute structure possède une infinité de DDL. Dans ce cas précis, la méthode des éléments finis devient plus pratique. Par cette méthode, la structure est modélisée par un nombre fini d'éléments liés par des nœuds. La matrice de rigidité de la structure est déterminée par assemblage des matrices de rigidité élémentaires des éléments finis. Ces dernières peuvent être calculées par les méthodes de rigidité ou de flexibilité.

**Exemple 1.3**

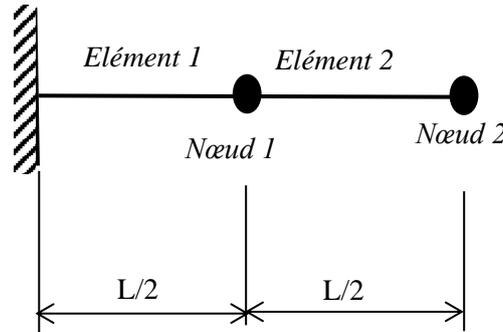
La Figure 1-8 montre un modèle (une console) à 2 masses concentrées  $m_1$  et  $m_2$ . Ce modèle est retenu pour l'étude d'une poutre de longueur  $L$  et de raideur  $EI$ . Cette poutre est encastrée en une extrémité et libre dans l'autre. Quatre 4DDL (2 translations et 2 rotations) sont considérés et schématisés sur le modèle. Dans ce cas, on veut calculer la matrice de rigidité par la méthode des éléments finis. La poutre est modélisée par deux éléments finis de type "poutre" liés entre eux par le nœud 1 (Figure 1-9).



**Figure 1-8. Modèle à 2 masses concentrées d'une poutre console.**

La matrice de rigidité  $K_{el}$  d'un élément poutre de longueur  $L/2$  soumise à la flexion s'écrit comme suit :

$$K_{el} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ -6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$



**Figure 1-9. Modèle en éléments finis de la poutre console.**

La matrice de rigidité de la poutre est alors déterminée par assemblage des deux matrices élémentaires correspondantes aux éléments poutres de longueur  $L/2$  toute en tenant compte des conditions aux limites. La matrice  $K$  est égale à :

$$K = \frac{8EI}{L^3} \begin{bmatrix} 24 & 0 & -12 & 3L \\ 0 & 2L^2 & -3L & L^2/2 \\ -12 & -3L & 12 & -3L \\ 3L & L^2/2 & -3L & L^2 \end{bmatrix}$$

#### 1.4.1.3 La condensation statique

La condensation statique consiste à éliminer de la matrice de rigidité les termes correspondants aux DDL non requis  $u_{nr}$ . C'est à dire trouver la matrice de rigidité réduite qui ne concerne que les DDL requis  $u_r$ , elle est notée  $K_r$ . On peut écrire donc :

$$F_{s_r} = K_r u_r \tag{1-28}$$

Où  $F_{s_r}$  sont les forces élastiques correspondantes aux DDL requis.

Les forces élastiques  $F_s$  et les déplacements  $u$  peuvent être réécrits en séparant les DDL requis des DDL non requis (Eq. (1-29)). Il est évident que les forces élastiques des DDL non requis doivent disparaître.

$$F_s = \begin{Bmatrix} F_{s_r} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad u = \begin{Bmatrix} u_r \\ u_{nr} \end{Bmatrix} \tag{1-29}$$

En divisant la matrice de rigidité en sous matrices, on obtient la relation suivante :

$$\begin{Bmatrix} F_{sr} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r \\ u_{nr} \end{Bmatrix} \quad (1-30)$$

Tenant en compte l'équation (1-30) on a :

$$Cu_r + Du_{nr} = 0 \Rightarrow u_{nr} = -D^{-1}C u_r \quad (1-31)$$

$$\Rightarrow F_{sr} = Au_r + B(-D^{-1}Cu_r) = (A - BD^{-1}C)u_r \quad (1-32)$$

Comparant les deux équations (1-28) à (1-31) on déduit que :

$$k_r = A - BD^{-1}C \quad (1-33)$$

#### **Exemple 1.4**

Dans cet exemple on utilisera la méthode de condensation statique pour calculer la matrice de rigidité de la poutre donnée par la Figure 1-8 en ne considérant, comme DDL, que les déplacements verticaux des masses  $u_1$  et  $u_3$ , les rotations  $u_2$  et  $u_4$  sont donc des DDL non requis. L'équation (1-32) s'écrit dans ce cas comme suit :

$$\begin{Bmatrix} F_{sr1} \\ F_{sr2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{8EI}{L^3} \begin{bmatrix} 24 & -12 & 0 & 3L \\ -12 & 12 & -3L & -3L \\ 0 & -3L & 2L^2 & L^2/2 \\ 3L & -3L & L^2/2 & L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_3 \\ u_2 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

$$k_r = \frac{8EI}{L^3} \left( \begin{bmatrix} 24 & -12 \\ -12 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3L \\ -3L & -3L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2L^2 & L^2/2 \\ L^2/2 & L^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -3L \\ 3L & -3L \end{bmatrix} \right)$$

$$k_r = \frac{8EI}{L^3} \left( \begin{bmatrix} 24 & -12 \\ -12 & 12 \end{bmatrix} - \frac{2}{7} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \right)$$

$$k_r = \frac{48EI}{7L^3} \begin{bmatrix} 16 & -5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

#### 1.4.2 *Caractéristiques massiques*

##### 1.4.2.1 *Structure de la matrice masse*

L'approche par concentration des masses suppose qu'au lieu que la masse soit répartie le long de l'élément, elle est supposée concentrée en un nombre de nœuds adéquatement choisis. Il est

évident que cette modélisation n'introduit aucun couplage entre les DDL. Il en résulte une structure diagonale pour la matrice masse (1-34) qui offre des avantages considérables aux calcul numériques des structures.

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_{22} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & m_{ii} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & m_{NN} \end{bmatrix} \quad (1-34)$$

#### 1.4.2.2 Evaluation des masses concentrées

La structure est supposée constituée d'un nombre fini de segments. La masse répartie sur ces segments est supposée concentrée aux nœuds. Les masses concentrées sont déterminées par les règles de la statique.

##### Exemple 1.5

La Figure 1-10 illustre un exemple de calcul des masses concentrées pour une poutre de masse répartie  $\bar{m}$  modélisée par deux nœuds. Les masses concentrées aux nœuds sont calculées en supposant les segments simplement appuyés. Ces masses sont donc égales à la somme des réactions dues à la masse répartie obtenues au niveau des nœuds.

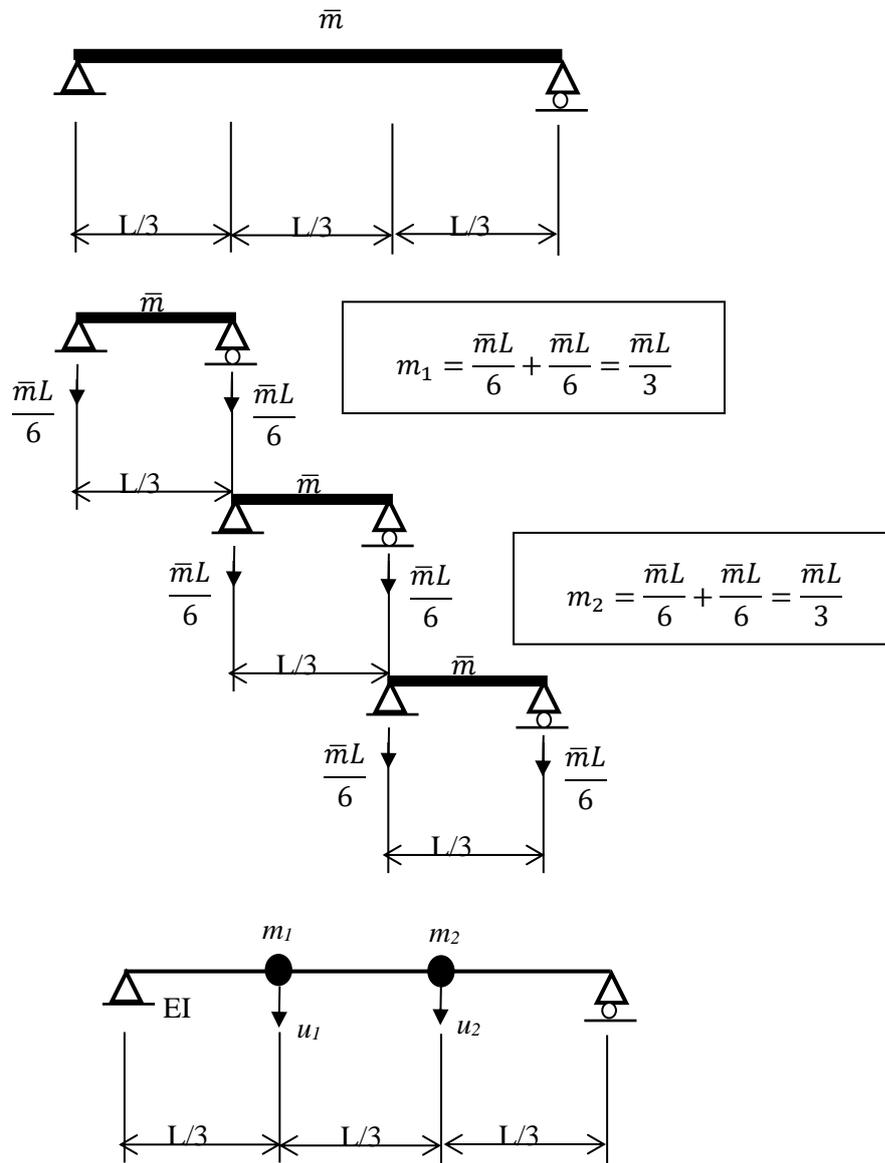


Figure 1-10. Concentration de la masse aux nœuds d'une poutre.

#### 1.4.2.3 Evaluation de la matrice masse

L'évaluation de la matrice masse revient à l'évaluation de ses éléments  $m_{ii}$ , ces derniers ont été définies précédemment. C'est la force d'inertie en DDL  $i$  due à une accélération unitaire appliquée suivant le même DDL lorsque toutes les autres accélérations sont nulles.

**a. DDL de translation**

Pour les DDL de translation, c'est simple,  $m_{ii}$  est égale à la masse en mouvement selon le DDL  $i$ . On rappelle que la masse est une grandeur scalaire, elle est donc la même selon les trois directions de translation.

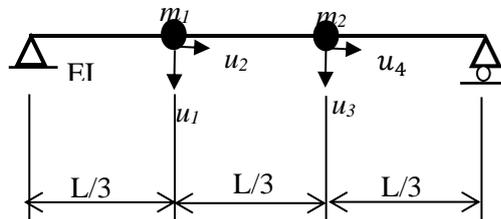
**Exemple 1.6**

La matrice masse de la poutre considérée dans L'Exemple 1.5 est la suivante :

$$M = \begin{bmatrix} \frac{\bar{m}L}{3} & 0 \\ 0 & \frac{\bar{m}L}{3} \end{bmatrix}$$

On ajoute à cette poutre deux DDL, qui sont les déplacements horizontaux des deux nœuds ( Figure 1-11). Dans ce cas la matrice masse est égale à :

$$M = \begin{bmatrix} \bar{m}L/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{m}L/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{m}L/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{m}L/3 \end{bmatrix}$$



**Figure 1-11. Poutre à quatre DDL utilisée dans l'Exemple 1.6.**

**Exemple 1.7**

Soit à déterminer la matrice masse de la structure montrée par la Figure 1-12, où les deux masses sont considérées comme ponctuelles. Par ailleurs, les déformations axiales de la poutre et de la colonne sont négligeables ce qui permet de traiter cette structure comme un système à deux degrés de liberté indiqués sur la Figure 1-12. La particularité de cet exemple est que les DDL ne sont pas considérés au niveau de la masse ponctuelle  $m$ . En utilisant la définition des  $m_{ii}$  la matrice masse de ce modèle s'exprime comme suit :

$$M = \begin{bmatrix} 2m + m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

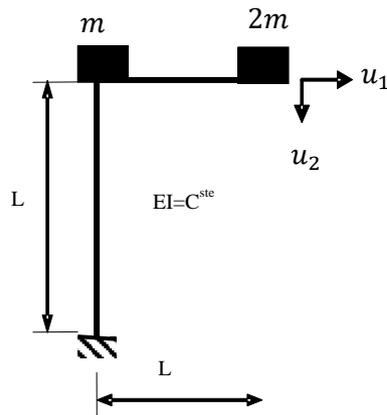


Figure 1-12. Modèle utilisé dans l'exemple 1.7.

**b. DDL de rotation**

On rappelle que pour les DDL de rotation la force d'inertie est égale au produit de l'inertie rotationnelle  $J_0$  et l'accélération angulaire  $\ddot{\theta}$  (Eq (1-35)). Les  $m_{ii}$  représente dans ce cas la force d'inertie en  $i$  due à une accélération angulaire unitaire appliquée suivant le même DDL.

$$f_I = J_0 \ddot{\theta} \tag{1-35}$$

Deux modélisations sont possibles pour la détermination des  $m_{ii}$  correspondantes ;

Dans la première modélisation on suppose que puisque les masses sont concentrées en nœuds les inerties rotationnelles correspondantes sont nulles. Cette modélisation est efficace dans le cas où l'étendue de la masse est négligeable.

