

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

[Société]



Faculté de Technologie
Département de Génie Civil

POLYCOPIE DE COURS

Calcul Des Structures Hyperstatiques

Dr Djafour Benkelfat
Naoual

Elaboré par

Dr Meddane Benmansour
Nassima

Première Edition : Année Universitaire 2018-2019

CALCUL DES STRUCTURES HYPERSTATIQUES

Première Edition. Année universitaire 2018-2019

Avant-propos

Le présent ouvrage est un cours de calcul des structures hyperstatiques qui s'adresse aux étudiants de la filière Génie Civil. Notre objectif à travers son élaboration est de faciliter à l'étudiant l'assimilation et la compréhension des cours dispensés.

Ce document est organisé en trois chapitres. Le premier chapitre commence par rappeler quelques notions fondamentales de la résistance des matériaux. On introduit ensuite les structures hyperstatiques ainsi que les méthodes de calcul des degrés d'hyperstaticité pour les structures en treillis et les structures en portique.

Le deuxième chapitre présente la méthode des forces pour le calcul des structures hyperstatiques. Pour faciliter l'assimilation de la méthode quelques exemples sont ensuite traités.

Le troisième chapitre est consacré à la méthode des déplacements. C'est une méthode qui permet de traiter aussi bien les systèmes isostatiques qu'hyperstatiques. En plus du principe de la méthode des déplacements, nous avons jugé utile de présenter les solutions des poutres isolées soumises à des déplacements imposés en leurs extrémités. Les efforts développés dans les poutres isolées chargées en travée, lorsque leurs extrémités ne se déplacent pas sont également exposés. Nous avons abordé ensuite la problématique de l'orientation des poutres. Ce chapitre est également clôturé par des applications.

Il est possible que cette première version comporte quelques imperfections, nous serons reconnaissantes à tous ceux qui nous feraient part de leurs remarques et suggestions.

Nous tenons à remercier le Pr MEGNOUNIF Abdellatif et Dr BENADLA Zahira pour avoir bien voulu juger ce document et nous aider à l'améliorer.

Table des Matières

LISTE DES TABLEAUX.....	V
LISTE DES FIGURES.....	VI
CHAPITRE 1.....	1
RAPPELS DE QUELQUES CONCEPTS DE LA RESISTANCE DES MATERIAUX	1
1.1 Equilibre	1
1.1.1 Equilibre global.	1
1.1.2 Equilibre local.	3
1.2 Conventions des efforts internes.....	5
1.3 Système hyperstatique	6
1.4 Calcul du degré d'hyperstaticité	7
1.4.1 Cas des poutres en treillis.....	7
1.4.2 Cas des portiques.....	8
1.5 Résolution des systèmes hyperstatiques.....	10
CHAPITRE 2.....	11
LA METHODE DES FORCES	11
2.1 Introduction	11
2.2 Principe de la Méthode des Forces (MF).....	12
2.3 Décomposition du problème	12
2.4 Résolution des systèmes associés.....	13
2.5 Application de la MF aux poutres continues.....	15
2.5.1 Modélisation.....	15
2.5.2 Application de l'équation des 3 moments (Formule de Clapeyron).....	19

2.5.3	La méthode de la poutre fictive.....	20
2.5.4	Exemple d'application	21
2.6	Application de la MF aux structures planes.	24
2.6.1	Structures planes en treillis	24
2.6.2	Structures planes en portiques.....	28
CHAPITRE 3.....		32
METHODE DES DEPLACEMENTS.....		32
3.1	Introduction	32
3.2	Déplacements d'un point	33
3.3	Déplacements d'un point dans un plan	33
3.4	Les nœuds	33
3.5	Principe de la méthode.....	34
3.5.1	Efforts aux nœuds induits par leurs déplacements (Partie I).	35
3.5.2	Efforts aux nœuds dus aux charges extérieures. (Partie II).	37
3.5.3	Equilibre des nœuds (Partie I) + (Partie II).....	38
3.5.4	Solution du système d'équations	39
3.5.5	Calcul des paramètres dans les poutres	39
3.6	Problématique du choix des DDL et du volume de calculs	40
3.7	Méthode des Déplacements vs Méthode des Forces	40
3.8	Méthode des Déplacements classique (MD_c)	40
3.8.1	Hypothèse de conservation de la longueur des poutres.....	40
3.8.2	Conséquence sur les DDL.....	41
3.8.3	Conséquence sur l'équilibre	42
3.8.4	Équilibre des nœuds selon les DDL de rotation	42
3.8.5	Equilibre selon le DDL de translation.....	42
3.8.6	Système à résoudre	43
3.9	Calcul des paramètres dans les poutres. Particularité des efforts axiaux	45
3.10	Les solutions des Poutres Isolées.....	45

3.10.1	Forces induites – Déplacements imposés	45
3.10.2	Forces aux nœuds dues aux charges en travée seules	53
3.10.3	Forces totales aux nœuds.	56
3.10.4	Forces aux nœuds dans le cas de la MDc.	56
3.10.5	Poutres Isolées particulières.....	57
3.11	Problématique de l'orientation des poutres.....	60
3.11.1	Poutres orthogonales entre-elles.	60
3.11.2	Poutres inclinées.....	61
3.12	Applications.	63
3.12.1	Exemple 1.....	63
3.12.2	Exemple 2.....	70
	REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	81

Liste des Tableaux

Tableau 2-1 : Les efforts de l'exemple d'application	28
Tableau 3-1 : Exemples de dispositifs sources de discontinuité.....	57

Liste des Figures

Figure 1-1. Modèle de la liaison dite appui simple pour un problème plan.	2
Figure 1-2. Modèle de la liaison dite appui double ou articulation pour un problème plan... ..	2
Figure 1-3. Modèle de la liaison dite encastrement pour un problème plan.	2
Figure 1-4. Représentation d'une poutre.....	3
Figure 1-5. Définition du repère local (attaché à un élément).	4
Figure 1-6. Convention de signe du trièdre direct. Efforts positifs.....	6
Figure 1-7. Exemple de système rotulé.....	7
Figure 1-8. Structure du 2 ^{ème} exemple.	8
Figure 1-9. Système en portique de l'exemple 1.	8
Figure 1-10. Système en portique de l'exemple 2.	9
Figure 1-11. Modèle du 3ème exemple.	9
Figure 2-1. Modélisation d'une poutre continue.	15
Figure 2-2. Légende utilisée pour définir une poutre continue.	15
Figure 2-3. Inconnues hyperstatiques de la poutre continues	16
Figure 2-4. Diagramme du moment fléchissant de l'inconnue hyperstatique X1	16
Figure 2-5. Diagramme du moment fléchissant de l'inconnue hyperstatique X2	16
Figure 2-6. Introduction des rotules aux droites des appuis.	17
Figure 2-7. Système isostatique associé.....	17
Figure 2-8. Systèmes isostatiques équivalents au système hyperstatique.....	17
Figure 2-9. Continuité de la rotation de l'appui i	17
Figure 2-10. Les travées adjacentes à l'appui i	18
Figure 2-11. diagrammes du moment fléchissant provoqué par un moment unitaire dans la direction des inconnues hyperstatiques M_{i-1} et M_{i+1}	19
Figure 2-12. diagramme du moment fléchissant provoqué par un moment unitaire dans la direction de l'inconnue hyperstatique M_i	19
Figure 2-13. Poutre hyperstatique	21
Figure 2-14. Cas particulier de l'encastrement	21
Figure 2-15. Système isostatique équivalent	22
Figure 2-16. Diagrammes des moments fléchissant m1 et M0	23

Figure 2-17. Diagramme du moment fléchissant m_2 et M_0 pour la travée de longueur L_{223}	
Figure 2-18. Structure en treillis de l'exemple d'application.	24
Figure 2-19. Système fondamental équivalent	25
Figure 2-20. Système en portique de l'exemple d'application	29
Figure 2-21. Système de base (fondamental)	29
Figure 2-23Figure 2-22. Diagrammes des moments fléchissant M_2 , et M_1	30
Figure 2-23. Diagramme du moment fléchissant M_0	30
Figure 2-24. Diagramme final du moment fléchissant.....	31
Figure 3-1. Degrés de liberté d'un point dans le plan XY	33
Figure 3-2. Structure et modèle de l'exemple d'illustration	34
Figure 3-3. La cinématique de la structure.	35
Figure 3-4. Les efforts aux nœuds induits par les déplacements des nœuds.....	36
Figure 3-5. Les efforts aux nœuds induits par les charges extérieures.....	38
Figure 3-6. Efforts et DDL aux nœuds d'une poutre	39
Figure 3-7. Représentation des différents DDL.....	41
Figure 3-8. Équilibre (Partie I). Les Efforts induits par les déplacements des nœuds.....	44
Figure 3-9. Équilibre (Partie II). Les Efforts dus aux charges extérieures (sans aucun déplacement des nœuds)	44
Figure 3-10. Illustration des différents DDL/Efforts aux nœuds	46
Figure 3-11. Décomposition : Flexion simple Comportement axial.....	46
Figure 3-12. Flèche en imposant v_{ij} seul.	47
Figure 3-13. Moment fléchissant en imposant v_{ij} seul	48
Figure 3-14. Effort tranchant en imposant v_{ij} seul.....	48
Figure 3-15. Efforts induits aux nœuds en imposant v_{ij} seul.	49
Figure 3-16. Déformée en imposant θ_{zij} seul.	49
Figure 3-17. Moment fléchissant en imposant θ_{zij} seul.	49
Figure 3-18. Effort tranchant en imposant θ_{zij} seul.....	50
Figure 3-19. Efforts induits en imposant θ_{zij} seul.....	50
Figure 3-20. Moment fléchissant en imposant v_{ji} seul.	51
Figure 3-21. Effort tranchant en imposant v_{ji} seul.....	51

Figure 3-22. Efforts induits aux nœuds en imposant v_{ji} seul.	51
Figure 3-23. Moment fléchissant en imposant θ_{zji} seul	51
Figure 3-24. Effort tranchant en imposant θ_{zji} seul.....	52
Figure 3-25. efforts induits aux nœuds en en imposant θ_{zji} seul	52
Figure 3-26. Efforts induits aux nœuds dans le cas de la sollicitation axiale.	53
Figure 3-27. Forces aux nœuds dues aux charges en travées.....	53
Figure 3-28. Moment fléchissant. Cas de la charge transversale uniformément répartie	54
Figure 3-29. Effort tranchant. Cas de la charge transversale uniformément répartie	54
Figure 3-30. Forces aux nœuds. Cas de la charge transversale uniformément répartie	54
Figure 3-31. Moment fléchissant. Cas d'une force concentrée à mi-travée.....	55
Figure 3-32. Effort tranchant. Cas d'une force concentrée à mi travée.	55
Figure 3-33. Forces aux nœuds dues à une charge concentrée à mi-travée	56
Figure 3-34. Poutre avec une extrémité articulée	58
Figure 3-35. Modèles pour poutres articulées à une extrémités.....	58
Figure 3-36. Forces aux nœuds. Cas d'une charge répartie.....	59
Figure 3-37. Forces aux nœuds. Cas d'une force concentrée à mi travée.....	59
Figure 3-38. Portique à poutres orthogonales entre elles	60
Figure 3-39. Poutre inclinée	61
Figure 3-40. Les composantes des translations des nœuds.....	62
Figure 3-41. Les actions des nœuds sur les poutres isolées	62
Figure 3-42. structure de l'application.....	64
Figure 3-43. Chargement et diagrammes des efforts internes pour $q = 10kN/m$	68
Figure 3-44. Chargement et diagrammes des efforts internes pour $Q = 10kN$	68
Figure 3-45. Chargement et diagrammes des efforts internes pour $P = 10kN$	69
Figure 3-46. Chargement et diagrammes des efforts internes pour $\Gamma = 10kN.m$	69
Figure 3-47. Les diagrammes des efforts internes.....	70
Figure 3-48. Structure et chargement de l'exemple 2	70
Figure 3-49. Nœuds et orientations des poutres.....	71
Figure 3-50. La cinématique de structure	73

Chapitre 1

Rappels de quelques concepts de la résistance des matériaux

1.1 Equilibre

1.1.1 Equilibre global.

L'analyse d'une structure nécessite de connaître toutes les forces extérieures qui lui sont appliquées. Le terme forces doit être compris dans son sens général (force ou moment appliqués, réactions d'appui). On distingue alors, les forces connues, qui sont une donnée de conception, et les forces de réaction qu'il faut calculer. Elles découlent de l'application des forces connues par application du principe fondamental de la statique qui traduit l'équilibre.