**Exemple 1.8**

Reprenons la poutre console considérée dans l'Exemple 1.3 (Figure 1-8). La matrice masse du modèle de cette poutre est égale à :

$$M = \begin{bmatrix} \bar{m}L/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{m}L/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En réalité la masse est répartie donc l'inertie rotationnelle n'est pas nul, dans la deuxième modélisation on ajoute les inerties rotationnelles dans la matrice masse. Pour les déterminer on utilise les règles de la statique comme dans le cas des masses concentrées. Cette modélisation est efficace dans le cas où l'étendu de la masse répartie est importante.

**Exemple 1.9**

Considérons toujours la poutre de la Figure 1-8, si on tient compte des inerties rotationnelles dans la matrice masse, cette dernière devient :

$$M = \begin{bmatrix} \bar{m}L/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{m}L^3/96 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{m}L/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{m}L^3/192 \end{bmatrix}$$

On rappelle que l'inertie rotationnelle d'un élément linéaire de longueur  $L$  et de masse répartie  $\bar{m}$  est  $J_0 = \frac{\bar{m}L^3}{12}$ .

*1.4.3 Caractéristiques d'amortissement*

Les caractéristiques d'amortissement sont difficiles à déterminer directement à partir des coefficients d'amortissement  $c_{ij}$  comme dans le cas de la rigidité et la masse. En pratique la matrice d'amortissement est évaluée autrement, ceci va être présenté ultérieurement.

*1.4.4 Forces extérieures*

*1.4.4.1 Forces extérieures appliquées aux DDL*

Dans ce cas le vecteur chargement est tout simplement constitué des efforts appliqués aux DDL.

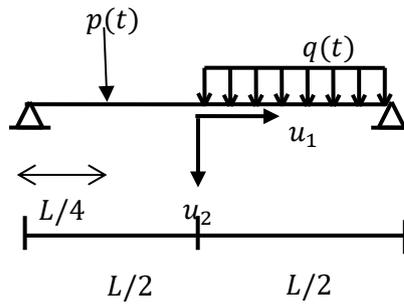
*1.4.4.2 Forces extérieures non appliquées aux DDL*

Si les forces ne sont pas appliquées aux DDL comme, par exemple, pour les forces situées entre deux nœuds ou bien pour les charges réparties, il faut déterminer les forces nodales équivalentes. Pour cela on utilise les règles de la statique.

**Exemple 1.10**

Le vecteur chargement de la Figure 1-13 s'écrit comme suit :

$$P(t) = \left\{ \begin{matrix} 0 \\ p(t) \\ q(t)L \\ \frac{p(t)}{2} + \frac{q(t)L}{4} \end{matrix} \right\}$$



**Figure 1-13. Exemple de calcul du vecteur chargement.**

1.4.4.3 Forces extérieures induites par déplacements du support

Considérant un système à PDDL soumis à un déplacement du support  $u_g(t)$ . L'équilibre des forces agissant sur chaque DDL conduit à l'équation différentielle suivante :

$$M\ddot{u}_t + C\dot{u} + Ku = 0 \tag{1-36}$$

Où :

$\ddot{u}_t$  est le vecteur accélération des déplacements absolus (totaux)  $u_t$ .

Suivant chaque DDL  $i$  la composante du déplacement absolu  $u_{t_i}$  est égale à la somme du déplacement  $u_i$  et de l'influence du déplacement du support. On a alors :

$$u_t = u + \Delta u_g \tag{1-37}$$

Le vecteur  $\Delta$  est composé des coefficients donnant l'influence du déplacement du support sur le DDL. Ces coefficients sont égaux aux cosinus directeurs des DDL de translation par rapport au déplacement du support. Pour les DDL de rotations ces coefficients sont nuls.

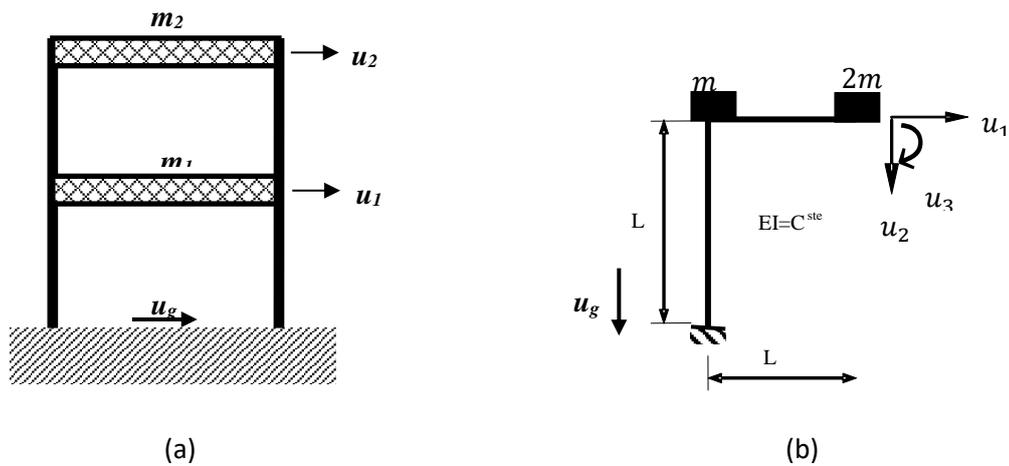
**Exemple 1.11**

Pour le système de la Figure 1-14. (a) on a  $\Delta = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ , par ailleurs pour la Figure 1-14. (b) on a  $\Delta = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$ .

Remplaçant l'équation (1-37) dans (1-36) l'équation de mouvement des SPDDL soumis au déplacement du support s'écrit donc :

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = -M\Delta\ddot{u}_g = P_{eff}(t) \tag{1-38}$$

$P_{eff}(t)$  est le vecteur chargement effectif correspondant au déplacement de support.



**Figure 1-14. Exemples de calcul du vecteur  $\Delta$ .**

### **1.5 Conclusion**

Dans cette section, nous avons présenté la démarche d'évaluation des équations de mouvement des SPDDL, étape indispensable avant de passer au calcul dynamique des structures. Ces équations s'écrivent en fonction des caractéristiques élastiques, massiques et d'amortissement de la structure ainsi que des forces extérieures. Nous avons alors montré par la suite différentes méthodes de détermination de ces caractéristiques à l'exception des caractéristiques d'amortissement qui vont être évoquées ultérieurement.

## 2. Vibrations libres des SPDDL non amorties

### 2.1 Introduction

Dans cette section on s'intéresse à l'étude des vibrations libres non amorties des SPDDL. Avec cette étude on peut effectuer une analyse modale : détermination des fréquences et modes propres de vibration.

Lorsqu'on impose des conditions initiales adéquates à une structure, il est possible qu'elle oscille selon une des déformés caractérisant le mouvement de la structure. Ces déformés sont appelées modes propres de vibration. Sachant qu'à chaque mode propre correspond un mouvement harmonique de la structure autour de sa position d'équilibre. Les fréquences de vibration sont appelées fréquences propres de la structure.

Dans le cas général, lorsqu'une structure est mise en vibrations libres, son mouvement peut être considéré comme la superposition de vibrations harmoniques selon les différents modes propres. Le calcul des modes et fréquences propres de vibrations des SPDDL est présenté dans cette section.

### 2.2 Détermination des pulsations et modes propres de vibrations

L'équation du mouvement d'un SPDDL non amortis en vibrations libres s'obtient à partir de l'équation (1-17) en considérant que le vecteur des forces extérieures et la matrice d'amortissement sont nuls.

$$M\ddot{u} + Ku = 0 \tag{2-1}$$

Le mouvement en vibrations libres des SPDDL est donc la solution de l'équation (2-1). On suppose qu'il est harmonique par analogie avec le mouvement en vibration libre des systèmes à un seul DDL (SSDDL). On peut alors écrire :

$$u(t) = A \sin(\omega t + \theta) \tag{2-2}$$

Avec :

A est le vecteur des amplitudes des déplacements  $a_i$ .

$\omega$  est la pulsation (vitesse angulaire) en rad/s.

$\theta$  est l'angle de déphasage.

Les accélérations en vibration libres sont déterminées en dérivant deux fois les déplacements (Eq (2-3)**Error! Reference source not found.**). Ainsi le vecteur des accélérations est donné par :

$$\ddot{u}(t) = -\omega^2 A \sin(\omega t + \theta) = -\omega^2 u(t) \tag{2-3}$$

En remplaçant les vecteurs des déplacements et des accélérations dans l'équation de mouvement on a :

$$-M\omega^2 A \sin(\omega t + \theta) + K A \sin(\omega t + \theta) = 0$$

En divisant cette équation par  $\sin(\omega t + \theta)$  et en réarrangeant les termes on obtient la relation suivante :

$$(K - \omega^2 M)A = 0 \tag{2-4}$$

L'équation (2-4) est un système d'équations homogènes avec  $N$  amplitudes variables  $a_i$  écrites en fonction de la pulsation qui est aussi inconnue. Cette relation algébrique est nommée problème de valeurs propres  $\omega$  et de vecteurs propres  $A$ .

### 2.2.1 Les pulsations propres

Le système d'équations (2-4) n'admet de solutions non triviales ( $a_i \neq 0$ ) que si le déterminant de la matrice des facteurs des  $a_i$  est non nul. Donc on a :

$$|K - \omega^2 M| = 0 \tag{2-5}$$

En développant le déterminant de l'équation (2-5) on obtient un polynôme de degré  $N$  en fonction de  $\omega^2$ . Ce polynôme est appelé équation caractéristique. Il admet  $N$  racines  $\omega_i^2$  ( $i = 1, \dots, N$ ). Puisque les matrices  $K$  et  $M$  d'un système stable sont définies positives, les  $\omega_i^2$  ( $i = 1, \dots, N$ ) sont toujours réelles et positives. Ce sont les pulsations propres du système. Elles sont classées dans un ordre croissant ( $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_N$ ). La plus faible pulsation  $\omega_1$  est nommée pulsation fondamentale.

A partir des  $\omega_i^2$  on peut déterminer les périodes propres  $T_i$  (Eq.(2-6)) et les fréquences propres  $f_i$  (Eq. (2-7)).

$$T_i = \frac{2\pi}{\omega_i} \tag{2-6}$$

$$f_i = \frac{\omega_i}{2\pi} \tag{2-7}$$

La matrice diagonale formée des  $\omega_i^2$  ( $i = 1, \dots, N$ ) est appelée matrice spectrale (Eq.(2-8)).

$$\Omega = \begin{bmatrix} \omega_{11}^2 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_{22}^2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_{ii}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \omega_{NN}^2 \end{bmatrix} \tag{2-8}$$

### 2.2.2 Les modes propres

L'équation (2-4) est donc vérifiée pour les  $N$  valeurs propres de  $\omega_i^2$ . Ainsi pour chaque pulsation propre est associé un vecteur propre des amplitudes  $A_i$  solution de l'équation (2-9).

$$(K - \omega_i^2 M)A_i = 0 \quad (i = 1, \dots, N) \tag{2-9}$$

Les systèmes d'équations homogènes (Eq. (2-9)) admettent une infinité de solutions pour chaque vecteur propre  $A_i$ . Ce dernier ne peut donc être déterminé que sous forme de rapports de déplacements. En remplaçant  $\omega_i$  par sa valeur dans l'équation (2-9) on peut calculer ces rapports de déplacements. Ceci en fixant une composante de ce vecteur, généralement la première ou mieux la plus grande.

Les rapports de déplacements relatifs au vecteur propre  $A_i$  sont rassemblés dans le vecteur  $\phi_i$  (Eq. (2-10)). Les vecteurs  $\phi_i$  sont nommés modes propres du SPDDL.

$$\phi_i = \begin{Bmatrix} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \\ \vdots \\ \phi_{Ni} \end{Bmatrix} \quad (i = 1, \dots, N) \tag{2-10}$$

L'équation (2-9) peut être alors aussi écrites en fonction des  $\phi_i$ :

$$(K - \omega_i^2 M)\phi_i = 0 \quad (i = 1, \dots, N) \tag{2-11}$$

Les vecteurs des modes propres  $\phi_i$  sont rassemblés dans une matrice appelée matrice modale (Eq. (2-12)).

$$\Phi = \left[ \begin{array}{c} \left( \begin{array}{c} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \vdots \\ \phi_{N1} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \phi_{12} \\ \phi_{22} \\ \vdots \\ \phi_{N2} \end{array} \right) \dots \left( \begin{array}{c} \phi_{1N} \\ \phi_{2N} \\ \vdots \\ \phi_{NN} \end{array} \right) \end{array} \right] \quad (2-12)$$

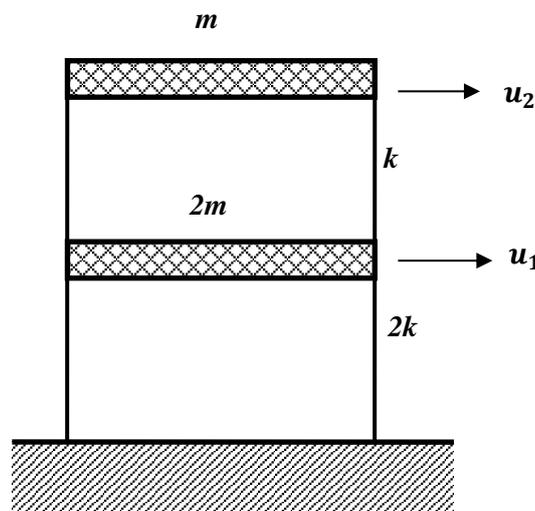
Il est également possible d'écrire :

$$K\Phi = M\Phi\Omega^2 \quad (2-13)$$

Les modes propres représentent les différentes formes de vibration du SPDDL, ils dépendent de la distribution des masses et des rigidités ainsi que des conditions initiales de vibrations. Les SPDDL possèdent donc  $N$  modes propres  $\phi_i$  et  $N$  pulsations propres  $\omega_i$ .