Une structure ne peut se maintenir en équilibre que si elle est appuyée ou encastrée dans le sol ou à une autre structure immobile. Ces points de liaison permettent de développer les réactions nécessaires à équilibrer l'action.

1.1.1.1 Les différents types de liaisons

Il est nécessaire de définir trois translations et trois rotations pour caractériser le déplacement d'un corps rigide dans l'espace. Ces composantes sont décrites dans un repère orthonormé ($OXYZ$).

Pour un problème plan, on aura trois composantes : deux translations contenues dans le plan et la rotation autour d'un axe qui lui (plan) est perpendiculaire.

Les liaisons diffèrent entre elles par la nature et le nombre de déplacements qu'elles empêchent. Chaque type de liaison offre une combinaison propre de réactions en termes de force et/ou de moment.

a. Appui simple

L'appui simple est le modèle d'un dispositif qui s'oppose à la translation dans une direction ; il laisse libres les autres directions de translation et les rotations. Il développe donc une seule composante de force de réaction qui peut être soit horizontale, verticale ou dans une direction quelconque.



Figure 1-1. Modèle de la liaison dite appui simple pour un problème plan.

b. Appui double ou articulation

Celle-ci ne laisse libre que la ou les rotations. Elle développe donc deux composantes de forces de réaction si la structure est dans le plan, et trois composantes si le problème est tridimensionnel.



Figure 1-2. Modèle de la liaison dite appui double ou articulation pour un problème plan.

c. Encastrement

L'encastrement est un dispositif de liaison qui bloque toutes les translations et rotations. Il permet donc de développer aussi bien des forces que des moments de réaction.

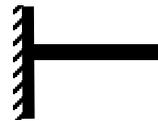


Figure 1-3. Modèle de la liaison dite encastrement pour un problème plan.

1.1.1.2 Principe fondamental de la statique (PFS).

Une structure soumise à un ensemble de forces est en équilibre si elle ne subit ni translation ni rotation. Ceci se traduit par les six relations du principe fondamental de la statique :

- La somme des composantes dans la direction de X est nulle
- La somme des composantes dans la direction de Y est nulle
- La somme des composantes dans la direction de Z est nulle
- La somme des moments autour de X par rapport à un point quelconque est nulle
- La somme des moments autour de Y par rapport à un point quelconque est nulle.
- La somme des moments autour de Z par rapport à un point quelconque est nulle.

$$\begin{aligned}
\Sigma \vec{F}_X &= \vec{0} \\
\Sigma \vec{F}_Y &= \vec{0} \\
\Sigma \vec{F}_Z &= \vec{0} \\
\Sigma \vec{M}_X &= \vec{0} \\
\Sigma \vec{M}_Y &= \vec{0} \\
\Sigma \vec{M}_Z &= \vec{0}
\end{aligned}
\tag{1-1}$$

Une structure est dite plane si sa géométrie est contenue dans un plan ; les forces qui lui sont appliquées sont dans ce plan et les moments sont appliqués autour d'un axe perpendiculaire à son plan. Si le problème est plan défini dans XY l'équilibre est traduit par

$$\begin{aligned}
\Sigma \vec{F}_X &= \vec{0} \\
\Sigma \vec{F}_Y &= \vec{0} \\
\Sigma \vec{M} &= \vec{0}
\end{aligned}
\tag{1-2}$$

1.1.2 Equilibre local.

1.1.2.1 Notion de poutre

Une poutre est un solide qui a une dimension très grande par rapport aux deux autres. Elle est engendrée par le déplacement d'une section droite, dont le centre de gravité décrit une courbe dite fibre moyenne. La section droite est partout perpendiculaire à la fibre moyenne (Figure 1-4).

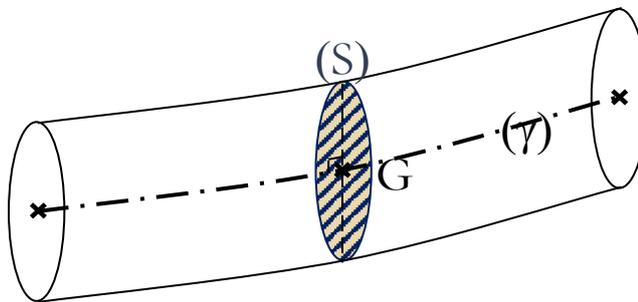


Figure 1-4. Représentation d'une poutre.

1.1.2.2 Les efforts internes

Les efforts internes sont les forces exercées par la partie gauche de la structure sur la partie droite, ou inversement ces deux parties étant situées de part et d'autre d'une section fictive. La gauche et la droite sont définies grâce au choix explicite d'un axe orienté le long de l'élément (Figure 1-5).

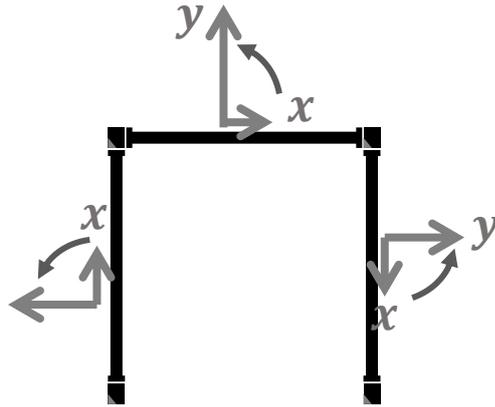


Figure 1-5. Définition du repère local (attaché à un élément).

Dans ce cours la convention du repère orthonormé direct est utilisée. Le repère est construit comme suit :

- Le centre du repère est au centre de gravité de la section. Les composantes de moment sont exprimées par rapport à ce point.
- L'axe x , appelé axe longitudinal, est perpendiculaire à la section, tangent à la fibre moyenne et orienté de façon arbitraire. Son orientation permet de définir les parties gauche et droite de part et d'autre d'une coupure fictive. Généralement la partie droite est du côté des valeurs croissantes de l'axe x .
- Les axes y et z sont dans le plan de la section droite et forment avec l'axe x un trièdre orthogonal direct. Le repère est dit direct si les axes x , y , et z sont orientés respectivement comme les trois premiers doigts de la main droite.

Les efforts internes sont donc les composantes de forces et de moments de l'action de l'une des deux parties sur l'autre, c'est-à-dire transmis par la partie gauche sur la partie droite, ou de la partie droite sur la partie gauche, exprimées dans le repère local (Figure 1-5) et définis comme suit :

L'effort normal, noté N_x ou N est la composante selon l'axe x . Comme son nom l'indique il est perpendiculaire à la section transversale.

Les efforts tranchants, noté T_y et T_z sont les composantes selon les axes y et z respectivement. Dans un problème plan l'un des deux est nul.

Les moments fléchissant, noté M_y et M_z sont les moments autour des axes y et z respectivement. De même, pour un problème plan l'un des deux est nul.

Le moment de torsion, noté M_x ou M_t est le moment autour de l'axe x . Pour un problème plan il n'existe pas de moment de torsion.

1.1.2.3 Principe de calcul des efforts internes.

Pour chaque section dans laquelle on souhaite connaître les efforts internes, il faut :

- Fixer le repère local ;
- Isoler la partie de la poutre qui se trouve à gauche d'une section fictive, la gauche est du côté des valeurs décroissantes de x .
- Dresser le bilan de toutes les actions et réactions qui s'exercent sur la partie isolée.
- Les efforts internes doivent assurer l'équilibre de la section.
 - L'effort normal N_x doit équilibrer toutes les actions dans la direction de l'axe x .
 - L'effort tranchant T_y doit équilibrer toutes les actions dans la direction de l'axe y
 - L'effort tranchant T_z doit équilibrer toutes les actions dans la direction de l'axe z .
 - Le moment de torsion M_x doit équilibrer toutes les actions autour de l'axe x .
 - Le moment fléchissant M_y doit équilibrer toutes les actions autour de l'axe y .
 - Le moment fléchissant M_z doit équilibrer toutes les actions autour de l'axe z .

1.2 Conventions des efforts internes.

On peut adopter différentes conventions pour manipuler les grandeurs vectorielles, tensorielles et torsorielles, l'essentiel est d'en choisir une qui réponde aux conditions mathématiques d'un repère. Les conventions diffèrent d'une école à une autre, d'une référence bibliographique à une autre, d'un enseignant à un autre, et d'un logiciel à un autre. De toutes les façons, ce dont il faut être sûr c'est que les résultats seront toujours physiquement identiques (à conditions de ne pas se tromper).

Peu importe si on utilise la convention, du repère direct, du repère indirect ou de Timoshenko. Il faut juste savoir qu'il faut en choisir une pour faire tous les calculs. L'erreur à éviter absolument est celle de dire qu'il n'existe qu'une seule convention. Il faut essayer de développer la compétence de s'adapter aux diverses situations possibles.

Dans ce cours la convention du trièdre directe avec traction positive est utilisée.

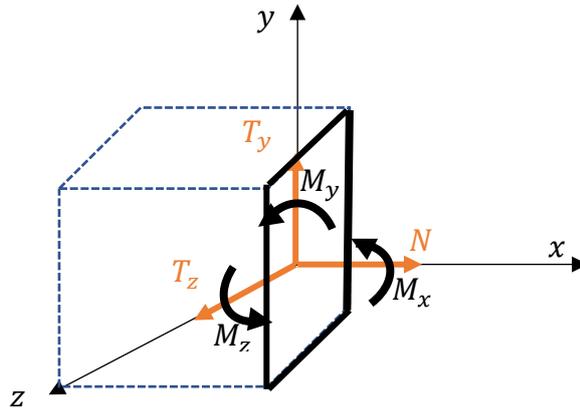


Figure 1-6. Convention de signe du trièdre direct. Efforts positifs.

1.3 Système hyperstatique

Un système hyperstatique est un système où les **équations d'équilibre** ne suffisent pas à calculer les **forces**. Il y a plus d'inconnues que d'équations d'équilibre car le système comporte une surabondance de « liaisons » internes et/ou externes. Le nombre de ces liaisons est appelé degré d'hyperstaticité. On définit alors trois types d'hyperstaticité

- **L'hyperstaticité externe** qui considère la structure comme indéformable et qui porte sur les liaisons externes (réactions).
- **L'hyperstaticité interne** qui porte sur des mécanismes dus aux liaisons internes (éléments de réductions).
- **L'hyperstaticité totale** constituée par la somme des deux.

Le degré d'hyperstaticité est donc le nombre de liaisons surabondantes par rapport à la juste stabilité.

Le degré d'hyperstaticité d'une structure renseigne donc sur son niveau de stabilité. Elle est considérée stable si aucune de ses parties ne se déplace librement dans l'espace.

Une structure hypostatique n'est pas stable (instable). Il lui manque des liaisons.

Une structure isostatique est juste stable, la suppression d'une liaison la rendrait instable.

Une structure hyperstatique est plus que stable, une ou plusieurs liaisons surabondantes peuvent être supprimées sans affecter sa stabilité.

Lorsque les liaisons surabondantes ne sont que des réactions, l'hyperstaticité est dite extérieure et le degré d'hyperstaticité se calcule par

$$DH_e = NR - NE \quad (1-3)$$

Où

DH_e : Degré d'hyperstaticité extérieure

NR : Nombre de réactions

NE : Nombre d'équations.

$$NE = \begin{cases} 3 & \text{Si structure en 2D} \\ 6 & \text{Si structure en 3D} \end{cases} \quad (1-4)$$

Lorsque les liaisons surabondantes sont des efforts intérieurs (éléments de réduction) l'hyperstaticité est dite intérieure.

Le degré d'hyperstaticité intérieur se calcule par

$$DH_i = DH - DH_e \quad (1-5)$$

Si on connaît le degré d'hyperstaticité on en déduit le degré d'hyperstaticité intérieur.

1.4 Calcul du degré d'hyperstaticité

1.4.1 Cas des poutres en treillis

Soit un système réticulé de b barres, où r est le nombre de réactions d'appui et n est le nombre total de nœuds.

Par nœud rotulé, on peut établir 2 équations (équilibre vertical et équilibre horizontal), ce qui procure un total de $2n$ équations. Par ailleurs, les inconnues sont les b efforts normaux relatifs à chaque barre ainsi que les r réactions d'appui. Le degré d'hyperstaticité vaut donc

$$DH = b + r - 2 \times n \quad (1-6)$$

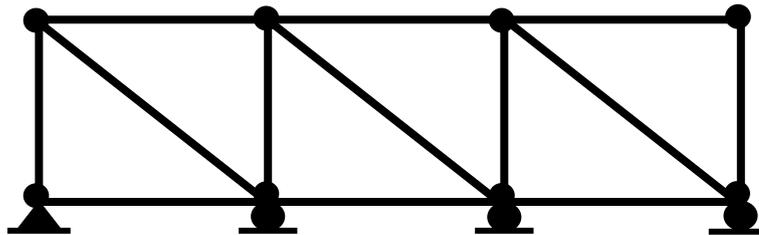


Figure 1-7. Exemple de système rotulé.

Pour le système en treillis de la Figure 1-7, on souhaite calculer le degré d'hyperstaticité. Il est donné par l'équation (1-6). Ce treillis a 13 barres, 5 réactions d'appuis et 8 nœuds. Alors son degré d'hyperstaticité

$$DH = 13 + 5 - 2 \times 8 = 2$$

Le treillis est donc deux fois hyperstatique. C'est une hyperstaticité extérieure.

Un deuxième exemple est celui de la Figure 1-8, celui-ci est fait de 16 barres, il est immobilisé par 2 appuis simples et 2 appuis doubles donc au total 6 actions de liaisons. Les barres et les appuis sont interconnectés entre eux par l'intermédiaire de 8 nœuds.

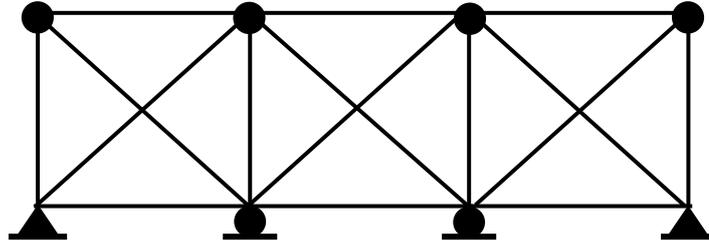


Figure 1-8. Structure du 2^{ème} exemple.

$$DH = b + r - 2 \times n = 16 + 6 - 2 \times 8$$

$$DH = 6$$

Ce treillis est donc 6 fois hyperstatique. Comme le nombre d'équations dans le cas d'un problème plan est égale à 3, ce dernier est alors 3 fois hyperstatique extérieur et 3 fois hyperstatique intérieur.

1.4.2 Cas des portiques.

Soit k le nombre d'équations d'équilibre. Il est égal à 3 si le problème est plan et est égal à 6 si le problème est spatial. Le nombre de réactions d'appuis r , n est le nombre d'efforts internes connus et n_{cf} est le nombre de contours fermés. L'expression de l'équation (1-7) ci-dessous donne la valeur du degré d'hyperstaticité de ce portique.

$$DH = r - (k + n) + 3 \times n_{cf} \tag{1-7}$$

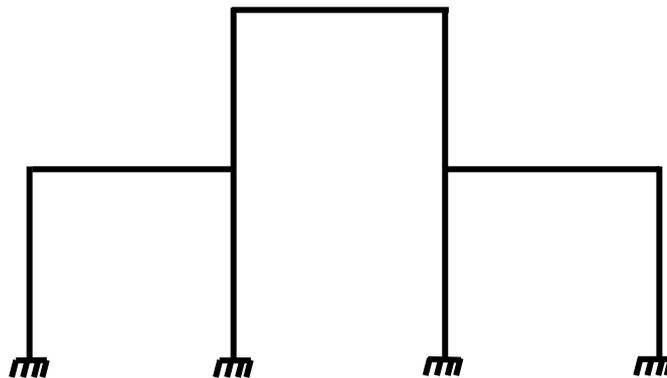


Figure 1-9. Système en portique de l'exemple 1.

$$DH = 12 - (3 + 0) + 3 \times$$

$DH = 9$. Le portique est donc 9 fois hyperstatique extérieure

Le deuxième exemple est celui de la Figure 1-10, il compte 3 contours fermés, 3 réactions d'appuis.

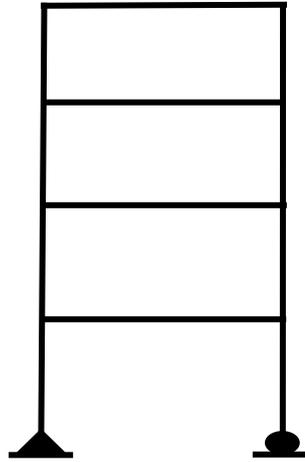


Figure 1-10. Système en portique de l'exemple 2.

$$DH = 3 - (3 + 0) + 3 \times 3$$

$$DH = 9$$

Le portique 2 est 9 fois hyperstatique. Son hyperstaticité est intérieure.

Le dernier exemple de calcul du degré d'hyperstaticité dans le cas des portiques est celui de la Figure 1-11.

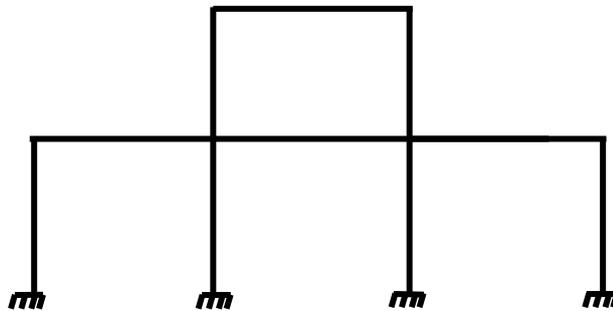


Figure 1-11. Modèle du 3ème exemple.

$$DH = 12 - (3 + 0) + 3 \times 0$$

$$DH = 12.$$

Ce portique est 9 fois hyperstatique extérieure et 3 fois hyperstatique intérieure.

1.5 Résolution des systèmes hyperstatiques.

Une structure hyperstatique contient un nombre surabondant d'appuis ou d'efforts internes (d'inconnues). Le principe fondamental de la statique à lui seul, ne permet pas la résolution de ce type de structures. Des conditions supplémentaires sont alors nécessaires.

Deux méthodes sont à disposition pour résoudre les structures hyperstatiques, la méthode des forces et la méthode des déplacements.

Dans la méthode des forces, les inconnues sont des forces. Pour résoudre le système, des conditions supplémentaires de déformation sont exprimées. Ces conditions de déformation se nomment conditions de compatibilité cinématique.

Dans la méthode des déplacements, les inconnues sont des déplacements. Les inconnues pouvant être des rotations ou des translations. La méthode des déplacements s'applique aussi bien à des structures hyperstatiques qu'isostatiques. Des conditions supplémentaires d'équilibre sont exprimées pour résoudre le système.

Dans le chapitre suivant nous allons voir le principe de la méthode des forces pour la résolution des structures hyperstatiques.

Chapitre 2

La méthode des forces

2.1 Introduction

Dans la méthode de résolution des systèmes hyperstatiques appelée méthode des forces, les inconnues sont des forces. Le terme forces doit être compris dans son sens général, ces inconnues pouvant être des efforts internes, des réactions d'appui, des moments de flexion.

Pour résoudre le système, des conditions supplémentaires de déformation sont exprimées. Ces conditions de déformation se nomment conditions de compatibilité cinématique.

Dans la procédure de résolution, un système structural, dérivé de la structure à analyser, occupe un rôle important. C'est le système fondamental qui est défini comme étant le système dans lequel les inconnues sont nulles (appelé aussi système de base).

Le système fondamental est issu du système initial par des coupures effectuées afin de supprimer les liaisons surabondantes. Il est nécessairement isostatique et dépend des inconnues choisies pour la résolution.

Les conditions de compatibilité s'expriment mathématiquement par un système linéaire d'équations dont la résolution fournit les valeurs des inconnues.

Les équations qui expriment les conditions de compatibilité cinématique sont composées de coefficients δ_{ij} et δ_{i0} . Le coefficient δ_{ij} représente, dans le système fondamental, le déplacement associé à l'inconnue X_i dû à l'action unique et unitaire de l'inconnue X_j . Les coefficients δ_{ij} forment la matrice de flexibilité du système.

Cependant les coefficients δ_{i0} sont, par définition, liés au cas de charge considéré et doivent donc évidemment être modifiés pour un autre cas de charge.

Les diagrammes des efforts intérieurs s'obtiennent par superposition. On peut également les obtenir en déterminant préalablement les réactions d'appuis correspondantes.

2.2 Principe de la Méthode des Forces (MF).

L'idée de la MF est de supprimer les liaisons surabondantes, par des coupures ou en supprimant des appuis, pour définir un système isostatique de base. Les liaisons supprimées sont remplacées par les efforts correspondants qui sont inconnus. Ce sont donc les **Inconnues Hyperstatiques (IH)**.

Chaque **IH**, ainsi que le chargement extérieur, déforment le système de base, particulièrement au droit des liaisons supprimées. Les calculs de ces déformations sont longs mais relativement aisés vu l'isostatisme du système de base.

En utilisant le principe de superposition (PS), on pose ensuite des équations en fonction des **IH**, de façon à retrouver la cinématique (les liaisons) de la structure initiale. La solution du système d'équations obtenu donne alors les **IH**.

2.3 Décomposition du problème

Soit une structure hyperstatique d'ordre N ($\mathbf{IH} = N$), sollicitée par un chargement extérieur. Par application du principe de superposition (PS), le système hyperstatique est décomposé en :

- Un système fondamental isostatique (noté Sys_0) à partir du système initial, en enlevant toutes les liaisons surabondantes (hyperstatiques) et en conservant le chargement extérieur.
- N Systèmes (notés Sys_i i variant de 1 à N) correspondant aux inconnues hyperstatiques.

On peut alors écrire

$$Sys_{Hyper} = Sys_0 + \sum_i^n Sys_i \quad (2-1)$$

Ou bien

$$Sys_{Hyper} = Sys_0 + \sum_i^n \overline{Sys}_i \cdot X_i \quad (2-2)$$

Où le système \overline{Sys}_i est le système identique à Sys_i mais avec une force (ou un moment) unitaire obtenus à partir du système isostatique chargé uniquement par les inconnues hyperstatiques.

Pour toute variable ∇ ,

∇_0 Est la valeur de cette variable pour le système Sys_0

$\overline{\nabla}_i$ Est sa valeur pour le système \overline{Sys}_i

$$\nabla = \nabla_0 + \sum_i^n \overline{\nabla}_i \cdot X_i \quad (2-3)$$

∇ Représente un effet, peut être un déplacement, une déformation, une réaction, un effort interne.

X_i Représente l'inconnue hyperstatique i

2.4 Résolution des systèmes associés

Pour la détermination des inconnues hyperstatiques, il faut résoudre le système isostatique associé où le chargement extérieur est conservé, ainsi que les systèmes associés à chaque inconnue hyperstatique.

Il faudra notamment, tracer les diagrammes des projections locales du torseur des efforts intérieurs à prendre en compte dans l'énergie.