**Exemple 2.1**

Dans cet exemple on reprend le portique de la Figure 1-1, toute en considérant que  $m_1 = 2m$ ,  $m_2 = m$ ,  $k_1 = 2k$  et  $k_2 = k$  (voir Figure 2-1). On souhaite calculer pour ce système à deux DDL les pulsations propres  $\omega_i$  et les modes propres  $\phi_i$ .



**Figure 2-1. Modèle d'un portique à 2 DDL.**

Tenant compte des rigidités et des masses indiquées sur la Figure 2-1 les matrices masse  $M$  et rigidité  $K$  du système s'écrivent :

$$K = \begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$$

Les pulsations propres sont la solution de l'équation caractéristique suivante :

$$P(\lambda) = |K - \lambda M| = 0$$

Avec  $\lambda = \omega^2$ .

Pour simplifier le calcul du déterminant on suppose :

$$K = \begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = C_k \times k'$$

$$M = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = C_m \times M'$$

Ce qui conduit à :

$$|C_k k' - \lambda C_m M'| = 0$$

$$\Rightarrow \left| k' - \lambda \frac{C_m}{C_k} M' \right| = 0$$

$$\Rightarrow |k' - \lambda' M'| = 0$$

Avec  $\lambda' = \lambda \frac{C_m}{C_k}$ .

On calcule alors  $\lambda'$  et on déduit  $\lambda = \lambda' \frac{C_k}{C_m}$ .

$$\left| \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \lambda' \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\Rightarrow \left| \begin{bmatrix} 3 - 2\lambda' & -1 \\ -1 & 1 - \lambda' \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\Rightarrow (3 - 2\lambda')(1 - \lambda') - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2\lambda'^2 - 5\lambda' + 2 = 0$$

$$\Delta = 25 - 4 \times 2 \times 2 = 9 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3$$

$$\lambda'_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2} \text{ d'où } \lambda_1 = \frac{k}{2m} (\text{rad/s})^2 \text{ et } \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{2m}} (\text{rad/s})$$

$$\lambda'_2 = \frac{5+3}{4} = 2 \text{ d'où } \lambda_2 = 2 \frac{k}{m} (\text{rad/s})^2 \text{ et } \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}} (\text{rad/s})$$

On rappelle que les  $\omega_i$  doivent être numérotées de la plus petite à la plus grande valeur.

On peut aussi calculer les deux périodes propres :

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}} \quad (s) \quad \text{et} \quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}} \quad (s)$$

Ainsi que les deux fréquences propres :

$$f_1 = \frac{1}{T_1} = \sqrt{\frac{k}{2m}} \quad (Hz) \quad \text{et} \quad f_2 = \frac{1}{T_2} = \sqrt{\frac{2k}{m}} \quad (Hz)$$

Les modes propres  $\phi_1 = \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{Bmatrix}$  et  $\phi_2 = \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{Bmatrix}$  sont obtenus par la résolution de l'équation :

$$(K - \lambda_i M)\phi_i = 0 \quad i = 1,2$$

Ou bien d'une manière plus simple à travers l'équation :

$$(k' - \lambda'_i M')\phi_i \quad i = 1,2$$

On a donc pour le premier mode :

$$\begin{aligned} & (k' - \lambda'_1 M')\phi_1 = 0 \\ \Rightarrow & \left( \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ & \left[ \begin{array}{cc} 3 - (\frac{1}{2} \times 2) & -1 \\ -1 & 1 - (\frac{1}{2} \times 1) \end{array} \right] \times \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow & \begin{cases} 2\phi_{11} - \phi_{21} = 0 \\ -\phi_{11} + \frac{1}{2}\phi_{21} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On a une infinité de solutions en  $\phi_{11}$  et  $\phi_{21}$ , on pose alors une valeur pour  $\phi_{11}$  et on calcule  $\phi_{21}$ . Le plus simple est de poser  $\phi_{11} = 1$  et on calcule  $\phi_{21}$  par l'une des équations du système. En utilisant la 1ère équation on obtient alors  $\phi_{21} = 2$ . Le premier mode propre est donc :

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

De la même manière on calcule le second mode :

$$\begin{aligned} & (k' - \lambda'_2 M')\phi_2 = 0 \\ \Rightarrow & \left( \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 3 - (2 \times 2) & -1 \\ -1 & 1 - (2 \times 1) \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\phi_{12} - \phi_{22} = 0 \\ -\phi_{12} - \phi_{22} = 0 \end{cases}$$

On pose  $\phi_{12} = 1$  et on calcule  $\phi_{22}$  par l'une des équations du système. En utilisant la 1ère équation on obtient alors  $\phi_{22} = -1$ . Le deuxième mode propre est donné par :

$$\phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

La matrice modale s'écrit :

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

La Figure 2-2 représente les modes propres du portique traité dans cet exemple.

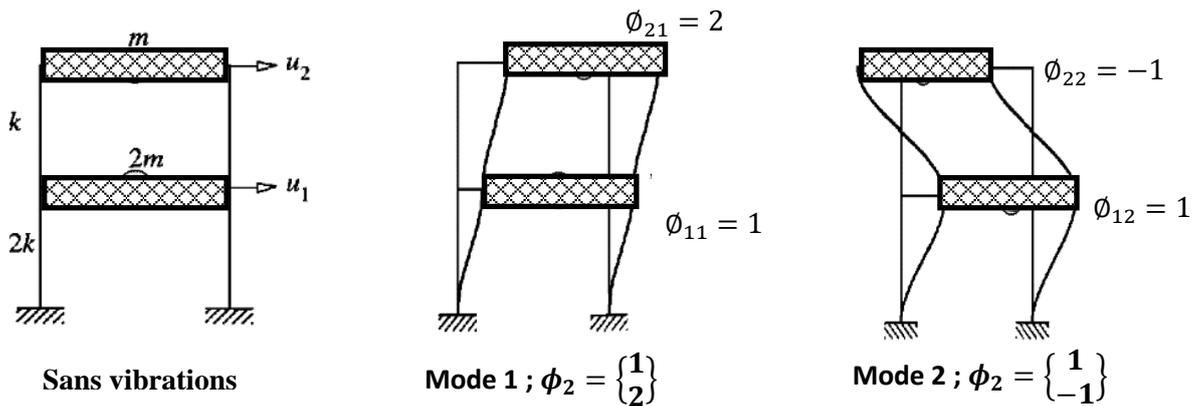


Figure 2-2. Modes propres du portique de l'Exemple 2.1

$\phi_1$  et  $\phi_2$  sont les modes (formes) de vibration du système à 2 DDL de la Figure 2-1. Ce dernier vibre selon le mode 1 avec la pulsation  $\omega_1$  et selon le mode 2 avec la pulsation  $\omega_2$ .

### 2.3 Propriété d'orthogonalité des modes propres

Considérons deux modes distincts  $\phi_i$  et  $\phi_j$  avec  $\omega_i \neq \omega_j$ . On peut donc écrire à partir de l'équation (2-11)

$$K\phi_i = \omega_i^2 M\phi_i$$

$$K\phi_j = \omega_j^2 M\phi_j$$

Pré multipliant respectivement ces deux équations par  $\phi_j^T$  et  $\phi_i^T$ :

$$\phi_j^T K \phi_i = \omega_i^2 \phi_j^T M \phi_i \quad (2-14)$$

$$\phi_i^T K \phi_j = \omega_j^2 \phi_i^T M \phi_j \quad (2-15)$$

A partir de l'équation (2-13) l'égalité suivante est par conséquent vérifiée :

$$(\phi_j^T K \phi_i)^T = (\omega_i^2 \phi_j^T M \phi_i)^T \Rightarrow \phi_i^T K \phi_j = \omega_i^2 \phi_i^T M \phi_j \quad (2-16)$$

Par Soustraction des équations (2-14) et (2-15) on a :

$$0 = (\omega_i^2 - \omega_j^2) \phi_i^T M \phi_j$$

Sachant que :

$$\omega_i^2 \neq \omega_j^2 \quad i \neq j$$

On a donc :

$$\phi_i^T M \phi_j = 0 \quad i \neq j \quad (2-17)$$

Ainsi que :

$$\phi_i^T K \phi_j = 0 \quad i \neq j \quad (2-18)$$

On déduit que les modes propres de vibration possèdent la propriété d'être orthogonaux par rapport aux matrices de masse  $M$  (Eq.(2-16)) et de rigidité  $K$  (Eq. (2-17)). Cette propriété constitue la base de la méthode la plus utilisée pour la résolution des SPDDL, la méthode de superposition modale. Cette dernière va être présentée dans la section suivante.

Pour  $i = j$ :

$$\omega_i^2 = \omega_j^2$$

Par conséquent :

$$\phi_i^T M \phi_i \neq 0$$

$$\phi_i^T K \phi_i \neq 0$$

On peut également écrire à partir de l'équation (2-15):

$$\omega_i^2 = \frac{\phi_i^T K \phi_i}{\phi_i^T M \phi_i} \quad (2-19)$$

**Exemple 2.2**

Dans cet exemple on vérifie la propriété d'orthogonalité des modes propres calculés dans l'Exemple 2.1 par rapport aux matrices  $M$  et  $K$ .

On a donc pour la matrice  $M$  :

$$\phi_1^T M \phi_2 = \{1 \quad 2\} \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$\phi_1^T M \phi_2 = \{2m \quad 2m\} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$\phi_1^T M \phi_2 = 0$$

Les modes propres sont donc orthogonaux par rapport à  $M$ .

Et pour la matrice  $K$ .

$$\phi_1^T K \phi_2 = \{1 \quad 2\} \begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$\phi_1^T K \phi_2 = \{k \quad k\} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$\phi_1^T K \phi_2 = 0$$

La propriété d'orthogonalité est également vérifiée par rapport à  $K$ .

**2.4 Conclusion**

L'analyse modale des SPDDL concerne le calcul de ses pulsations et modes propres de vibrations. Un SPDDL possède  $N$  modes propres caractérisant le mouvement des DDL. A chaque mode propre, ou bien déformée propre du système, est associée une fréquence propre de vibration.

L'analyse en vibration libre (analyse modale) est importante car elle permet de calculer les fréquences propres des SPDDL et aussi de comprendre leur comportement vibratoire.

Les valeurs propres sont également utilisées pour le calcul de la réponse dynamique par la méthode de superposition modale (méthode réservée pour un comportement linéaire). Cette dernière sera présentée dans la section suivante.

### 3. Vibrations forcées des systèmes à plusieurs degrés de liberté

#### 3.1 Introduction

Nous avons vu dans la première section, que le mouvement des SPDDL s'exprime par un système d'équations différentielles couplées. Pour les résoudre, on peut utiliser les méthodes d'intégration directe pas à pas. Par ailleurs, ces méthodes exigent un volume de calcul important (méthode laborieuse). Pour les systèmes dont le comportement est linéaire, la méthode de superposition modale est préférée du fait de sa simplicité. Cette méthode sera présentée dans cette section.

#### 3.2 Méthode de superposition modale

##### 3.2.1 Principe de la méthode

Dans ce cas, la réponse est déterminée dans la base des modes propres de vibration  $\phi_i$   $i = 1, \dots, N$ . Cette dernière constitue une base orthogonale complète de l'espace vectoriel d'ordre  $N$ . On peut donc faire un changement de repaire pour passer des coordonnées géométriques aux coordonnées modales.

Les déplacements en coordonnées géométriques  $u(t)$  peuvent donc être exprimés en fonction des déplacements en coordonnées modales  $q_i(t)$  sur cette base par la relation (3-1).

$$u(t) = \sum_{i=1}^N \phi_i q_i(t) = \Phi q(t) \tag{3-1}$$

Où  $q(t)$  représente le vecteur des déplacements en coordonnées modales  $q_i(t)$ .

La réponse est par conséquent exprimée par la superposition des réponses modales  $u(t)^{(i)}$ :

$$u(t)^{(i)} = \phi_i q_i(t) \tag{3-2}$$

Le passage des coordonnées géométriques aux coordonnées modales est effectué par la relation suivante :

$$q(t) = \Phi^{-1} u(t) \tag{3-3}$$

On peut éviter d'inverser la matrice  $\Phi$  en utilisant la propriété d'orthogonalité des modes propres (Eqs. (2-16) et (2-17)). En prémultipliant l'équation (3-1) par  $\phi_j^T M$  on a :

$$\phi_j^T M u(t) = \phi_j^T M \sum_{i=1}^N \phi_i q_i(t) = \phi_j^T M \phi_j q_j(t)$$

Ainsi on obtient :

$$q_j(t) = \frac{\phi_j^T M u(t)}{\phi_j^T M \phi_j} \quad (3-4)$$

De même on peut démontrer que :

$$\dot{q}_j(t) = \frac{\phi_j^T M \dot{u}(t)}{\phi_j^T M \phi_j} \quad (3-5)$$

### 3.2.2 Découplage des équations de mouvement. Cas des vibrations forcées non amorties

L'équation de mouvement s'écrit pour les SPDDL non amortis comme suit :

$$M\ddot{u} + Ku = P(t) \quad (3-6)$$

Reportant l'expression (3-1) dans l'équation (3-6) et pré multipliant les deux membres de l'équation (3-6) par  $\phi_j^T$  avec  $j = 1, \dots, N$ , on obtient :

$$\phi_j^T M \sum_{i=1}^N \phi_i \ddot{q}_i(t) + \phi_j^T K \sum_{i=1}^N \phi_i q_i(t) = \phi_j^T P(t) \quad j = 1, \dots, N \quad (3-7)$$

Tenant compte de la propriété d'orthogonalité des modes propres par rapport aux matrices  $M$  et  $K$  (Eqs. (2-16) et (2-17)), l'équation (3-7) devient :

$$\phi_j^T M \phi_j \ddot{q}_j(t) + \phi_j^T K \phi_j q_j(t) = \phi_j^T P(t) \quad j = 1, \dots, N \quad (3-8)$$

On pose les notations suivantes :

$$M_j^* = \phi_j^T M \phi_j$$

$$K_j^* = \phi_j^T K \phi_j$$

$$P_j^*(t) = \phi_j^T P(t)$$

$M_j^*$ ,  $K_j^*$  et  $P_j^*(t)$  sont respectivement la masse, rigidité et chargement généralisés.