Si par exemple la flexion est dominante donc on ne trace que le diagramme du moment fléchissant pour chaque système.

Si les liaisons sont rigides, alors les déplacements associés à chaque projection des actions hyperstatiques sont nuls.

Dans le cas où l'action est un moment, la rotation correspondante est nulle.

Dans le cas où l'action est une force, la translation correspondante est nulle.

$$\frac{\partial W_e}{\partial X_k} = 0 \quad (2-4)$$

Suivant les hypothèses faites et la dimension de l'espace considéré, l'énergie est la somme de m termes provenant des types de sollicitations j affectés des caractéristiques de raideur λ_j correspondantes.

$$W_e = \int \sum_{j=1}^m \frac{\nabla_j^2}{2\lambda_j} ds \quad (2-5)$$

Avec

$$\nabla_j = \nabla_{j0} + \sum_{i=1}^n X_i \overline{\nabla_{ji}} \quad (2-6)$$

Par exemple dans le cas d'un système plan soumis à des sollicitations axiales et flexionnelles l'énergie est donnée par :

$$W_e = \int \frac{M_{fz}^2}{2EI_z} ds + \int k \frac{T_y^2}{2GA} ds + \int \frac{N^2}{2EA} ds \quad (2-7)$$

Ou alors dans le cas d'un système considéré en 3D et soumis à toutes les sollicitations sans aucune hypothèse, l'énergie est donnée par :

$$W_e = \int \frac{N^2}{2EA} ds + \int k \frac{T_y^2}{2GA} ds + \int \frac{M_z^2}{2EI_z} ds + \int k \frac{T_z^2}{2GA} ds + \int \frac{M_{zy}^2}{2EI_y} ds + \int \frac{M_t^2}{2EI_t} ds \quad (2-8)$$

Et la dérivée de l'énergie s'exprime par :

$$\frac{\partial W_e}{\partial X_k} = \int \sum_{j=1}^m \frac{\partial V_j^2}{2\lambda_j \partial X_k} ds = \int \sum_{j=1}^m \frac{V_j \partial V_j}{\lambda_j \partial X_k} ds \quad (2-9)$$

Avec

$$\frac{\partial V_j}{\partial X_k} = \overline{V_{kj}} \quad (2-10)$$

$$\frac{\partial W_e}{\partial X_k} = \int \sum_{j=1}^m \frac{\Delta V_{j0} + \sum_{i=1}^n X_i \overline{V_{ji}}}{\lambda_j} \overline{V_{kj}} ds = 0 \quad (2-11)$$

$$X_i = \int \sum_{j=1}^m \frac{\overline{\Delta_{ji}}}{\lambda_j} \overline{\Delta_{kj}} ds = - \int \sum_{j=1}^m \frac{\Delta_{j0}}{\lambda_j} \overline{\Delta_{kj}} ds \quad (2-12)$$

On pose alors

$$\delta_{ki} = \int \sum_{j=1}^m \frac{\overline{V_{ij} V_{jk}}}{\lambda_j} ds \quad (2-13)$$

Et

$$\Delta_{k0} = \int \sum_{j=1}^m \frac{\Delta V_{0j}}{\lambda_j} \overline{V_{jk}} ds \quad (2-14)$$

Où δ_{ki} est le déplacement en k dû à une force unitaire en i lorsque toutes les autres forces sont nulles. Il est appelé coefficient de flexibilité.

Et Δ_{k0} est le déplacement en k du aux charges extérieures. C'est une translation si X_k est une force, et est une rotation si X_k est un moment.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \delta_{ki} X_i &= -\Delta_{k0} \\ \sum_{i=1}^n \delta_{ki} X_i + \Delta_{k0} &= 0 \end{aligned} \quad (2-15)$$

L'équation (2-15) est l'équation de compatibilité des déplacements. La résolution de ce système d'équations donnera alors les inconnues hyperstatiques.

Les diagrammes des efforts intérieurs s'obtiennent par superposition des diagrammes, du système isostatique associé et des systèmes associés à chaque inconnue hyperstatique.

On peut également les obtenir en déterminant préalablement les réactions d'appuis correspondantes.

2.5 Application de la MF aux poutres continues.

2.5.1 Modélisation

Une poutre est continue si elle repose sur plus de deux appuis. Les appuis intermédiaires sont modélisés par des appuis simples. Pour assurer la stabilité géométrique de la poutre continue il faut qu'un appui de rive soit un appui double ou un encastrement.

Le nombre d'inconnues hyperstatiques dans le cas des poutres continues est égal aux nombres d'appuis intermédiaires (Figure 2-1).

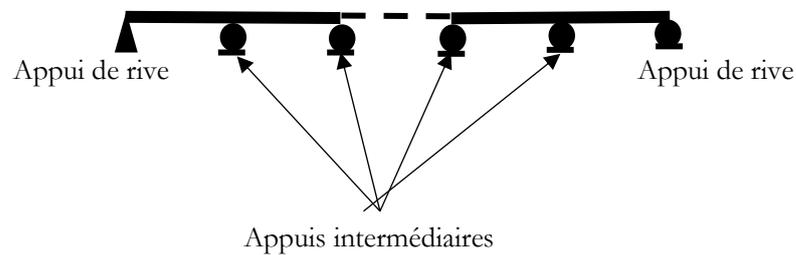


Figure 2-1. Modélisation d'une poutre continue.

La Figure 2-2 montre la légende utilisée pour définir une poutre continue.

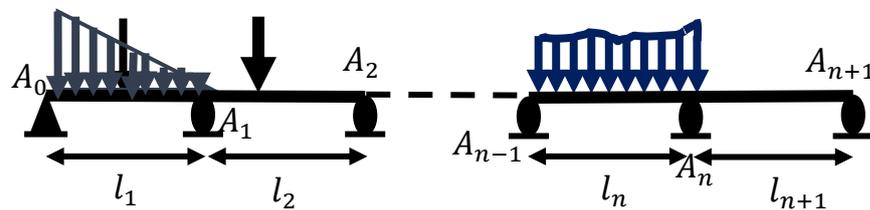


Figure 2-2. Légende utilisée pour définir une poutre continue.

Le problème est hyperstatique d'ordre N . Les inconnues hyperstatiques sont les réactions d'appuis intermédiaires.

Soit la poutre continue à trois travées de la Figure 2-3 pour laquelle le nombre d'inconnues hyperstatique est égal au nombre d'appuis intermédiaires.

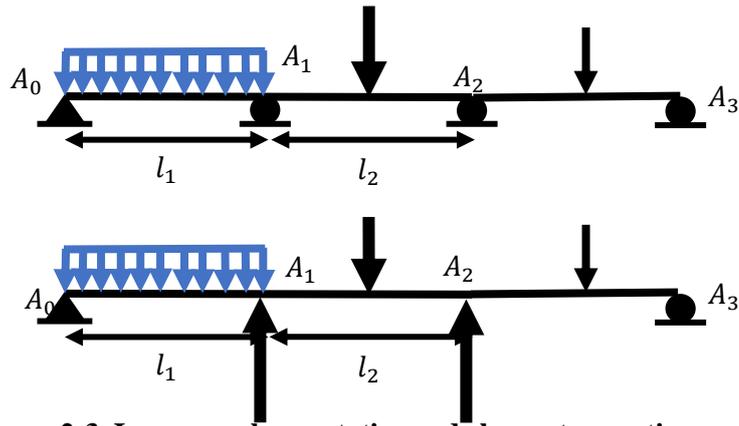


Figure 2-3. Inconnues hyperstatiques de la poutre continues

On peut supprimer les appuis et les remplacer par leurs effets tel que le montre la Figure 2-3 mais ce choix n'est pas intéressant car il implique des calculs fastidieux étant donné les moments non nuls le long de la poutre (Figure 2-4 et Figure 2-5).

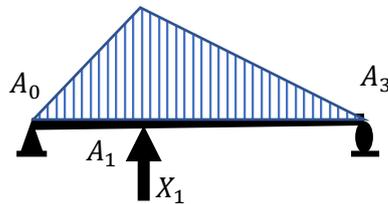


Figure 2-4. Diagramme du moment fléchissant de l'inconnue hyperstatique X_1

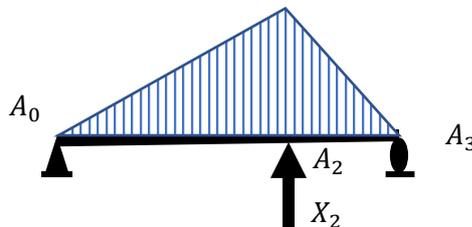


Figure 2-5. Diagramme du moment fléchissant de l'inconnue hyperstatique X_2

En effet, les moments provoqués par les inconnues hyperstatiques X_1 montré par la Figure 2-4 et X_2 montré par la Figure 2-5 sont généralement différents de zéro sur toute la longueur de la poutre. Les coefficients de flexibilité sont donc tous non nuls.

Au lieu de considérer le problème isostatique associé une poutre sur 2 appuis, et donc avoir N réactions d'appuis comme inconnues hyperstatiques, on introduit des rotules (des coupures) au droit des appuis intermédiaires (Figure 2-6).

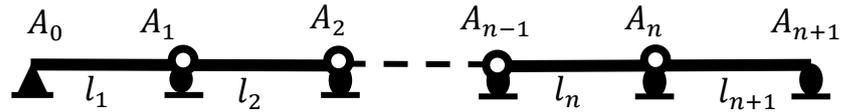


Figure 2-6. Introduction des rotules aux droits des appuis.

Le problème isostatique associé est donc $(N + 1)$ poutres sur 2 appuis correspondant à chaque travée tel que montré par la Figure 2-7.

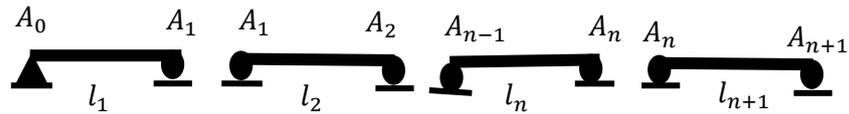


Figure 2-7. Système isostatique associé.

La travée $(i + 1)$ exerce un moment M_i sur la travée i . Le moment exercé par la travée i sur la travée $(i + 1)$ est alors $-M_i$.

Les inconnues hyperstatiques sont donc les moments exercés par les travées l'une sur l'autre. Ils sont représentés sur la Figure 2-8.

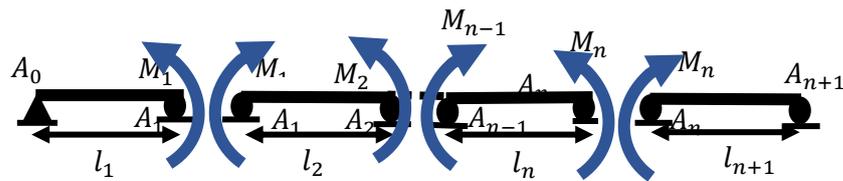


Figure 2-8. Systèmes isostatiques équivalents au système hyperstatique

Les moments M_i sont les moments fléchissant du problème hyperstatique au droits des appuis.

Les inconnues hyperstatiques M_i sont calculées de façon à **assurer la continuité** de la rotation au niveau de la section.

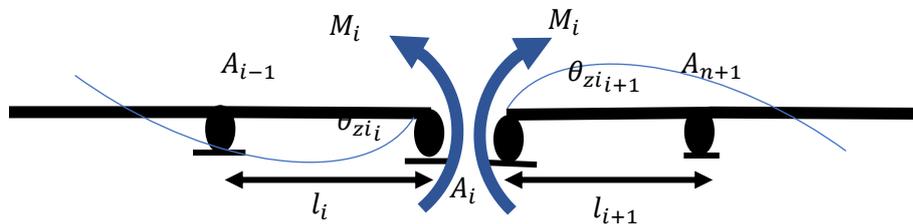


Figure 2-9. Continuité de la rotation de l'appui i

La Figure 2-9 montre la continuité de la rotation de la section au droit de l'appui. La rotation de section θ_{zi_i} au droit de l'appui A_i pour la travée l_i est égale à la rotation de section $\theta_{zi_{i+1}}$ au droit de l'appui A_i pour la travée l_{i+1} .

Après application du théorème de CASTIGLIANO et du principe de superposition tel qu'expliqué précédemment, on peut écrire les équations de compatibilité donnée par l'équation (2-15) sous la forme donnée par l'équation.

$$\begin{cases} \theta_{11}M_1 + \theta_{12}M_2 + \dots + \theta_{1i}M_i + \theta_{1(i+1)}M_{(i+1)} + \dots + \theta_{1n}M_n = -\theta_{10} \\ \theta_{21}M_1 + \theta_{22}M_2 + \dots + \theta_{2i}M_i + \theta_{2(i+1)}M_{(i+1)} + \dots + \theta_{2n}M_n = -\theta_{20} \\ \theta_{31}M_1 + \theta_{32}M_2 + \dots + \theta_{3i}M_i + \theta_{3(i+1)}M_{(i+1)} + \dots + \theta_{3n}M_n = -\theta_{30} \\ \theta_{(i-1)1}M_1 + \theta_{(i-1)2}M_2 + \dots + \theta_{(i-1)i}M_i + \dots + \theta_{(i-1)n}M_n = -\theta_{(i-1)0} \\ \theta_{i1}M_1 + \theta_{i2}M_2 + \dots + \theta_{ii}M_i + \theta_{i(i+1)}M_{(i+1)} + \dots + \theta_{in}M_n = -\theta_{i0} \\ \theta_{n1}M_1 + \theta_{n2}M_2 + \dots + \theta_{ni}M_i + \theta_{n(i+1)}M_{(i+1)} + \dots + \theta_{nn}M_n = -\theta_{n0} \end{cases} \quad (2-16)$$

Ou sous forme matricielle

$$[f] \times \{F\} = -\{\Delta\} \quad (2-17)$$

$[f]$ est appelée matrice de **flexibilité**

θ_{11} est la rotation au droit de l'appui 1 due à un moment unitaire appliqué dans la direction de l'inconnue hyperstatique 1 (M_1)

θ_{32} est la rotation au droit de l'appui 3 due à un moment unitaire appliqué dans la direction de l'inconnue hyperstatique 2 (M_2)

θ_{20} est la rotation au droit de l'appui 2 due aux charges extérieures.

Etant donné la présence de rotules, le moment M_i n'a d'effet que sur les travées l_i et l_{i+1}

L'équation de compatibilité de l'appui i s'écrit alors

$$\theta_{i(i-1)}M_{(i-1)} + \theta_{ii}M_i + \theta_{i(i+1)}M_{(i+1)} = -\theta_{i0} \quad (2-18)$$

Les rotations $\theta_{i(i-1)}$, θ_{ii} , et $\theta_{i(i+1)}$ peuvent aisément être calculées en utilisant les méthodes énergétiques pour calculer les déplacements.

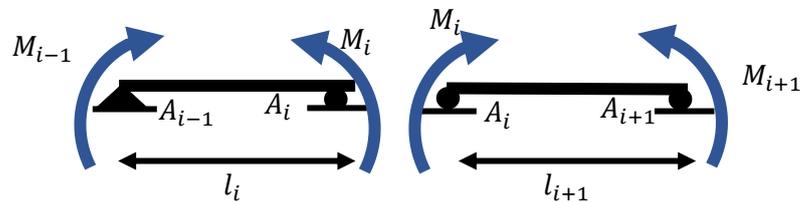


Figure 2-10. Les travées adjacentes à l'appui i

On applique un moment unitaire dans la direction des inconnues hyperstatiques et on trace les diagrammes du moment fléchissant pour chacune d'elles.

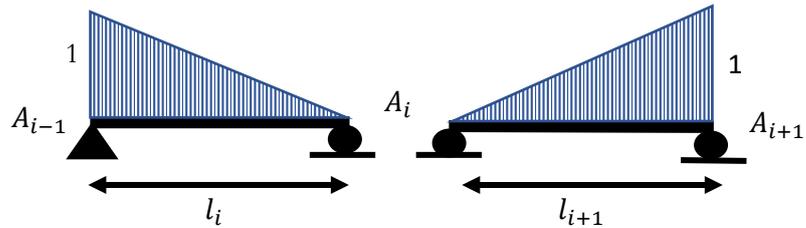


Figure 2-11. diagrammes du moment fléchissant provoqué par un moment unitaire dans la direction des inconnues hyperstatiques M_{i-1} et M_{i+1} .

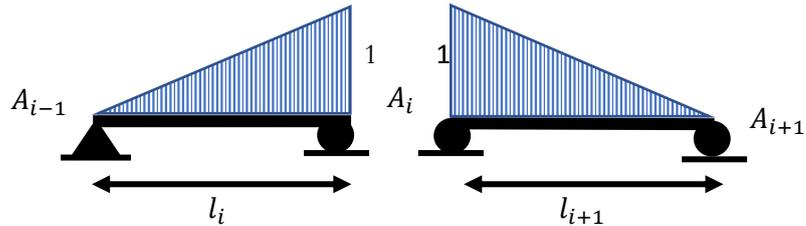


Figure 2-12. diagramme du moment fléchissant provoqué par un moment unitaire dans la direction de l'inconnue hyperstatique M_i

Les Figure 2-11 et Figure 2-12 montrent les diagrammes obtenus. Les différentes rotations sont alors obtenues par la multiplication des diagrammes et elles valent :

$$\theta_{(i-1)i} = \frac{1}{(EI)_i} \int M_{i-1} M_i = \frac{l_i}{6(EI)_i}$$

$$\theta_{(i+1)i} = \frac{1}{(EI)_{i+1}} \int M_{i+1} M_i \frac{l_{i+1}}{6(EI)_{i+1}}$$

$$\theta_{ii} = \frac{1}{(EI)_i} \int M_i M_i + \frac{1}{(EI)_{i+1}} \int M_i M_i = \frac{l_i}{3(EI)_i} + \frac{l_{i+1}}{3(EI)_{i+1}}$$

En substituant les expressions des différentes rotations dans l'équation (2-18) on obtient l'expression finale de l'équation de compatibilité de l'appui i .

$$\frac{l_i}{6(EI)_i} M_{(i-1)} + \frac{l_i}{3(EI)_i} + \frac{l_{i+1}}{3(EI)_{i+1}} M_i + \frac{l_{i+1}}{6(EI)_{i+1}} M_{(i+1)} = -\theta_{i0} \quad (2-19)$$

En écrivant l'équation (2-19) pour chaque appui intermédiaire, on obtient un système d'équations dont la résolution donne les valeurs des moments aux droits des appuis.

Pour calculer les réactions aux appuis, ainsi que les efforts internes, il suffit de considérer chaque poutre isostatique isolément et lui appliquer le principe fondamental de la statique.

2.5.2 Application de l'équation des 3 moments (Formule de Clapeyron).

Lorsque la raideur (EI) est constante (la même pour toutes les barres), l'équation devient alors

$$\frac{l_i}{6EI} M_{(i-1)} + \frac{l_i+l_{i+1}}{3EI} M_i + \frac{l_{i+1}}{6EI} M_{(i+1)} = -\theta_{i0}$$

$$l_i M_{(i-1)} + 2(l_i + l_{i+1}) M_i + l_{i+1} M_{(i+1)} = -6EI\theta_{i0} \quad (2-20)$$

C'est l'équation qui donne la formule des trois moments appelée également la formule de Clapeyron, applicable sur chaque appui pour lequel on a introduit une rotule. On obtient alors un système d'équations, de dimension égale au nombre d'inconnues, facile à résoudre.

θ_{i0} est la rotation en i provoquée par les charges extérieures et est donné par $\frac{1}{EI} \int M_i M_o$. En traçant les diagrammes du moment fléchissant des charges extérieures (dans le cas de la flexion dominante), on peut facilement déterminer la rotation θ_{i0} .

Le système d'équations obtenu peut maintenant être résolu et les inconnues hyperstatiques, qui sont les moments aux droites des appuis intermédiaires, déterminées.

De même pour calculer les réactions aux appuis, ainsi que les efforts internes, il suffit de considérer chaque poutre isostatique isolément et lui appliquer le principe fondamental de la statique. L'équilibre global permet de calculer les réactions et l'équilibre local donne les efforts internes.

2.5.3 La méthode de la poutre fictive

Une poutre droite d'axe longitudinal x qui fléchit dans le plan xy (défini par un repère orthonormé direct) est régie par l'équation différentielle d'ordre 4 ci-dessous, dite équation de la ligne élastique.

$$\frac{d^4 v(x)}{dx^4} = \frac{q(x)}{EI_z} \quad (2-21)$$

Les équations qui régissent le comportement des poutres s'expriment comme suit :

$\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} = \frac{M(x)}{EI}$ et les conditions aux limites sont exprimées sur la flèche v et la rotation θ , et $\frac{\partial^2 M_f(x)}{\partial x^2} = q$ et les conditions aux limites sont exprimées sur le moment fléchissant M et l'effort tranchant T .

Ces 2 équations sont de la même forme $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = g(x)$ où $0 < x < l$ avec des conditions en $x = 0$ et $x = l$ qui concernent la fonction f et sa dérivé f' . On doit connaître $f(0)$ et/ou $f'(0)$ / $f(l)$ et/ou $f'(l)$. Cette équation différentielle peut être résolue de différentes manières.

Dans le cas de l'équation différentielle $\frac{\partial^2 M_f(x)}{\partial x^2} = q$ on a appris à la résoudre au sens de la mécanique, soit la procédure de calcul du moment fléchissant (calcul des réactions par l'équilibre global et des sollicitations par l'équilibre local). Les réactions sont les valeurs de l'effort tranchant pour $x = 0$ ou $x = L$ c'est-à-dire aux limites.

On peut par analogie résoudre l'équation $\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} = \frac{M(x)}{EI}$ par la méthode de calcul de la mécanique c'est-à-dire considérer une poutre chargée par $M(x)$ et le calcul des réactions par l'équilibre global nous permet de trouver les rotations aux limites.

2.5.4 Exemple d'application

L'exemple que nous allons traiter est celui d'une poutre continue présentant un encastrement tel que le montre la Figure 2-13, pour laquelle il faudra calculer les moments aux appuis. C'est une poutre qui compte une première travée encastree-appuyées avec une force ponctuelle à mi travée, une deuxième appuyée-appuyée uniformément chargée. Toute les forces agissent dans le plan (xy) . La raideur est la même pour toutes les poutres et est égale à une constante.

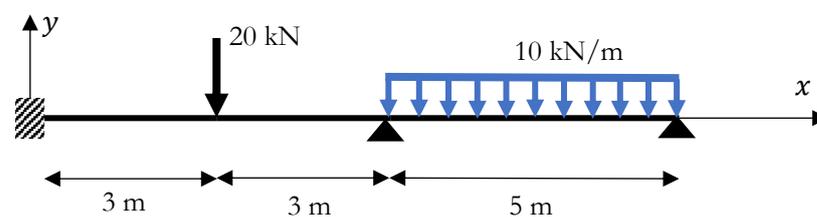


Figure 2-13. Poutre hyperstatique

C'est une poutre hyperstatique soumise à la flexion simple, le chargement appliqué est dans le plan (xy) et perpendiculaire à la fibre moyenne par laquelle passe l'axe x , la flexion se fait donc autour de l'axe z . Le choix des axes est représenté sur la Figure 2-13

Dans le cas des poutres continues l'encastrement peut être remplacé par une poutre fictive sur deux appuis tel que le montre la Figure 2-14.