L'équation (3-8) s'écrit alors :

$$M_j^* \ddot{q}_j(t) + K_j^* q_j(t) = P_j^*(t) \quad j = 1, \dots, N \quad (3-9)$$

Ou bien sous forme réduite et tenant en compte l'équation (2-18)

$$\ddot{q}_j(t) + \omega_j^2 q_j(t) = \frac{P_j^*(t)}{M_j^*} \quad j = 1, \dots, N \quad (3-10)$$

On observe que pour chaque mode  $j$  l'équation obtenue ((3-6) ou (3-7)) n'est autre que l'équation de mouvement d'un SSDDL  $q_j(t)$  de masse  $M_j^*$  et de rigidité  $K_j^*$  soumis à un chargement dynamique  $P_j^*(t)$ . L'utilisation de la base modale a permis alors de transformer le système d'équations différentielles couplées exprimées en fonction des coordonnées géométriques  $u(t)$  en un système de  $N$  équations découplées en fonction des coordonnées modales  $q_j(t)$ .

**Exemple 3.1**

On considère que le modèle à 2 DDL du portique présenté par la Figure 2-1 est soumis à une force harmonique égale à  $P_0 \sin \bar{\omega} t$  appliquée suivant le premier DDL. Les modes et pulsations propres de ce portique ont été déterminés dans l'Exemple 2.1. On veut déterminer les équations différentielles découplées relatives à ce modèle non amorti.

En utilisant les équations (3-10), le système à deux équations différentielles découplées est le suivant:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1(t) + \omega_1^2 q_1(t) = \frac{P_1^*(t)}{M_1^*} \\ \ddot{q}_2(t) + \omega_2^2 q_2(t) = \frac{P_2^*(t)}{M_2^*} \end{cases}$$

Les masses et les forces généralisées relatives au mode 1 valent :

$$\begin{aligned} M_1^* &= \phi_1^T M \phi_1 \\ &= \{1 \quad 2\} \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \\ &= 2m + 4m = 6m \\ P(t)_1^* &= \phi_1^T P(t) \\ &= \{1 \quad 2\} \begin{Bmatrix} P_0 \sin \bar{\omega} t \\ 0 \end{Bmatrix} \\ &= P_0 \sin \bar{\omega} t \end{aligned}$$

Les masses et forces généralisées relatives au mode 2 valent :

$$\begin{aligned}
 M_2^* &= \phi_2^T M \phi_2 \\
 &= \{1 \quad -1\} \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \\
 &= 2m + m = 3m \\
 P(t)_2^* &= \phi_2^T P(t) \\
 &= \{1 \quad -1\} \begin{Bmatrix} P_0 \sin \bar{\omega} t \\ 0 \end{Bmatrix} \\
 &= P_0 \sin \bar{\omega} t
 \end{aligned}$$

En reportant les grandeurs généralisées calculées et les valeurs des pulsations propres dans le système à deux équations différentielles découplées, on obtient :

$$\begin{cases} \ddot{q}_1(t) + \frac{k}{2m} q_1(t) = \frac{P_0}{6m} \sin \bar{\omega} t \\ \ddot{q}_2(t) + \frac{2k}{m} q_2(t) = \frac{P_0}{3m} \sin \bar{\omega} t \end{cases}$$

### 3.2.3 Découplage des équations de mouvement. Cas des vibrations forcées amorties

Le mouvement dans ce cas est décrit par l'équation de mouvement (1-17). Exprimant le déplacement total par la superposition des réponses modales cette équation s'écrit sous la forme suivante :

$$M \sum_{i=1}^N \phi_i \ddot{q}_i(t) + C \sum_{i=1}^N \phi_i \dot{q}_i(t) + K \sum_{i=1}^N \phi_i q_i(t) = P(t) \tag{3-11}$$

Pré multipliant l'équation (3-11) par  $\phi_j^T$  et tenant en compte la propriété d'orthogonalité des modes propres par rapport aux matrices  $M$  et  $K$  on obtient :

$$M_j^* \ddot{q}_j(t) + \phi_j^T C \sum_{i=1}^N \phi_i \dot{q}_i(t) + K_j^* q_j(t) = P_j^*(t) \quad j = 1, \dots, N \tag{3-12}$$

L'ensemble des équations données par (3-12) sont des équations différentielles couplées à l'exception si les modes propres vérifient la propriété d'orthogonalité également par rapport à la matrice d'amortissement  $C$ , c'est le cas d'un SPDDL à amortissement classique. Ce dernier possède les mêmes modes propres qu'un système non amorti.

Par conséquent on a :

$$\phi_i^T C \phi_j = 0 \quad i \neq j \tag{3-13}$$

On définit l'amortissement généralisé  $C_j^*$  par :

$$C_j^* = \phi_j^T C \phi_j$$

L'équation (3-12) devient :

$$M_j^* \ddot{q}_j(t) + C_j^* \dot{q}_j(t) + K_j^* q_j(t) = P_j^*(t) \quad j = 1, \dots, N \tag{3-14}$$

On a donc obtenu  $N$  équations découplées. Chacune de ces équations représente l'équation d'équilibre d'un SSDDL  $q_j(t)$  de masse  $M_j^*$ , d'amortissement  $C_j^*$  et de rigidité  $K_j^*$ .

Par analogie avec les SSDDL l'équation(3-14) peut être écrite sous la forme suivante :

$$\ddot{q}_j(t) + 2\xi_j \omega_j \dot{q}_j(t) + \omega_j^2 q_j(t) = \frac{P_j^*(t)}{M_j^*} \quad j = 1, \dots, N \tag{3-15}$$

Avec  $\xi_j$  est l'amortissement modale. Il est égal à :

$$\xi_j = \frac{C_j^*}{2M_j^* \omega_j} \tag{3-16}$$

**Exemple 3.2**

Reprenant l'Exemple 3.1 en tenant compte de l'amortissement. On suppose que les amortissements modaux relatifs aux deux modes sont égaux à  $\xi$ .

Utilisant les équations (3-15) on obtient le système à deux équations différentielles découplées suivantes :

$$\begin{cases} \ddot{q}_1(t) + 2\xi_1 \omega_1 \dot{q}_1(t) + \omega_1^2 q_1(t) = \frac{P_1^*(t)}{M_1^*} \\ \ddot{q}_2(t) + 2\xi_2 \omega_2 \dot{q}_2(t) + \omega_2^2 q_2(t) = \frac{P_2^*(t)}{M_2^*} \end{cases}$$

Ce système s'écrit pour le portique étudié comme suit :

$$\begin{cases} \ddot{q}_1(t) + 2\xi \sqrt{\frac{k}{2m}} \dot{q}_1(t) + \frac{k}{2m} q_1(t) = \frac{P_0}{6m} \sin \bar{\omega} t \\ \ddot{q}_2(t) + 2\xi \sqrt{\frac{2k}{m}} \dot{q}_2(t) + \frac{2k}{m} q_2(t) = \frac{P_0}{3m} \sin \bar{\omega} t \end{cases}$$

### 3.2.4 Détermination des caractéristiques d'amortissement

Il a été mentionné précédemment que la matrice d'amortissement  $C$  doit vérifier la propriété d'orthogonalité par rapport aux modes propres de vibration. Ceci peut être vérifié si elle s'exprime par une combinaison linéaire des matrices de rigidité et de masse sachant que les modes propres sont toujours orthogonaux par rapport à ces deux matrices.

Lors de l'analyse dynamique, généralement l'amortissement de la structure n'est pas exprimé par la matrice d'amortissement  $C$  mais plutôt par les amortissements modaux  $\xi$ . Ces derniers peuvent être calculés ou bien tirés de la réglementation.

#### 3.2.4.1 Amortissement de RAYLEIGH

Dans ce cas la matrice  $C$  est exprimée par une combinaison linéaire des matrices  $M$  et  $K$  tel que :

$$C = \alpha M + \beta K \tag{3-17}$$

$\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes liées à l'amortissement de la structure.

La relation suivante est également vérifiée pour chacun des modes  $j$  :

$$C_j^* = \alpha M_j^* + \beta K_j^* \tag{3-18}$$

Selon l'équation (3-16) l'amortissement modal (Figure 3-1) s'exprime alors par :

$$\xi_i = \frac{\alpha M_i^* + \beta K_i^*}{2M_i^* \omega_i} = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta \omega_i}{2} \tag{3-19}$$

Les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  peuvent être déterminée connaissant deux valeurs d'amortissement modaux  $\xi_i$  et  $\xi_j$ :

$$\begin{cases} \xi_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta \omega_i}{2} \\ \xi_j = \frac{\alpha}{2\omega_j} + \frac{\beta \omega_j}{2} \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{cases} \alpha = 2 \frac{\omega_i \omega_j}{\omega_j^2 - \omega_i^2} (\omega_j \xi_i - \omega_i \xi_j) \\ \beta = 2 \frac{\omega_i \omega_j}{\omega_j^2 - \omega_i^2} \left( -\frac{1}{\omega_j} \xi_i + \frac{1}{\omega_i} \xi_j \right) \end{cases} \quad (3-20)$$

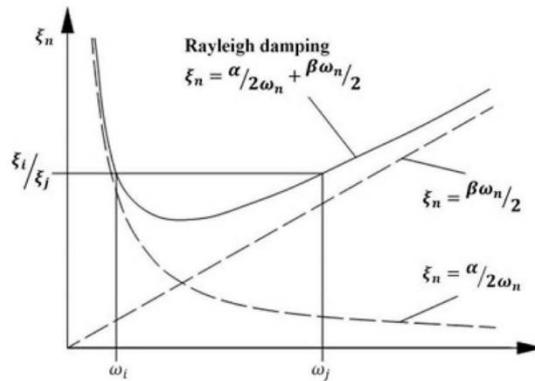


Figure 3-1. Amortissement de Rayleigh.

Une fois ces coefficients sont calculés les amortissements des autres modes sont déterminés par l'équation (3-19).

On note que l'amortissement modal est composé de deux termes le premier est inversement proportionnel à la pulsation tandis que le deuxième est proportionnel à la pulsation. Cependant, en réalité, il est souhaitable d'avoir un amortissement modal indépendant de la fréquence c'est à dire considérer la même valeur de ce coefficient pour tous les modes propres. Ceci peut être effectué par un choix approprié des coefficients  $\alpha$  et  $\beta$ . En effet, on suppose dans l'équation (3-20) que  $\xi_i = \xi_j$ ,  $\omega_i$  est prise égale à la pulsation fondamentale du SPDDL ( $\omega_i = \omega_1$ ) et  $\omega_j$  est considérée égale à la plus grande pulsation d'intérêt de la structure. Il en résulte un amortissement sensiblement constant entre ces deux pulsations.

**Exemple 3.3**

Soit un système à 3DDL de pulsations propres suivantes :

$$\omega_1 = 11.62 \text{ rad/s} ; \omega_2 = 27.54 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \text{ et } \omega_3 = 45.85 \text{ rad/s.}$$

Les amortissements modaux du premier et troisième mode sont égaux à :

$$\xi_1 = 5\% \text{ et } \xi_3 = 15\%$$

On veut calculer l'amortissement modal relatif au second mode  $\xi_2$ .

On sait que :

$$\xi_2 = \frac{\alpha}{2\omega_2} + \frac{\beta\omega_2}{2}$$

$\alpha$  et  $\beta$  sont les solutions du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \xi_1 = \frac{\alpha}{2\omega_1} + \frac{\beta\omega_1}{2} \\ \xi_3 = \frac{\alpha}{2\omega_3} + \frac{\beta\omega_3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0.05 = 0.043\alpha + 5.810\beta \\ 0.15 = 0.011\alpha + 22.925\beta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0.297 \\ \beta = 0.0064 \end{cases}$$

Donc :

$$\xi_2 = \frac{0.297}{2 \times 27.54} + \frac{0.0064 \times 27.54}{2}$$

$$\xi_2 = 9.35 \%$$

### 3.2.4.2 Amortissement de CAUCHY

C'est une généralisation de l'amortissement de RAYLEIGH. Dans ce cas la matrice d'amortissement est constituée à partir de la combinaison linéaire de  $p$  termes du produit de la matrice de masse et de la matrice de raideur (Eq. (3-21)). On retrouve l'amortissement de RAYLEIGH pour  $p=1$ .

$$C = M \left[ \sum_{b=0}^p a_b (M^{-1}K)^b \right] \tag{3-21}$$

A partir de l'équation (3-21) on peut avoir l'amortissement modal relatif au mode  $i$  :

$$\xi_i = \frac{1}{2\omega_i} \sum_{b=0}^p a_b \omega_i^{2b} \tag{3-22}$$

Les constantes  $a_b$  peuvent être calculées connaissant les  $p-1$  valeurs de  $\xi_i$ . Ainsi on peut s'arranger dans le choix de ces constantes pour avoir un coefficient modal constant.