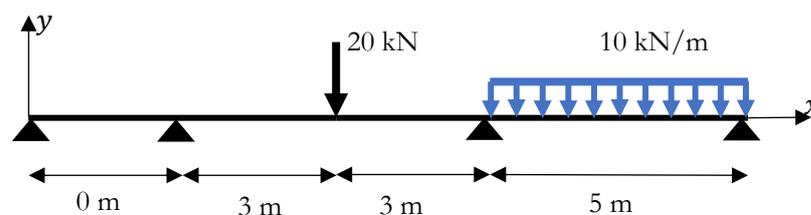


Figure 2-14. Cas particulier de l'encastrement

La poutre continue va maintenant être séparée en travées indépendantes auxquelles on introduit des moments sur appuis comme inconnues hyperstatiques tel que le montre la Figure 2-15.

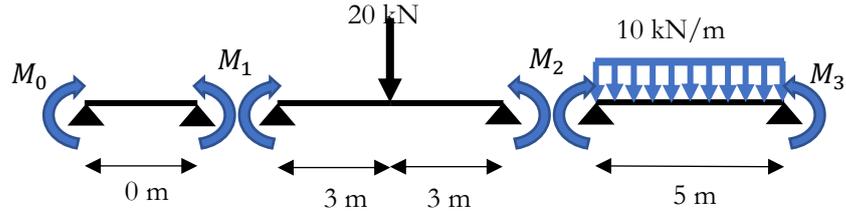


Figure 2-15. Système isostatique équivalent

La raideur étant la même pour toutes les poutres, la formule des trois moments, donnée par l'équation (2-20) peut être appliquée directement pour chaque appui intermédiaire.

Appuis 1

$$M_0 l_0 + 2M_1(l_0 + l_1) + M_2 l_1 = -6EI\theta_{10}$$

Appuis 2

$$M_1 l_1 + 2M_2(l_1 + l_2) + M_3 l_2 = -6EI\theta_{20}$$

Or $M_0 = 0$ (poutre fictive) et $M_3 = 0$ (appui de rive).

Le système d'équation s'écrit alors :

$$\begin{cases} 2M_1(l_0 + l_1) + M_2 l_1 = -6EI\theta_{10} \\ M_1 l_1 + 2M_2(l_1 + l_2) = -6EI\theta_{20} \end{cases}$$

En remplaçant par les valeurs numériques le système d'équations devient alors :

$$\begin{cases} 12M_1 + 6M_2 = -6EI\theta_{10} \\ 6M_1 + 2M_2(6 + 5) = -6EI\theta_{20} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12M_1 + 6M_2 = -6EI\theta_{10} \\ 6M_1 + 22M_2 = -6EI\theta_{20} \end{cases}$$

Déterminons à présent les rotations provoquées par les chargements extérieurs θ_{10} (rotation au niveau de l'appui 1 ou encore dans la direction de l'inconnue hyperstatique M_1 provoquée par le chargement extérieur) et θ_{20} (rotation au niveau de l'appui 2 ou encore dans la direction de l'inconnue hyperstatique M_2 provoquée par le chargement extérieur).

$$\theta_{10} = \theta_{10g} + \theta_{10d} = \theta_{10d} \text{ car la poutre (01) est fictive (n'existe pas)}$$

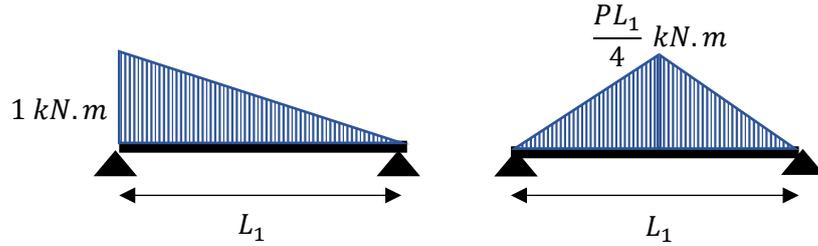


Figure 2-16. Diagrammes des moments fléchissant m_1 et M_0

$$\theta_{10d} = \frac{1}{EI} \int m_1 M_0 dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{PL_1}{4} \frac{L_1}{6} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \right] = \frac{3PL_1^2}{48EI}$$

$$\theta_{10} = \theta_{10d} = \frac{3PL_1^2}{48EI} = \frac{PL_1^2}{16EI}$$

$$\theta_{20} = \theta_{20g} + \theta_{20d}$$

Or $\theta_{20g} = \theta_{10d}$ la poutre est chargée symétriquement donc les rotations aux appuis sont égales.

Calculons alors la rotation θ_{20d} . Elle est donnée par la poutre à droite de l'appui 2.

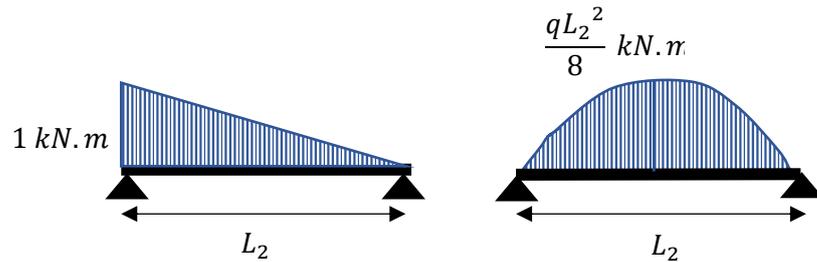


Figure 2-17. Diagramme du moment fléchissant m_2 et M_0 pour la travée de longueur L_2

$$\theta_{20d} = \frac{1}{EI} \int m_2 M_0 dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{qL_2^2}{8} \frac{L_2}{3} \cdot 1 \right] = \frac{qL_2^3}{24EI}$$

$$\theta_{20d} = \frac{qL_2^3}{24EI}$$

Les rotations provoquées par les charges extérieures valent alors

$$\theta_{10} = \theta_{10g} + \theta_{10d} = 0 + \frac{PL_1^2}{16EI} = \frac{PL_1^2}{16EI}$$

$$\theta_{10} = \frac{45}{EI}$$

$$\theta_{20} = \theta_{20g} + \theta_{20d} = \frac{PL_1^2}{16EI} + \frac{qL_2^3}{24EI}$$

$$\theta_{20} = \frac{45}{EI} + \frac{52,0833}{EI} = \frac{97,0833}{EI}$$

$$\begin{cases} 12M_1 + 6M_2 = -6EI \frac{45}{EI} \\ 6M_1 + 22M_2 = -6EI \frac{97,0833}{EI} \end{cases}$$

Après résolution du système d'équations on obtient les valeurs des moments aux appuis. $M_1 = -10,7 \text{ kN.m}$, $M_2 = -23,6 \text{ kN.m}$ et $M_3 = 0$

2.6 Application de la MF aux structures planes.

On rappelle que le principe de la méthode des forces consiste à transformer la structure hyperstatique en un système isostatique en supprimant les liaisons surabondantes. Pour que le système isostatique soit équivalent au système hyperstatique initial, il faut remplacer chaque liaison supprimée par la force qui lui correspond et qu'il faut calculer.

2.6.1 Structures planes en treillis

Un treillis ou systèmes triangulés est un assemblage d'éléments en forme de barres verticales, horizontales ou inclinés formant des triangles. Lorsqu'un treillis est soumis à des efforts, certaines parties de l'assemblage travaillent en compression et d'autres en traction.

Pour le système en treillis de la Figure 2-18 on cherche à calculer les efforts dans les barres.

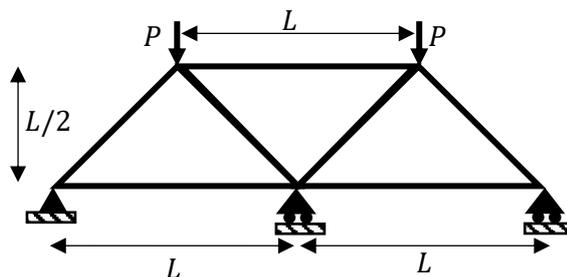


Figure 2-18. Structure en treillis de l'exemple d'application.

Le degré d'hyperstaticité est donné par l'équation (1-6). Le nombre de barres $b = 7$, le nombre de réactions $r = 4$ et le nombre de nœuds $n = 5$.

$DH = 7 + 4 - 2 \times 5 = 1$ donc notre système est 1 fois hyperstatique.

L'inconnue hyperstatique de notre système en treillis provient des appuis simples surabondants. Dans la méthode des forces il faut commencer par choisir un système fondamental en supprimant la liaison surabondante.

Un système fondamental est obtenu par suppression de l'appui intermédiaire ; on obtient ainsi un système isostatique et la réaction supprimée, qui constitue l'inconnue hyperstatique, est déterminée par application de la méthode des forces.

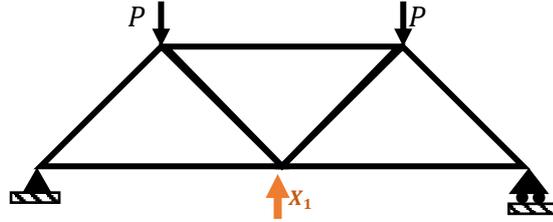


Figure 2-19. Système fondamental équivalent

L'équation (2-15), qui est l'équation de compatibilité des déplacements, s'écrit dans ce cas comme suit :

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{10} = 0$$

Les équations (2-13) et (2-14) donnent les déplacements δ_{11} et Δ_{10} respectivement

$$\delta_{11} = \frac{1}{EA} \int N_{i1} \times N_{i1} dx = \frac{1}{EA} \int_0^{L_1} N_{11}^2 dx + \frac{1}{EA} \int_0^{L_2} N_{21}^2 dx + \frac{1}{EA} \int_0^{L_3} N_{31}^2 dx + \frac{1}{EA} \int_0^{L_4} N_{41}^2 dx + \frac{1}{EA} \int_0^{L_5} N_{51}^2 dx + \frac{1}{EA} \int_0^{L_6} N_{61}^2 dx + \frac{1}{EA} \int_0^{L_7} N_{71}^2 dx$$

Comme l'effort normal est constant le long d'une barre l'équation ci-dessus devient alors :

$$\delta_{11} = \frac{1}{EA} dx = \frac{1}{EA} [N_{11}^2 \times L_1 + N_{21}^2 \times L_2 + N_{31}^2 \times L_3 + N_{41}^2 \times L_4 + N_{51}^2 \times L_5 + N_{61}^2 \times L_6 + N_{71}^2 \times L_7] = \sum_{i=1}^7 \frac{N_{i1}^2 \times L_i}{EA_i}$$

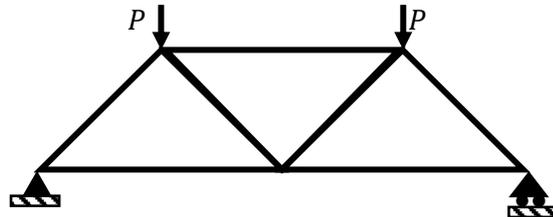
Et de même pour

$$\Delta_{10} = \frac{1}{EA} \int N_{i1} \times N_{i0} dx = \frac{1}{EA} \int_0^{L_1} N_{11} \times N_{10} dx + \frac{1}{EA} \int_0^{L_2} N_{21} \times N_{20} dx + \frac{1}{EA} \int_0^{L_3} N_{31} \times N_{30} dx + \frac{1}{EA} \int_0^{L_4} N_{41} \times N_{40} dx + \frac{1}{EA} \int_0^{L_5} N_{51} \times N_{50} dx + \frac{1}{EA} \int_0^{L_6} N_{61} \times N_{60} dx + \frac{1}{EA} \int_0^{L_7} N_{71} \times N_{70} dx = \sum_{i=1}^7 \frac{N_{i1}N_{i0} \times L_i}{EA_i}$$

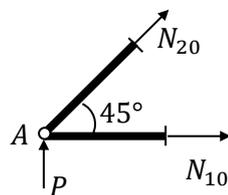
Il faut trouver alors les efforts dans les barres lorsque le système fondamental est soumis, à l'action d'une force unitaire dans la direction de l'inconnue hyperstatique d'une part, et à l'action des charges extérieures d'une autre part.