### 3.2.5 Calcul de la réponse dynamique des SPDDL par la méthode de superposition modale

La solution  $q_j(t)$  de chacune de ces équations découplées ((3-10) ou (3-15)) est déterminée par les différentes techniques utilisées pour la résolution des équations différentielles des SSDDL. Les solutions peuvent être obtenues par l'intégrale de Duhamel :

$$q_j(t) = e^{-\xi_j \omega_j t} \left( q_j(0) \cos \omega_{d_j} + \frac{\dot{q}_j(0) + \xi_j \omega_j q_j(0)}{\omega_{d_j}} \sin \omega_{d_j} \right) + \frac{1}{M_j^* \omega_{d_j}} \int_0^t P_j^*(\tau) e^{-\xi_j \omega_j (t-\tau)} \sin \omega_{d_j} (t-\tau) d\tau \quad (3-22)$$

Où :

$q_j(0)$  et  $\dot{q}_j(0)$  sont calculés à partir des conditions initiales en coordonnées géométriques  $u(0)$  et  $\dot{u}(0)$  (Eqs. (3-4) et (3-5)).

$\omega_{d_j}$  est la pulsation amortie relative au mode  $i$ .

$$\omega_{d_j} = \omega_j \sqrt{1 - \xi_j^2} \quad (3-23)$$

La réponse relative à chaque mode est donnée par l'équation (3-2). Par la suite, la réponse totale se calcule par la superposition de ces réponses modales en utilisant l'équation (3-1). On note que généralement pour les basses fréquences (les premiers modes), on a des contributions des modes plus importantes que celles des hautes fréquences (les modes supérieurs). En conséquence, dans la plupart des cas il n'est pas nécessaire d'inclure toutes les réponses modales dans la réponse totale.

Connaissant les déplacements des nœuds, on peut calculer les efforts internes ou bien les contraintes agissant en chaque élément de la structure.

On peut également calculer les forces élastiques  $F_e(t)$  qui sont obtenues en multipliant la matrice de rigidité de la structure par le vecteur déplacement, ainsi on a :

$$F_e(t) = Ku(t) = K\Phi q(t) = \sum_{i=1}^{i=N} K\phi_i q_i(t) \quad (3-24)$$

Les forces  $F_e(t)$  donnent les déplacements  $u(t)$  en statique qui sont équivalentes aux effets dynamiques. Elles sont exprimées souvent en fonction de la matrice  $M$ , du fait de sa structure diagonale, en utilisant l'équation (2-11).

$$F_e(t) = \sum_{i=1}^{i=N} M\phi_i \omega_i^2 q_i(t) \quad (3-25)$$

**Exemple 3.4**

Cet exemple a pour but d'évaluer la réponse dynamique du portique présenté par la Figure 2-1 en utilisant la méthode de superposition modale. Ce portique est soumis à une force harmonique égale à  $P_0 \sin \bar{\omega}t$ . Elle est appliquée suivant le premier DDL. On considère que les amortissements modaux sont égaux à  $\xi$  et que le système est initialement au repos.

Les déplacements du portique s'obtiennent en superposant les déplacements modaux relatifs aux deux modes propres du portique :

$$\begin{aligned} u(t) &= u(t)^{(1)} + u(t)^{(2)} \\ &= \phi_1 q_1(t) + \phi_2 q_2(t) \end{aligned}$$

Les modes propres et les pulsations propres ont été calculés dans l'exemple 2.1, on a :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{k}{2m}} \text{ (rad/s)} \text{ et } \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}} \text{ (rad/s)} \\ \phi_1 &= \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \text{ et } \phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Les déplacements en coordonnées modales  $q_1(t)$  et  $q_2(t)$  se calculent par la résolution des deux équations différentielles découplées. Ces dernières ont été déterminées dans l'Exemple 3.2 comme suit :

$$\begin{cases} \ddot{q}_1(t) + 2\xi \sqrt{\frac{k}{2m}} \dot{q}_1(t) + \frac{k}{2m} q_1(t) = \frac{P_0}{6m} \sin \bar{\omega}t \\ \ddot{q}_2(t) + 2\xi \sqrt{\frac{2k}{m}} \dot{q}_2(t) + \frac{2k}{m} q_2(t) = \frac{P_0}{3m} \sin \bar{\omega}t \end{cases}$$

On reconnaît pour chaque mode l'équation d'équilibre dynamique d'un SSDDL soumis à une force harmonique. Les solutions de ces équations s'expriment alors comme suit :

$$q_i(t) = e^{-\xi_i \omega_i t} (A_i \cos \omega_{di} + B_i \sin \omega_{di}) + \frac{P_0 D_i}{3k} \sin(\bar{\omega}t - \theta_i) \quad i = 1,2$$

Le coefficient d'amplification dynamique pour les charges harmoniques  $D_i$  est donné par :

$$D_i = \left( (1 - \beta_i^2)^2 + (2\xi\beta_i)^2 \right)^{-1/2} \quad i = 1,2$$

Et le déphasage  $\theta_i$  est égale à :

$$\theta_i = \tan^{-1} \left( \frac{2\xi\beta_i}{1 - \beta_i^2} \right) \quad i = 1,2$$

Le rapport des fréquences  $\beta_i$  est donné par :

$$\beta_i = \frac{\bar{\omega}}{\omega_i} \quad i = 1,2$$

Les constantes  $A_i$  et  $B_i$  sont déterminées à partir des conditions initiales, supposées nulles dans ce cas :

$$u(0) = 0 \Rightarrow q(0) = 0 \text{ et } \dot{u}(0) = 0 \Rightarrow \dot{q}(0) = 0$$

$$q_i(0) = 0 \Rightarrow (A_i) + \frac{P_0 D_i}{3k} \sin(-\theta_i) = 0 \quad i = 1,2$$

$$\Rightarrow A_i = \frac{P_0 D_i}{3k} \sin \theta_i \quad i = 1,2$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_i(t) = e^{-\xi \omega_i t} & (-A_i \omega_{d_i} \sin \omega_{d_i} t + B_i \omega_{d_i} \cos \omega_{d_i} t) - \xi \omega_i e^{-\xi \omega_i t} (A_i \cos \omega_{d_i} t + B_i \sin \omega_{d_i} t) \\ & + \frac{P_0 D_i}{3k} \bar{\omega} \cos(\bar{\omega} t - \theta_i) \quad i = 1,2 \end{aligned}$$

$$\dot{q}_i(0) = 0 \Rightarrow (B_i \omega_{d_i}) - \xi \omega_i (A_i) + \frac{P_0 D_i}{3k} \bar{\omega} \cos(-\theta_i) = 0 \quad i = 1,2$$

$$\dot{q}_i(0) = 0 \Rightarrow B_i = \frac{1}{\omega_{d_i}} \left( \xi \omega_i \left( \frac{P_0 D_i}{3k} \sin \theta_i \right) - \frac{P_0 D_i}{3k} \bar{\omega} \cos \theta_i \right) \quad i = 1,2$$

$$B_i = \frac{P_0 D_i}{3k \sqrt{1 - \xi^2}} (\xi \sin \theta_i - \beta_i \cos \theta_i) \quad i = 1,2$$

La réponse totale est égale donc à :

$$u(t) = \begin{cases} q_1(t) + q_2(t) \\ 2q_1(t) - q_1(t) \end{cases}$$

En régime permanent, la solution homogène de l'équation différentielle est négligée on a donc :

$$u(t) = \frac{P_0}{3k} \begin{cases} D_1 \sin(\bar{\omega} t - \theta_1) + D_2 \sin(\bar{\omega} t - \theta_2) \\ 2D_1 \sin(\bar{\omega} t - \theta_1) - D_2 \sin(\bar{\omega} t - \theta_2) \end{cases}$$

### 3.3 Calcul de la réponse sismique des SPDDL par la méthode de superposition modale

#### 3.3.1 Réponse temporelle

Le mouvement engendré par une sollicitation sismique est représenté par un déplacement du support. L'équation d'équilibre d'un SPDDL soumis à ce type de chargement est donnée par l'équation (1-38). Exprimer le déplacement par la superposition des réponses modales (Eq. (3-1)) et supposant que la

matrice d'amortissement est orthogonale par rapport aux modes propres, on obtient  $N$  équations différentielles du second degré découplées exprimées sous la forme suivante :

$$\ddot{q}_j(t) + 2\xi_j\omega_j\dot{q}_j(t) + \omega_j^2q_j(t) = \frac{-L_j}{M_j^*}\ddot{u}_g(t) \quad j = 1, \dots, N \quad (3-26)$$

Avec :

$$L_j = \phi_i^T M \Delta \quad (3-27)$$

Le facteur de participation modale s'exprime par la relation (3-28). On note que ce facteur dépend de la norme adoptée pour le mode propre :

$$a_j = \frac{L_j}{M_j^*} \quad (3-28)$$

Il est à noter qu'il est possible d'avoir une idée sur l'importance de contribution des modes propres à la réponse totale en comparant les valeurs absolues des facteurs de participation modales.

L'équation (3-26) s'écrit alors en fonction du facteur de participation comme suit :

$$\ddot{q}_j(t) + 2\xi_j\omega_j\dot{q}_j(t) + \omega_j^2q_j(t) = -a_j\ddot{u}_g(t) \quad j = 1, \dots, N \quad (3-29)$$

Utilisant l'intégral de DUHAMEL, la solution de cette équation dans le cas des conditions initiales nulles est donnée par :

$$q_j(t) = -\frac{a_j}{\omega_{d_j}} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\xi_j\omega_j(t-\tau)} \sin \omega_{d_j}(t-\tau) d\tau = a_j d_j(t) \quad (3-30)$$

Avec :

$$d_j(t) = -\frac{1}{\omega_{d_j}} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\xi_j\omega_j(t-\tau)} \sin \omega_{d_j}(t-\tau) d\tau \quad (3-31)$$

$d_j(t)$  représente la solution de l'équation différentielle (3-32). C'est l'équation d'équilibre d'un SSDDL soumis à un déplacement de support  $u_g(t)$ .

$$\ddot{d}_j(t) + 2\xi_j\omega_j\dot{d}_j(t) + \omega_j^2d_j(t) = -\ddot{u}_g(t) \quad j = 1, \dots, N \quad (3-32)$$

Le déplacement modal relatif au mode  $j$  s'écrit alors :

$$u(t)^{(j)} = \phi_j a_j d_j(t) \tag{3-33}$$

Par la suite le déplacement total s'obtient par sommation sur l'ensemble des modes :

$$u(t) = \sum_{j=1}^N \phi_j a_j d_j(t) \tag{3-34}$$

Les forces élastiques totales sont alors :

$$F_e(t) = \sum_{j=1}^{j=N} F_e(t)^{(j)} = \sum_{j=1}^{j=N} M \phi_j \omega_j^2 a_j d_j(t) \tag{3-35}$$

Le mouvement sismique peut être également représenté par un effort horizontal  $V(t)$ , effort tranchant à la base égal à la somme des projections horizontales des forces élastiques.

$$V(t) = \Delta^T F_e(t) \tag{3-36}$$

### 3.3.2 Réponse spectrale

#### 3.3.2.1 Réponse modale maximale

Dans la section 3.3.1, nous avons déterminé la réponse temporelle des SPDDL soumis aux mouvements sismiques. Par ailleurs, en calcul de structure, il n'est pas généralement nécessaire de connaître toute l'histoire temporelle de la réponse. C'est sa valeur maximale qui est utilisée pour le dimensionnement. En effet, la méthode modale spectrale représente une alternative intéressante.

On rappelle que pour un SSDDL, la réponse maximale est obtenue directement par le spectre de réponse de la sollicitation. Du moment que les équations découplées (Eq. (3-29)) sont celles des SSDDL, on peut déterminer les déplacements maximums en coordonnées modales  $q_{j_{max}}$  pour chaque mode, en utilisant les spectres de réponse.

Dans le cas d'un SSDDL soumis à un déplacement de support  $u_g(t)$ , on rappelle que le spectre de réponse en déplacement  $S_D(\xi_j, \omega_j)$  est défini par l'équation (3-37) pour l'ensemble des couples  $(\xi_j, \omega_j)$ .

$$S_D(\xi_j, \omega_j) = \text{Max} \left[ -\frac{1}{\omega_{d_j}} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) e^{-\xi_j \omega_j (t-\tau)} \sin \omega_{d_j} (t-\tau) d\tau \right] \tag{3-37}$$

On peut alors écrire pour chaque mode  $j$  :

$$d_{j_{max}} = S_D(\xi_j, \omega_j) \tag{3-38}$$

On déduit à partir de l'équation (3-33) les déplacements maximums modaux  $u^{(j)}_{max}$ :

$$u^{(j)}_{max} = \phi_j \cdot a_j \cdot S_D(\xi_j, \omega_j) \quad (3-39)$$

En utilisant l'équation (3-40) donnant la relation entre les spectres en déplacement, spectres en pseudo vitesse  $S_D(\xi_j, \omega_j)$  et spectres en pseudo accélération  $S_A(\xi_j, \omega_j)$ . Les déplacements modaux maximums s'expriment alors par l'équation (3-41).

$$S_D(\xi_j, \omega_j) = \frac{1}{\omega_j} S_v(\xi_j, \omega_j) = \frac{1}{\omega_j^2} S_A(\xi_j, \omega_j) \quad (3-40)$$

$$u^{(j)}_{max} = \frac{a_j}{\omega_j} \phi_j S_v(\xi_j, \omega_j) = \frac{a_j}{\omega_j^2} \phi_j S_A(\xi_j, \omega_j) \quad (3-41)$$

En utilisant l'équation (3-35), les forces élastiques maximales relatives au mode  $j$  sont données par :

$$F_e^{(j)}_{max} = a_j M \phi_j S_A(\xi_j, \omega_j) \quad (3-42)$$

### 3.3.2.2 Réponse totale maximale

Pour chacun des modes propres, les maximums des réponses peuvent être calculés selon la démarche citée précédemment, ces maximums par ailleurs sont atteints à des instants différents. Par conséquence la superposition (la somme) des réponses maximales n'est pas forcément égale à la réponse totale maximale, elle constitue, par contre, une enveloppe de celle-ci. La sommation des réponses modales maximales surestime alors la réponse totale.