En utilisant la méthode des nœuds nous allons calculer ces efforts pour chacun des deux systèmes.

1. Système isostatique fondamental soumis aux charges extérieures.



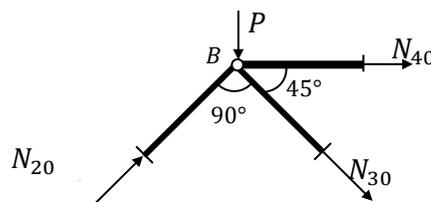
Nœud A



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_{10} + N_{20}/\sqrt{2} = 0 \Rightarrow N_{10} = P$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_{20}/\sqrt{2} + P = 0 \Rightarrow N_{20} = -\sqrt{2}P$$

Nœud B

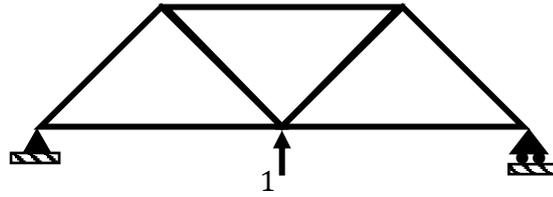


$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -(P\sqrt{2})/\sqrt{2} + N_{40} = 0 \Rightarrow N_{40} = -P$$

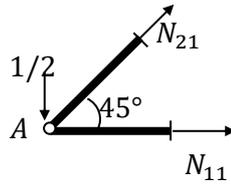
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -P + (P\sqrt{2})/\sqrt{2} - N_{30}/\sqrt{2} = 0 \Rightarrow N_{30} = 0$$

La structure est symétrique donc les efforts dans les autres barres sont déduits de ceux calculés.

2. Système isostatique fondamental soumis à la force unitaire dans la direction de l'inconnue hyperstatique X



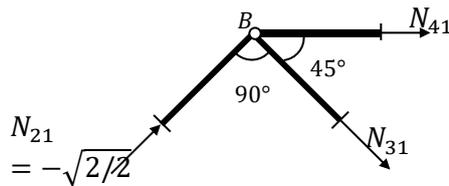
➤ Nœud A



$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow N_{21} = \sqrt{2}/2$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow N_{11} = -1/2$$

➤ Nœud B



$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow N_{31} = -\sqrt{2}/2$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow (\sqrt{2} \times \sqrt{2}/2 + N_{31}/\sqrt{2} + N_{41} = 0 \Rightarrow N_{41} = 1$$

Les résultats obtenus sont dressés dans le tableau suivant.

Barres i	L_i	N_{i1}	N_{i0}	$L_i N_{i0} N_{i1}$	$L_i N_{i1} N_{i1}$
1	L	$-1/2$	P	$-LP/2$	$L/4$
2	$L/\sqrt{2}$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}P$	$-LP/\sqrt{2}$	$L/2\sqrt{2}$
3	$L/\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}/2$	0	0	$L/2\sqrt{2}$
4	a	1	$-P$	$-LP$	L
5	$L/\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}/2$	0	0	$L/2\sqrt{2}$
6	L	$-1/2$	P	$-LP/2$	$L/4$
7	$L/\sqrt{2}$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}P$	$-LP/\sqrt{2}$	$L/2\sqrt{2}$
\sum				$-LP(\sqrt{2} + 2)$	$\frac{L}{2}(2\sqrt{2} + 3)$

Donc la solution de l'équation (2-15) est

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{10} = 0 \Rightarrow X_1 = \frac{-\Delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{LP(\sqrt{2}+2)}{\frac{L}{2}(2\sqrt{2}+3)} \Rightarrow X_1 = \frac{2P(\sqrt{2}+2)}{2\sqrt{2}+3}$$

$$X_1 = 1,1716P$$

L'effort normal N_i dans la barre i du système hyperstatique est obtenu en procédant à la superposition des efforts normaux dus au chargement extérieur et à l'action de l'inconnue X_1 .

Barres i	N_{i1}	N_{i0}	X_1N_{i1}	$N_i = N_{i0} + X_1N_{i1}$
1	$-1/2$	P	$-0,5858P$	$0.4142P$
2	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}P$	$0.8284P$	$-0.586P$
3	$-\sqrt{2}/2$	0	$-0.8284P$	$-0.8284P$
4	1	$-P$	$1.1716P$	$0.1716P$
5	$-\sqrt{2}/2$	0	$-0.8284P$	$-0.8284P$
6	$-1/2$	P	$-0,5858P$	$0.4142P$
7	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}P$	$0.8284P$	$-0.586P$

Tableau 2-1. Les efforts de l'exemple d'application

La dernière colonne du Tableau 2-1 donnent les efforts normaux dans toutes les barres du système hyperstatique en treillis.

2.6.2 Structures planes en portiques

On rappelle que pour calculer un système hyperstatique de degré DH , il faut effectuer DH coupures judicieusement choisies, soit en supprimant certains appuis, soit en sectionnant des barres sans les supprimer, soit en combinant les deux, de façon à obtenir un système isostatique fondamental géométriquement stable.

Pour le système en portique de la Figure 2-20 on cherche à tracer les efforts internes.

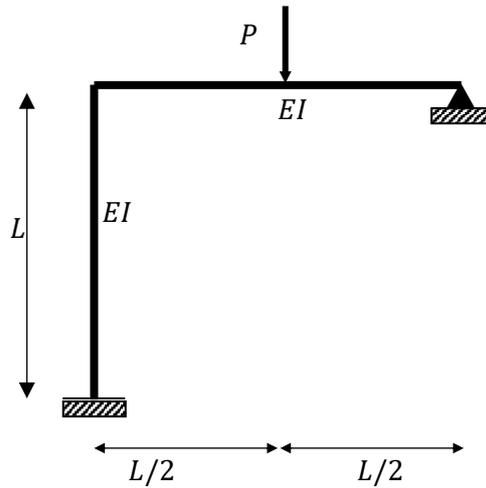


Figure 2-20. Système en portique de l'exemple d'application

Le système est hyperstatique et son degré d'hyperstaticité est égal à 2. Le système fondamental est celui de la

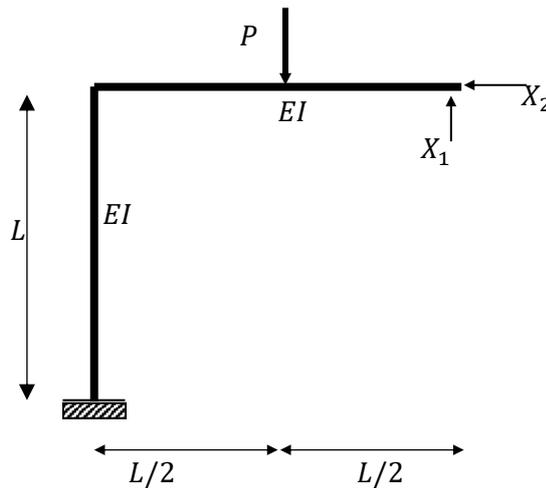


Figure 2-21. Système de base (fondamental)

Les équations de compatibilité s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 &= -\Delta_{10} \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 &= -\Delta_{20} \end{aligned}$$

Le système fondamental sous l'action d'une sollicitation unitaire $X_1 = 1$ seule permet de calculer les coefficients de flexibilité δ_{11} et δ_{12} , et sous l'action d'une sollicitation $X_2 = 1$ donne les coefficients δ_{21} et δ_{22} .

Alors que les déplacements Δ_{10} et Δ_{20} , ils se calculent sous l'effet de la force P extérieure appliquée au système isostatique de base. Les diagrammes du moment fléchissant, car on suppose que la flexion est dominante, permettent de

calculer ces coefficients et déplacements. Ils sont illustrés par la Figure 2-22 et la Figure 2-22. Diagrammes des moments fléchissant M_2 , et M_1

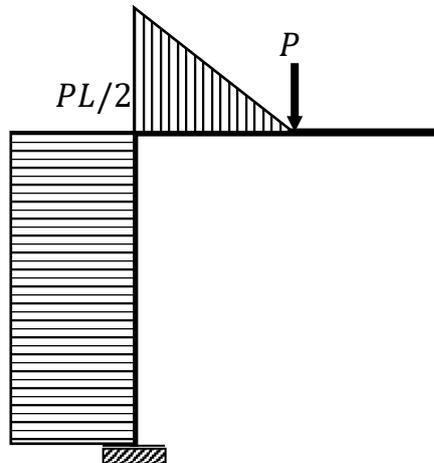


Figure 2-23 Figure 2-22. Diagrammes des moments fléchissant M_2 , et M_1

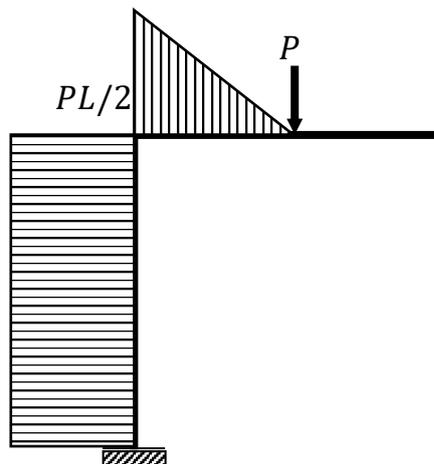


Figure 2-23. Diagramme du moment fléchissant M_0

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \int (M_1 \times M_1) dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{L^3}{3} + L^3 \right] = \frac{4L^3}{3EI}$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{EI} \int (M_1 \times M_2) dx = \frac{1}{EI} \left[0 + \frac{L^3}{2} \right] = \frac{L^3}{2EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \int (M_2 \times M_2) dx = \frac{1}{EI} \left[0 + \frac{L^3}{3} \right] = \frac{L^3}{3EI}$$

$$\Delta_{10} = \frac{1}{EI} \int (M_1 \times M_0) dx = \frac{1}{EI} \left[0 - \frac{1}{6} \frac{PL^2}{4} \left((2L + \frac{L}{2}) - \frac{PL^3}{2} \right) + \right] = \frac{-29PL^3}{48EI}$$

$$\Delta_{20} = \frac{1}{EI} \int (M_2 \times M_0) dx = \frac{1}{EI} \left[0 - \frac{1}{2} \frac{PL^2}{2} L \right] = \frac{-PL^3}{4EI}$$

La résolution du système d'équations donne les inconnues hyperstatiques X_1 et X_2 .

$$X_1 = \frac{22P}{56} \text{ et } X_2 = \frac{9P}{56}$$

Les diagrammes des efforts internes s'obtiennent alors par superposition.

$$M_f = M_0 + X_1 M_1 + X_2 M_2$$

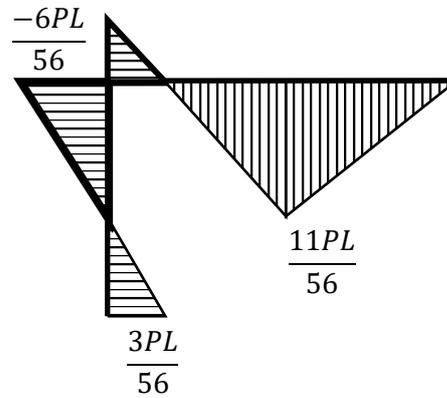


Figure 2-24. Diagramme final du moment fléchissant.

Chapitre 3

Méthode des déplacements

3.1 Introduction

Un système hyperstatique est un système où les équations d'équilibre ne suffisent pas à calculer les forces inconnues. On peut alors utiliser la méthode des forces (MF) ou la méthode des déplacements (MD).

Dans la MF, on supprime les liaisons surabondantes pour définir un système isostatique de base et des inconnues hyperstatiques. Ces inconnues sont des « forces » introduites pour remplacer les liaisons supprimées. Pour résoudre le problème et calculer ces inconnues, on pose les équations de compatibilité de façon à retrouver la cinématique du système initial.

Ainsi, dans la MF on vérifie d'abord les équations d'équilibre puis, on pose les équations de compatibilité des déplacements pour calculer les inconnues hyperstatiques. La loi de Hook permet d'assurer la relation forces – déplacements.