En pratique, plusieurs formules ont été proposées pour obtenir une approximation adéquate de la réponse totale maximale. On cite, par exemple, la combinaison quadratique où la réponse totale maximale  $R$  qui s'exprime en fonction des réponses modales maximales  $R_i$  par la relation (3-43), elle est égale à la racine carrée de la somme des carrés des contributions maximales modales.

$$R \simeq \sqrt{\sum_{i=1}^N (R_i)^2} \quad (3-43)$$

La combinaison quadratique aboutit à des résultats satisfaisants lorsque l'amortissement est faible et les fréquences propres des deux modes sont suffisamment écartées. Pour dépasser les limites de cette combinaison on peut utiliser la combinaison quadratique complète qui exprime la réponse maximale comme suit :

$$R \simeq \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \rho_{ij} R_i R_j} \quad (3-44)$$

Où  $\rho_{ij}$  représente le coefficient de corrélation entre les modes  $i$  et  $j$ . Il s'écrit en fonction des pulsations propres et des amortissements modaux de ces deux modes. La formule (3-44) peut être utilisée pour calculer ce coefficient.

$$\rho_{ij} = \frac{8 \sqrt{\xi_i \xi_j \omega_i \omega_j (\omega_i \xi_i + \omega_j \xi_j)} \omega_i \omega_j}{(\omega_i^2 - \omega_j^2)^2 + 4 \xi_i \xi_j (\omega_i^2 + \omega_j^2) \omega_i \omega_j + 4 (\xi_i^2 + \xi_j^2) \omega_i^2 \omega_j^2} \quad (3-45)$$

### 3.4 Choix du nombre de modes

Théoriquement le nombre de mode est égale au nombre de degré de liberté  $N$ . Ce nombre est très élevé dans le cas des structures réelles. Il est nécessaire, donc, de déterminer les  $N$  réponses modales, ce qui n'est pas pratiquement réaliste. Heureusement, l'expérience a montré que les modes supérieures ont une contribution négligeable dans la réponse totale de la structure, cette dernière est réellement contrôlée seulement par les premiers modes de vibration.

En effet, on doit avoir un moyen pour identifier le nombre de modes nécessaires  $N_{mn} \ll N$  à retenir dans une analyse dynamique par la méthode de superposition modale.

La masse modale  $m_i^*$ , définie comme la masse participante pour un mode  $i$  est un paramètre qui peut être utilisé pour choisir le nombre de mode à considérer. Cette masse se calcule par le rapport suivant:

$$m_i^* = \frac{(L_i)^2}{M_i^*} \quad (3-46)$$

Lorsque les  $N$  modes propres sont considérés, la somme des masses modales est égale à la somme totale  $M_T$  de la structure sollicitée dans la direction  $\Delta$ . On a alors :

$$M_T = \Delta^T M \Delta = \sum_{i=1}^N m_i^* \quad (3-47)$$

En pratique on choisit les modes qui permettent d'avoir une participation de la masse supérieure ou égale à 90 % de la masse totale. Le nombre de modes nécessaire  $N_{mn}$  est défini alors par la relation suivante :

$$\sum_{i=1}^{N_{mn}} m_i^* \geq 90\% M_T \quad (3-48)$$

### 3.5 Conclusion

La méthode de superposition modale est utilisée dans cette section pour le calcul de la réponse dynamique des SPDDL. Cette méthode suppose que la réponse totale est égale à la superposition des réponses obtenues pour chaque mode propre de vibration.

A travers cette méthode l'analyse dynamique d'un SPDDL à  $N$  DDL peut être ramenée à l'analyse de  $N$  SSDDL grâce à la propriété d'orthogonalité des modes propres par rapport aux matrices masse et de rigidité. On a vu que la matrice d'amortissement peut également vérifier cette propriété en utilisant des modèles spécifiques.

La méthode modale spectrale, utilisée généralement pour le calcul sismique, consiste à superposer d'une manière adéquate les réponses modales spectrales. Ces dernières sont déterminées à travers le spectre de réponse de la sollicitation imposée. Cette méthode présente l'avantage de donner une bonne approximation de la réponse maximale utilisée couramment pour le dimensionnement des structures.

En pratique, la superposition d'un nombre réduit de modes propres est suffisante pour représenter correctement le mouvement dynamique des SPDDL.

On note par ailleurs que la méthode de superposition modale présente certes un outil simple pour l'étude dynamique des SPDDL mais présente l'inconvénient de sa limitation aux systèmes élastiques linéaires.

## 4. Travaux dirigés

### 4.1 Série de TD N°1 : Equations de mouvements des SPDDL

#### 4.1.1 Rappel de la formulation des équations de mouvement des SPDDL

L'équation de mouvement d'un SPDDL :  $M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + Ku(t) = P(t)$ .

Avec :

$u(t)$ ,  $\dot{u}(t)$  et  $\ddot{u}(t)$  sont respectivement les vecteurs de déplacements, vitesses et accélérations.

$K$ : matrice de rigidité. Elle est symétrique, définie positive et a une structure bande.

$K_{ij}$ : est la force (moment) engendrée suivant le DDL  $i$  par un déplacement (une rotation) unitaire imposé au DDL  $j$ , lorsque les autres DDL sont bloqués.

$K = \delta^{-1}$ ,  $\delta$  est la matrice de flexibilité.  $\delta_{ij}$  est le déplacement produit au DDL  $i$  par une force unitaire appliquée au DDL  $j$  lorsque les autres DDL sont bloqués.

$M$ : matrice masse.

$m_{ij}$ : est la force d'inertie (moment d'inertie) engendrée suivant le DDL  $i$  par une accélération (une accélération rotationnelle) unitaire imposé au DDL  $j$ , lorsque les autres DDL sont bloqués.

La masse de la structure est généralement considérée concentrée en nœuds. Dans ce cas elle est diagonale.

Les masses nodales sont évaluées en considérant les règles de la statique en supposant l'élément entre deux nœuds simplement appuyé.

Pour les DDL de déplacements la masse est égale à la masse parcourue par ce DDL.

Pour les DDL de rotation, si l'étendue de la masse répartie est importante l'inertie massique rotationnelle  $J_0$  doit être considérée dans les calculs. Si non on peut supposer une inertie rotationnelle  $J_0$  nulle.

$C$ : matrice d'amortissement. Les caractéristiques d'amortissement sont difficiles à évaluer. En pratique l'amortissement est traité autrement.

$P(t)$ : vecteur des forces extérieures. Il est constitué des efforts appliqués aux DDL. Si les efforts ne sont pas appliqués aux DDL on utilise les règles de la statique pour évaluer les forces nodales équivalentes, en supposant que l'élément entre deux nœuds est simplement appuyé.

Dans le cas d'excitation de support par un déplacement  $u_g(t)$ :  $P(t) = P_{eff}(t) = -M\Delta\ddot{u}_g(t)$ .

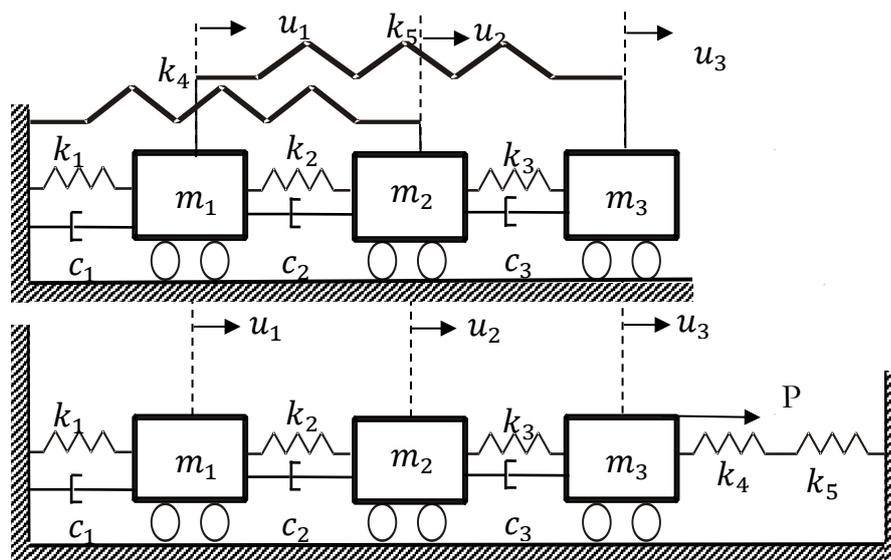
$\Delta$  : est le vecteur donnant la direction de la sollicitation.

Le vecteur  $\Delta$  a pour composantes 1 dans la direction du mouvement de translation, 0 pour les autres directions.

#### 4.1.2 Exercices

##### Exercice 1.1

Ecrire l'équation de mouvement des deux systèmes à 3 degrés de liberté de la Figure 4-1.

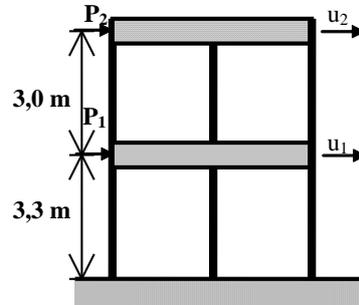


**Figure 4-1. Modèles masse-ressort-amortisseur de deux systèmes à 3 DDL**

##### Exercice 1.2

La structure d'un bâtiment est formée de cinq (05) portiques identiques à celui représenté en Figure 4-2. La section d'un poteau est de  $(30 \times 30) \text{ cm}^2$ . Le module de Young est égal à  $3.10^7 \text{ kN/m}^2$ . Les planchers sont supposés infiniment rigides. La masse du premier niveau est de 140 tonnes alors que celle du second est de 150 tonnes. La masse des poteaux est négligée. On

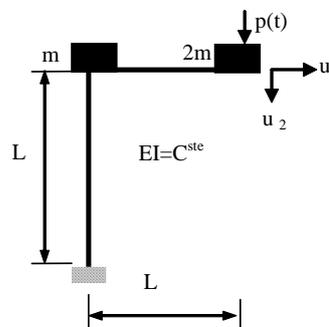
demande d'écrire l'équation de mouvement de ce système soumis aux chargements  $P_1$  et  $P_2$  en considérant les degrés de liberté  $u_1$  et  $u_2$  montrés par la Figure 4-2 .



**Figure 4-2. Portique constituant le bâtiment (Exercice 1.2).**

**Exercice 1.3**

Soit à étudier la structure montrée par la Figure 4-3 où les deux masses sont considérées comme ponctuelles. Par ailleurs, les déformations axiales de la poutre et de la colonne sont négligeables ce qui permet de traiter cette structure comme un système à deux degrés de liberté, ceux indiqués sur la figure. Formuler l'équation de mouvement de cette structure. Pour l'application numérique, on donne :  $M=600$  kg ;  $E.I=2100$  tf.m<sup>2</sup>;  $L=500$  cm,  $P(t)=10 \sin 20t$ .



**Figure 4-3. Modèle de la structure étudiée en Exercice 1.3**

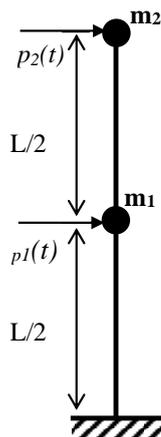
**Exercice 1.4**

La Figure 4-4 montre un modèle à deux masses concentrées. Ce modèle est retenu pour l'étude d'une poutre en béton armé de masse volumique  $\gamma$ , de longueur  $L$ , de section rectangulaire ( $a \times a$ ) et de rigidité  $EI$ . Elle est soumise aux chargements  $p_1(t)$  et  $p_2(t)$ . On demande :

1. D'écrire l'équation de mouvement dans le cas où seuls les déplacements horizontaux des masses sont considérés.

2. De réécrire l'équation de mouvement en considérant que les rotations des masses sont aussi libres.

Pour l'application numérique on donne :  $\gamma = 2.5 \text{ t/m}^3$ ;  $E=2 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ ;  $L=4\text{m}$ , la section de la poutre  $(30 \times 30)\text{cm}^2$



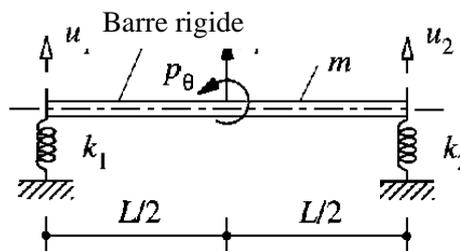
**Figure 4-4. Modèle de la poutre étudiée en Exercice 1.4**

**Exercice 1.5**

Soit une barre infiniment rigide de masse totale  $m$  supportée par deux ressorts de rigidité  $k_1$  et  $k_2$  comme le montre la Figure 4-5.

1. Formuler l'équation de mouvement en considérant que les déplacements verticaux des deux extrémités de la barre sont libres.

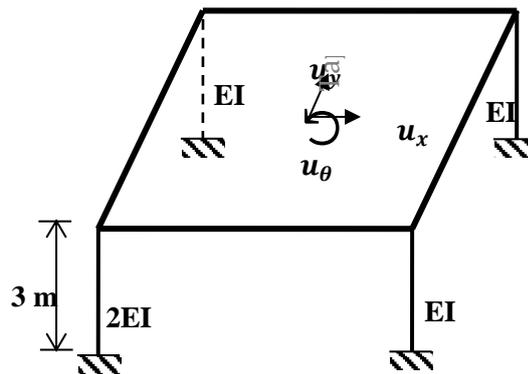
2. Formuler l'équation de mouvement en considérant que seuls le déplacement vertical et la rotation du centre de masse de la barre sont libres.



**Figure 4-5. Modèle de la barre étudiée en Exercice 1.5**

**Exercice 1.6**

La Figure 4-6 montre un plancher infiniment rigide de dimensions  $(6 \times 6) m^2$  et de masse totale  $m$  de 60 tonnes reposant sur 4 poteaux de raideurs variables et de masse négligeable. La section d'un poteau est de  $(30 \times 30) cm^2$  et la hauteur est égale à 3 m. Le module de Young quant à lui vaut  $3.10^7 kN/m^2$ . La structure est non amortie. En considérant un modèle à trois degrés de liberté (les déplacements du centre de masse  $u_x$  et  $u_y$  et sa rotation autour de l'axe  $Zu_\theta$ ). On demande de formuler l'équation de mouvement si cette structure est soumise à un déplacement de support  $u_g$  appliqué dans le sens  $y$  de la structure.



**Figure 4-6. Modèle utilisé dans Exercice 1.6**

**4.2 Série de TD N°2 : Calcul de la réponse dynamique des SPDDL par la méthode de superposition modale**

**4.2.1 Résumé du calcul de la réponse dynamique par la méthode de superposition modale**

1. Discrétisation
2. Calcul des matrices de masse  $M$  et de rigidité  $K$ . Estimation du facteur d'amortissement modale  $\xi_i$  (au moins pour deux modes)
3. Analyse modale : calcul des pulsations propres  $\omega_i$  et modes propres  $\phi_i$ :

$$\det(K - \omega_i^2 M) = 0 \Rightarrow \omega_i^2 \quad (i = 1 \dots N) \quad (\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_i < \dots < \omega_N)$$

$$(K - \omega_i^2 M)\phi_i = 0 \Rightarrow \phi_i \quad (i = 1 \dots N)$$

4. Calcul du déplacement modal

4.1. Calcul des caractéristiques généralisées :

$$M_i^* = \phi_i^T M \phi_i \text{ et } P(t)_i^* = \phi_i^T P(t)$$

4.2. Estimation de  $\alpha$  et  $\beta$  à partir des deux amortissements modaux connus,

Calcul des autres valeurs d'amortissement modal par :  $\xi_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta\omega_i}{2}$

4.3. Résolution des équations différentielles découplées :

$$\ddot{q}_i(t) + 2\xi_i\omega_i\dot{q}_i(t) + \omega_i^2q_i(t) = \frac{P_i^*(t)}{M_i^*} \Rightarrow q_i(t) = q_{i_h}(t) + q_{i_p}(t) \quad (i = 1 \dots N)$$

La réponse homogène :

$$q_{i_h}(t) = e^{-\xi_i\omega_it}(A_i\cos(\omega_{di}t) + B_i\sin(\omega_{di}t))$$

La réponse particulière  $q_{i_p}(t)$  dépend du chargement. Dans le cas général on peut utiliser l'intégrale de DUHAMEL.

Les conditions initiales en coordonnées modales sont exprimées à partir des conditions initiales en coordonnées géométriques par :  $q_i(0) = \frac{\phi_i^T M u(0)}{\phi_i^T M \phi_i}$ ;  $\dot{q}_i(0) = \frac{\phi_i^T M \dot{u}(0)}{\phi_i^T M \phi_i}$ .

4.4. Calcul de la réponse pour chaque mode:

Déplacement :  $u^i(t) = \phi_i q_i(t) (i = 1 \dots N)$

Force élastique dynamique :  $F_e^i(t) = \omega_i^2 M \phi_i q_i(t)$ .

5. Calcul de la réponse totale par superposition modale :

$$u(t) = \sum_{i=1}^N \phi_i q_i(t)$$

$$F_e(t) = \sum_{i=1}^N \omega_i^2 M \phi_i q_i(t)$$

#### 4.2.2 Exercices

##### Exercice 2.1

La Figure 4-7 montre un modèle à 2 masses concentrées. Ce modèle est retenu pour l'étude d'une poutre en béton armé soumise à une force constante égale  $P_0$ . Seuls les déplacements horizontaux sont autorisés.

1. Calculer les modes propres de vibration. Et démontrer qu'ils vérifient la propriété d'orthogonalité.
2. Calculer les déplacements provoqués par la force.
3. Calculer les forces élastiques.
4. Tracer les diagrammes des efforts internes à  $t=T_2$

**AN :**  $L=4m$  ;  $m=8$  tonnes,  $EI=25.10^7 N.m^2$  et  $P_0=65kN$ .

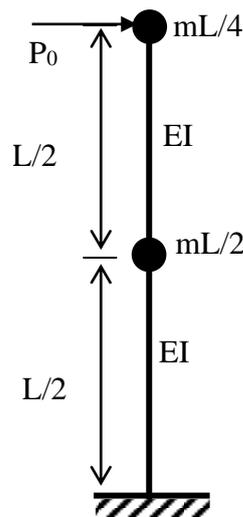
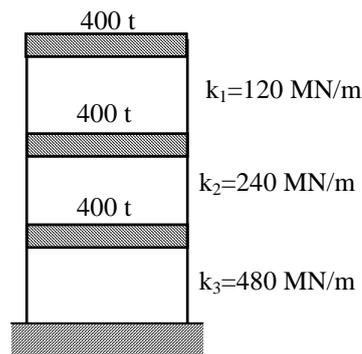


Figure 4-7. Modèle de la poutre étudié en Exercice 2.1

**Exercice 2.2**

La Figure 4-8 montre le modèle d'un bâtiment de trois étages. Les planchers sont supposés infiniment rigides. Les masses des planchers sont considérées concentrées ce qui permet de traiter cette structure comme un système à trois DDL dans le cas où elle serait soumise à des excitations horizontales. Les DDL autorisés sont les déplacements horizontaux des planchers  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ . Par ailleurs, les déformations axiales des poteaux et poutres sont négligeables dans le calcul des rigidités équivalentes de chacun des niveaux.

1. Calculer les pulsations et modes propres de vibration. On donne  $\omega_1 = 11.62(\text{rad/s})$
2. Si la structure est mise en vibrations libres en déplaçant les planchers de  $u_1 = 0.75 \text{ cm}$ ,  $u_2 = -2 \text{ cm}$  et  $u_3 = 0.75 \text{ cm}$  puis on les libère soudainement à l'instant  $t = 0$ , quelle serait la déformée à l'instant  $t = \frac{2\pi}{\omega_1}$ . On considère dans ce cas que la structure est non amortie.
3. On suppose que les facteurs d'amortissement du premier et troisième mode sont respectivement égaux à 5% et 15%. Calculer le facteur d'amortissement du deuxième mode.
4. Déterminer le déplacement en régime permanent au niveau des trois planchers si la structure est soumise à un chargement harmonique appliqué à l'étage supérieur  $p(t) = 25 \sin \bar{\omega} t$  avec  $\bar{\omega} = 1.1 \omega_1$ . L'amortissement dans ce cas est pris en compte.
5. En déduire les déplacements et les forces élastiques maxima ainsi que l'effort tranchant maximum généré à la base du bâtiment.

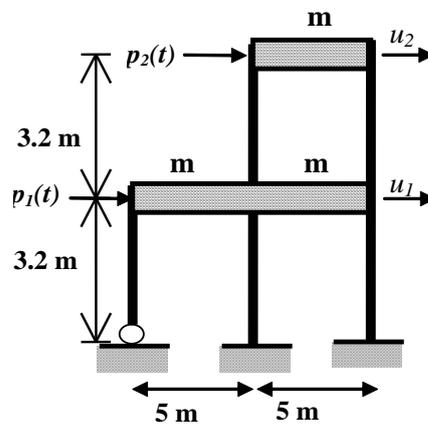


**Figure 4-8. Modèle du bâtiment étudié en Exercice 2.2**

**Exercice 2.3**

Soit la structure illustrée par la Figure 4-9 soumise aux chargements  $p_1(t)$  et  $p_2(t)$  donnés par la Figure 4-10. La section d'un poteau est de  $(25 \times 25) \text{ cm}^2$ . Le module de Young est égal à  $2.10^4 \text{ MPa}$ . Les planchers sont supposés infiniment rigides. Leurs masse linéaire  $m=5\text{t/m}$ .

1. Calculer les pulsations et les modes propres de vibration.
2. Déterminer la déformé de la structure à l'instant  $t = 0.1\text{s}$ .
3. En déduire à cet instant l'effort tranchant développé à la base du portique.
4. Déterminer les déplacements maximums.



**Figure 4-9. Portique à 2 DDL utilisé pour l'Exercice 2.3**

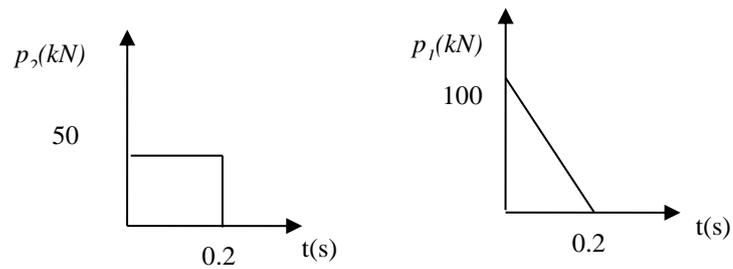


Figure 4-10. Chargements appliqués au portique de l'Exercice 2.2

### 4.3 Série de TD N°3 : Analyse modale spectrale

#### 4.3.1 Résumé de la méthode modale spectrale

1. Discrétisation
2. Calcul des matrices de masse  $M$  et de rigidité  $K$  et estimation du facteur d'amortissement modale  $\xi_i$  (au moins pour deux modes)
3. Calcul des pulsations propres  $\omega_i$  et modes propres  $\phi_i$ :

$$\det(K - \omega_i^2 M) = 0 \Rightarrow \omega_i^2 \quad (i = 1 \dots N) \quad (\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_i < \dots < \omega_N)$$

$$(K - \omega_i^2 M)\phi_i = 0 \Rightarrow \phi_i \quad (i = 1 \dots N)$$

4. Déterminer le nombre de modes  $N_{mn}$  nécessaire :

$$\sum_1^{N_{mn}} m_i^* \geq 90\% M_T$$

$$\text{La masse modale: } m_i^* = \frac{L_i^2}{M_i^*} = \frac{(\phi_i^T M \Delta)^2}{\phi_i^T M \phi_i}$$

$$\text{La masse totale } M_T = \Delta^T M \Delta$$

5. Estimation de  $\alpha$  et  $\beta$  à partir des deux amortissements modaux connus, et calcul des autres valeurs d'amortissement modal par :  $\xi_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta\omega_i}{2}$ ; ( $i = 1 \dots N_{mn}$ )

6. Calcul de la réponse spectrale en déplacement, pseudo vitesse ou pseudo accélération à partir respectivement du spectre de réponse de déplacement, vitesse ou accélération :

$$\text{Spectre en déplacement } S_D(T_i, \xi_i) \quad (i = 1 \dots N_{mn})$$

$$\text{Spectre en pseudo accélération : } S_A(T_i, \xi_i) = \omega_i^2 S_D(T_i, \xi_i) \quad (i = 1 \dots N_{mn}).$$

Spectre en pseudo vitesse :  $S_V(T_i, \xi_i) = \omega_i S_D(T_i, \xi_i)$  ( $i = 1 \dots N_{mn}$ )

7. Calcul de la réponse maximale pour chaque mode :

Déplacement modale maximum :

$$u^{(i)}_{max} = \frac{a_i}{\omega_i^2} \phi_i S_A(\omega_i, \xi_i)$$

Force élastique modale maximale :

$$F_e^{(i)}_{max} = a_i M \phi_i S_A(\omega_i, \xi_i)$$

Facteur de participation modale :  $a_i = \frac{L_i}{M_i^*} = \frac{\phi_i^T M \Delta}{\phi_i^T M \phi_i}$

8. Calcul de la réponse totale maximale  $R_{max}$  par superposition modale en utilisant une règle de cumule comme, par exemple, la règle SRSS :

$$R_{max} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{N_{mn}} (R_{max}^{(i)})^2}$$

#### 4.3.2 Exercices

##### Exercice 3.1

La structure d'un bâtiment est formée de cinq (05) portiques identiques à celui représenté en Figure 4-11. La section d'un poteau est de (30x30) cm<sup>2</sup>. Le module de Young est égal à 3.10<sup>7</sup> KN/m<sup>2</sup>. Les planchers sont supposés infiniment rigides. La masse du premier niveau est de 140 tonnes alors que celle du second est de 150 tonnes. Le facteur d'amortissement du premier mode est égal à 10% et celui du second mode est de 5%. Le spectre de pseudo-vitesse Sv (en cm/s) de la zone où sera construit le bâtiment est donné par la Figure 4-12 les courbes pour  $\xi = 5\%$  et 10% y sont représentées.

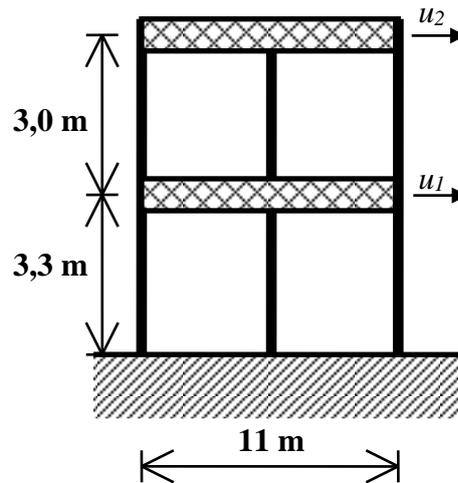


Figure 4-11. Portique constituant le bâtiment étudié en Exercice 3.1

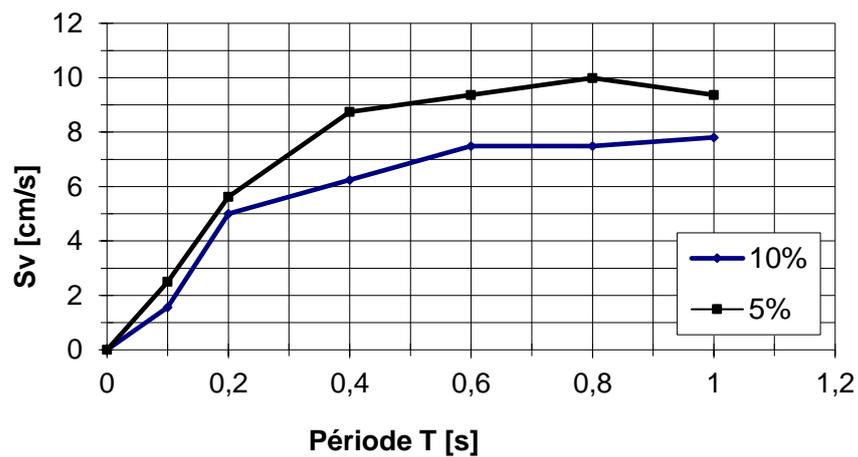


Figure 4-12. Spectre de Pseudo vitesse (Exercice 3.1).

1. Calculer les pulsations et modes propres de vibration.
2. Déterminer les déplacements maximaux relatifs induits par l'événement sismique.
3. Déduire de 2/ les efforts élastiques maximaux et l'effort tranchant maximum à la base.

**Exercice 3.2**

Soit à étudier la réponse dynamique d'un bâtiment de cinq étages. Les masses de tous les niveaux sont égales à 300 t. Les pulsations et les modes propres de vibration calculés à travers une analyse modale sont donnés ci-après:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0,06 & 0,39 & 0,90 & 1,00 & -0,91 \\ 0,22 & 0,96 & 1,00 & -0,21 & 1,00 \\ 0,45 & 1,00 & -0,47 & -0,72 & -0,88 \\ 0,72 & 0,29 & -0,97 & 0,85 & 0,52 \\ 1,00 & -0,90 & 0,63 & -0,31 & -0,14 \end{pmatrix} \begin{matrix} \omega_1 = 5,486 \text{ rad/s} \\ \omega_2 = 35,027 \text{ rad/s} \\ \omega_3 = 99,247 \text{ rad/s} \\ \omega_4 = 191,796 \text{ rad/s} \\ \omega_5 = 285,635 \text{ rad/s} \end{matrix}$$

La construction est réalisée dans une zone où le coefficient d'accélération A vaut 0,1. Le facteur de comportement R est de 4 et le facteur de qualité Q est estimé à 1,2. Cette structure est fondée sur un sol rocheux ( $T_1=0,15s$  et  $T_2=0,3s$ ). Le coefficient de correction d'amortissement  $\eta$  est de 1.

1. Quel est le nombre de modes nécessaire pour le calcul dynamique de cette structure ?
2. Déterminer les déplacements relatifs maxima induits par un séisme.
3. Dédire de 2/ les efforts élastiques maxima et l'effort tranchant à la base.

On donne le spectre de pseudo-accélération des RPA :

$$\frac{S_a}{g} = \begin{cases} 1.25A \left( 1 + \frac{T}{T_1} \left( 2.5\eta \frac{Q}{R} - 1 \right) \right) & 0 \leq T \leq T_1 \\ 2.5\eta(1.25A) \left( \frac{Q}{R} \right) & T_1 \leq T \leq T_2 \\ 2.5\eta(1.25A) \left( \frac{Q}{R} \right) \left( \frac{T_2}{T} \right)^{2/3} & T_2 \leq T \leq 3.0s \\ 2.5\eta(1.25A) \left( \frac{T_2}{3} \right)^{2/3} \left( \frac{3}{T} \right)^{5/3} \left( \frac{Q}{R} \right) & T > 3.0s \end{cases}$$

## 5. Eléments de réponses aux exercices des travaux dirigés

### 5.1 Série de TD N°1.

#### Réponse Exercice 1.1

1.

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + k_5 & -k_2 & -k_5 \\ -k_2 & k_2 + k_4 + k_3 & -k_3 \\ -k_5 & -k_3 & k_5 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{u}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & keq + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ p(t) \end{Bmatrix} \quad \text{avec: } \frac{1}{keq} = \frac{1}{k_4} + \frac{1}{k_5} \rightarrow keq = \frac{k_4 k_5}{k_4 + k_5}$$

#### Réponse Exercice 1.2

$$\begin{bmatrix} 140 & 0 \\ 0 & 150 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + 10^5 \begin{bmatrix} 2.364 & -1.35 \\ -1.35 & 1.35 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{Bmatrix}$$

#### Réponse Exercice 1.3

$$0.6 \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + 144 \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \sin 20t \end{Bmatrix}$$

**Réponse Exercice 1.4**

1.

$$\begin{bmatrix} 0.45 & 0 \\ 0 & 0.225 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + 1446.42 \begin{bmatrix} 16 & -5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{Bmatrix}$$

2.

$$\begin{bmatrix} 0.45 & & & \\ & 0.15 & & \\ & & 0.225 & \\ & & & 0.075 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \\ \ddot{u}_4 \end{Bmatrix} + 1687.5 \begin{bmatrix} 24 & 0 & -12 & 3L \\ 0 & 32 & -12 & 8 \\ -12 & -12 & 12 & -12 \\ 12 & 8 & -12 & 16 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ 0 \\ p_2(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

**Réponse Exercice 1.5**

1.

$$\frac{m}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{p_t}{2} - \frac{p_\theta}{2} \\ \frac{p_t}{2} + \frac{p_\theta}{2} \end{Bmatrix}$$

2.

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & (k_2 - k_1)\frac{L}{2} \\ (k_2 - k_1)\frac{L}{2} & (k_1 + k_2)\frac{L^2}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{p_t}{2} - \frac{p_\theta}{2} \\ \frac{p_t}{2} + \frac{p_\theta}{2} \end{Bmatrix}$$

**Réponse Exercice 1.6**

$$\begin{bmatrix} 60 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 60 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_x \\ \ddot{u}_y \\ \ddot{u}_\theta \end{Bmatrix} + 9000 \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & 90 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_\theta \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 0 \\ 60 \\ 0 \end{Bmatrix} \ddot{u}_g$$

**5.2 Série de TD N°2.**

**Réponse Exercice 2.1**

1.

$$\omega_1 = \frac{3.156}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} = 34.82 \text{ rad/s}; \quad \omega_2 = \frac{16.256}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} = 179.65 \text{ rad/s}$$

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 3.05 \end{Bmatrix}; \quad \phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.65 \end{Bmatrix}$$

$$\phi_1^T M \phi_2 = 0 ; \phi_1^T K \phi_2 = 0$$

2.

$$u(t) = \begin{Bmatrix} 0.001777 \\ 0.0053 \end{Bmatrix} (1 - \cos 34.82t) + \begin{Bmatrix} 6.64 \times 10^{-5} \\ -4.316 \times 10^{-5} \end{Bmatrix} (\cos 179.65t - 1) [m]$$

3.

$$F_e(t) = \begin{Bmatrix} 34.33 \\ 52.36 \end{Bmatrix} (1 - \cos 34.82t) + \begin{Bmatrix} 34.28 \\ -11.34 \end{Bmatrix} (\cos 179.65t - 1) [kN]$$

4.

$$F_e(T_2) = \begin{Bmatrix} 22.31 \\ 34.034 \end{Bmatrix}$$



**Figure 5-1. Diagrammes des efforts tranchant (T) et des moments fléchissant (M) à  $t=T_2$**

**Réponse Exercice 2.2**

1.

$$\omega_2 = 27.52 \text{ rad/s}; \omega_3 = 45.85 \text{ rad/s}$$

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.55 \\ 0.198 \end{Bmatrix}; \phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1.53 \\ -0.88 \end{Bmatrix}; \phi_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -6.015 \\ 11.85 \end{Bmatrix}$$

2.

$$u\left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right) = \begin{Bmatrix} -0.557 \\ 0.0335 \\ 1.76 \end{Bmatrix} [cm]$$

3.

$$\xi_2 = 9.35\%$$

4.

$$u(t) = \phi_1 q_1(t) + \phi_2 q_2(t) + \phi_3 q_3(t)$$

$$q_1(t) = 14.34 \times 10^{-4} \sin(12.78t + 0.48) [m]$$

$$q_2(t) = 2.5 \times 10^{-5} \sin(12.78t - 0.11) [m]$$

$$q_3(t) = 1.79 \times 10^{-7} \sin(12.78t - 0.09) [m]$$

5.

$$u_{max} = \begin{Bmatrix} 0.14 \\ 0.08 \\ 0.03 \end{Bmatrix} [cm]$$

$$F_{e_{max}} = \begin{Bmatrix} 79.23 \\ 44.78 \\ 17.08 \end{Bmatrix} [kN]$$

$$V_{max} = 138.0024 [kN]$$

### **Réponse Exercice 2.3**

1.

$$\omega_1 = 7.85 \text{ rad/s}; \omega_2 = 18.21 \text{ rad/s}$$

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 0.676 \\ 1 \end{Bmatrix}; \phi_2 = \begin{Bmatrix} -0.739 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

2.

$$u(0.1) = \begin{Bmatrix} 0.766 \\ 0.973 \end{Bmatrix} [cm]$$

$$V(0.1) = 41.1 [kN]$$

3.

$$u_{max} = \begin{Bmatrix} 0.029 \\ 0.044 \end{Bmatrix} [m]$$

### **5.3 Série de TD N°3.**

#### **Réponse Exercice 3.1**

1.

$$\omega_1 = 16.815 \text{ rad/s}; \omega_2 = 48.021 \text{ rad/s}$$

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.458 \end{Bmatrix}; \phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.64 \end{Bmatrix}$$

2.

$$u_{max}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 2.84 \\ 4.14 \end{Bmatrix} 10^{-3} [m]$$

$$u_{max}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 0.173 \\ -0.111 \end{Bmatrix} 10^{-3} [m]$$

$$u_{max} = \begin{Bmatrix} 2.845 \\ 4.141 \end{Bmatrix} 10^{-3} [m]$$

3.

$$F_{e_{max}}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 112.55 \\ 175.5 \end{Bmatrix} [kN]$$

$$F_{e_{max}}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 55.89 \\ -38.34 \end{Bmatrix} [kN]$$

$$F_{e_{max}} = \begin{Bmatrix} 125.66 \\ 179.64 \end{Bmatrix} [kN]$$

$$V_{max}^{(1)} = 288.05 [kN]$$

$$V_{max}^{(1)} = 17.55 [kN]$$

$$V_{max} = 288.58 [kN]$$

### Réponse Exercice 3.2

1. le nombre de mode nécessaire est égal à 3.

2.

$$u_{max}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 0.0011 \\ 0.0038 \\ 0.0078 \\ 0.00124 \\ 0.0173 \end{Bmatrix} [m]$$

$$u_{max}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 0.1744 \\ 0.4254 \\ 0.4417 \\ 0.1276 \\ -0.3959 \end{Bmatrix} 10^{-3} [m]$$

$$u_{max}^{(3)} = \begin{Bmatrix} 0.3216 \\ 0.3590 \\ -0.1679 \\ -0.3497 \\ 0.2273 \end{Bmatrix} 10^{-4} [m]$$

$$u_{max} = \begin{Bmatrix} 0.0011 \\ 0.0039 \\ 0.0078 \\ 0.00124 \\ 0.0173 \end{Bmatrix} [m]$$

3.

$$F_{max}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 9.55 \\ 34.73 \\ 70.47 \\ 112.20 \\ 156.33 \end{Bmatrix} [kN]$$

$$F_{max}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 64.18 \\ 156.61 \\ 162.59 \\ 46.98 \\ -145.74 \end{Bmatrix} [kN]$$

$$F_{max}^{(3)} = \begin{Bmatrix} 95.04 \\ 106.09 \\ -49.63 \\ -103.36 \\ 67.1746 \end{Bmatrix} [kN]$$

$$F_{max} = \begin{Bmatrix} 115.08 \\ 192.32 \\ 184.02 \\ 159.62 \\ 224.04 \end{Bmatrix} [kN]$$

## Bibliographies

CHOPRA A.K, Dynamics of Structures: Theory and Application to Earthquake Engineering, Prentice Hall, 1995.

CLOUGH R.W, PENZIEN J, Dynamics of Structures, third edition, Computers and Structures, Inc., Berkeley, California, 1995.

DATTA T. K, Seismic analysis of structures, John Wiley & Sons (Asia). Pte Ltd, 2010, (<http://onlinelibrary.wiley.com/book/10.1002/9780470824634>).

MEGNOUNIF A, DJAFOR M, Eléments de calcul et de conception des structures en zones sismiques, Université de Tlemcen, 1994.

NACER N, HADJ ARAB A, Recueil de problèmes de la dynamique des structures avec leurs solutions (DDS), Office des publications universitaires, 1999.

PAZ M., WILLIAM L, Structural Dynamics: Theory and computation, fifth edition, updated with Sap2000, Kluwer Academic Publishers, 2004.

PECKER A, Dynamiques des structures et des ouvrages, Ecole nationale des ponts et des chaussées, Paristech, 2006