Dans la MD, l'ordre d'utilisation des équations d'équilibre et de compatibilité est inversé. On conserve alors toutes les liaisons du système initial, en considérant que les déplacements des nœuds sont inconnus.

D'après la mécanique des structures (MDS), chaque déplacement d'un nœud induit les efforts dans ce nœud, et dans les autres nœuds de la structure qui lui sont connectés par des poutres. La relation entre les forces induites et le déplacement imposé est établie par des coefficients de rigidité. Ces coefficients sont obtenus à partir de ceux des poutres isolées.

Les équations d'équilibre entre les efforts induits par les DDL et les charges appliquées à la structure sont ensuite posées pour calculer les déplacements inconnus des nœuds. On en déduit ensuite les forces aux nœuds puis le reste des inconnues de la mécanique des structures (MDS).

Dans la MD, les notions de déplacement/DDL et de nœud sont fondamentales. On commence donc par les définir.

3.2 Déplacements d'un point

Dans le cas général, la cinématique d'un point matériel est définie par sa translation et sa rotation qui sont représentées par leurs composantes dans un référentiel qu'on se fixe.

Ces composantes sont regroupées dans un vecteur de « déplacements généralisés », communément appelé vecteur de « déplacements » ou vecteur de « Degrés De Liberté » (DDL).

3.3 Déplacements d'un point dans un plan

Dans le cas de structures planes chargées et se déformant dans leur plan, tout point peut subir, en général, une translation (vecteur à 2 composantes) et une rotation autour de la normale au plan comme illustré dans la Figure 3-1.

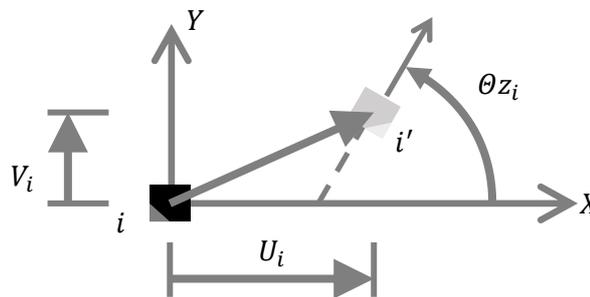


Figure 3-1. Degrés de liberté d'un point dans le plan XY

Chaque point i possède ainsi **3 DDL** qui repèrent sa nouvelle position i' par rapport à sa position initiale. Si on retient un repère XY orthonormé direct, les DDL d'un point i s'écrivent comme suit :

$$\delta_i = \begin{cases} U_i \\ V_i \\ \theta_{z_i} \end{cases} \quad (3-1)$$

3.4 Les nœuds

La méthode des déplacements consiste à déterminer les DDL de certains points particuliers de la structure, appelés nœuds.

Les nœuds se situent obligatoirement aux intersections entre poutres, aux points présentant des singularités (changement brusque de caractéristiques, discontinuités de DDL) et aux appuis.

Des nœuds supplémentaires peuvent être retenus par l'ingénieur d'étude mais ils ne serviront qu'à diviser des poutres en 2 parties ou plus, et auront pour conséquence une augmentation du nombre d'inconnues. On notera aussi qu'on ne peut pas avoir de nœud non connecté à au moins 1 poutre.

Les nœuds assurent ainsi le lien entre les poutres de la structure, et entre la structure et son environnement. Les nœuds sont supposés indéformables et transmettant intégralement les efforts.

Les nœuds appuis sont particuliers dans le sens où certains de leurs DDL sont connus (imposés) alors que les forces qui leur correspondent sont inconnues.

3.5 Principe de la méthode.

Afin de bien expliquer le principe de la méthode nous avons jugé utile de l'illustrer à travers l'exemple de la Figure 3-2.

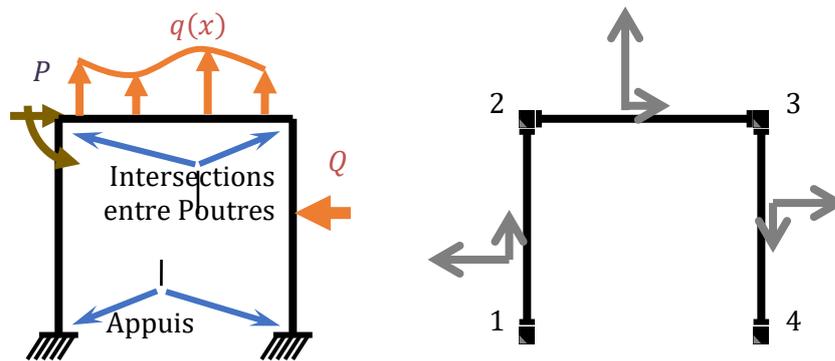


Figure 3-2. Structure et modèle de l'exemple d'illustration

La Figure 3-2 représente le modèle de la structure, elle montre la numérotation des différents nœuds de la structure en portique ainsi que l'orientation des poutres. Les nœuds 1 et 4 sont des encastres, leurs DDL sont donc connus, ils sont nuls.

La Figure 3-3 montre la cinématique de la structure. C'est l'allure de la déformée due aux 6 DDL (inconnus) des 2 nœuds libres. Le principe de superposition (PS) permet de la voir comme la superposition des déformées des 6 DDL, pris un à un.

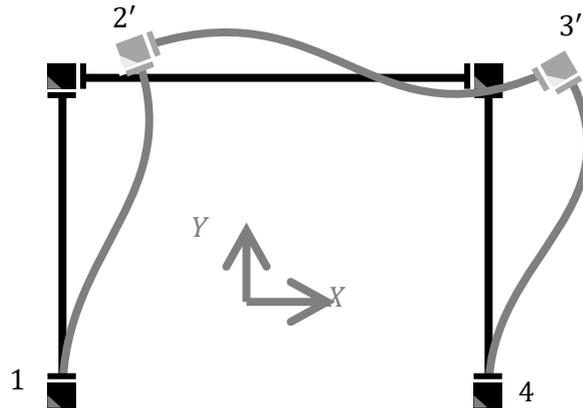


Figure 3-3. La cinématique de la structure.

Les équations d'équilibre entre les efforts induits par les DDL et les charges appliquées à la structure doivent être posées pour déterminer les DDL inconnus. Pour les écrire, on utilise le principe de superposition et on opère en deux parties :

Partie I : On écrit les forces aux nœuds qui sont induites par les déformations des poutres (à la suite des déplacements des nœuds).

Partie II : On écrit les efforts aux nœuds dus aux charges extérieures seules, sans aucun déplacement des nœuds.

Pour ce faire, il faut pratiquer des coupures afin d'isoler les nœuds des poutres. Il faut alors assurer la continuité des efforts entre le nœud isolé et la poutre à laquelle il est lié

3.5.1 Efforts aux nœuds induits par leurs déplacements (Partie I).

Les efforts sont exprimés dans le repère XY du plan choisi, et la notation ci-dessous est adoptée :

Fx_{ij} est l'action du nœud i sur la poutre ij suivant l'axe X

$-Fy_{ij}$ est l'action de la poutre ij sur le nœud i suivant l'axe Y

Mz_{ji} est le moment qu'exerce le nœud j sur la poutre ij

Ainsi, l'indice cité en premier indique le nœud concerné ; les 2 indices définissent la poutre déformée.

Les actions des nœuds sur les poutres portent un signe (+) et les actions des poutres sur les nœuds le signe (-) afin d'assurer la continuité des efforts.

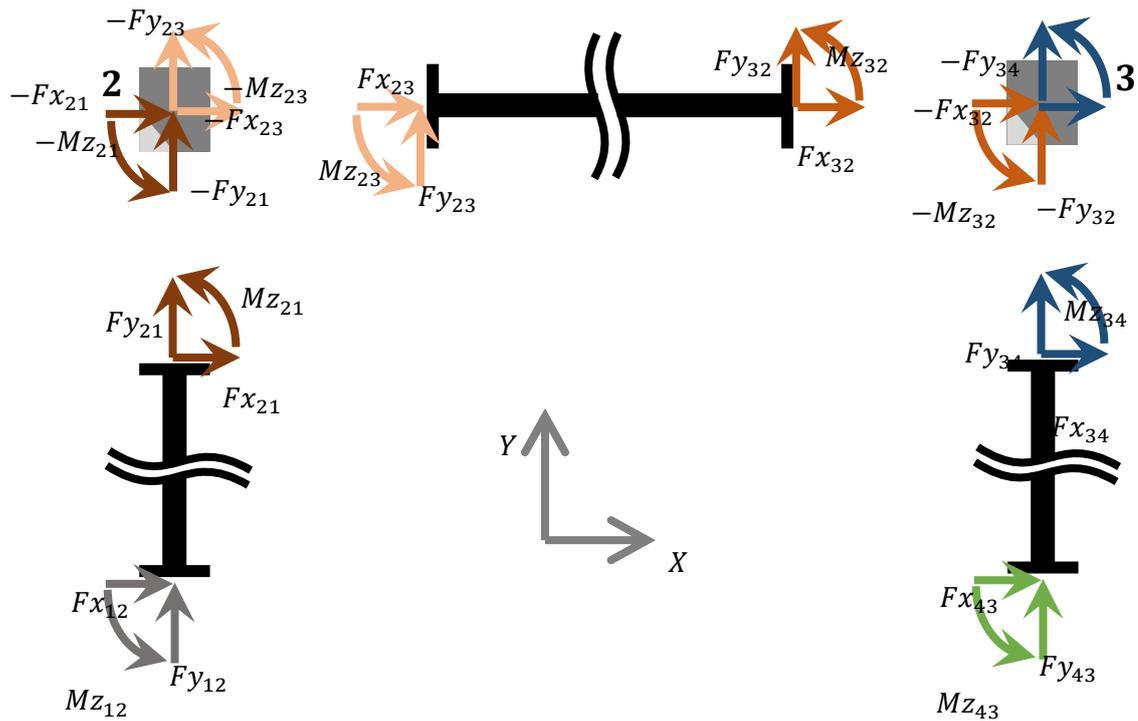


Figure 3-4. Les efforts aux nœuds induits par les déplacements des nœuds

D'après la Figure 3-4, il apparaît évident que les efforts induits au niveau d'un nœud résultent de la somme des actions des poutres qui lui sont connectées.

Comme tous les efforts sont exprimés dans le même repère, le résultat est immédiat. Pour notre exemple, le cumul des forces induites aux nœuds 2 et 3 valent :

$$Fx_2 = Fx_{21} + Fx_{23} ; Fy_2 = Fy_{21} + Fy_{23} ; Mz_2 = Mz_{21} + Mz_{23}$$

$$Fx_3 = Fx_{32} + Fx_{34} ; Fy_3 = Fy_{32} + Fy_{34} ; Mz_3 = Mz_{32} + Mz_{34}$$

Une étape importante de la MD est d'écrire ces forces en fonction des DDL. On les déduit à partir des relations élémentaires établies pour chacune des poutres, prise isolément. La procédure sera présentée en détail ultérieurement.

Pour l'instant, on admet que la relation entre les 6 forces ci-dessus et les 6 DDL est établie et qu'elle possède la forme généralisée illustrée ci-après.

D'une manière générale, en élasticité linéaire, les efforts aux nœuds sont reliés linéairement aux déplacements des nœuds qui les provoquent par une matrice dite matrice de rigidité. La forme de cette relation pour l'exemple d'illustration est :

$$\begin{pmatrix} Fx_2 \\ Fy_2 \\ Mz_2 \\ Fx_3 \\ Fy_3 \\ Mz_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \\ \theta z_2 \\ U_3 \\ V_3 \\ \theta z_3 \end{pmatrix}$$

3-2)

On remarquera que, par exemple, la 4ème colonne de cette matrice est égale au vecteur des forces induites aux nœuds en imposant au 4ème DDL, soit U_3 , une valeur unitaire et en supposant le reste des DDL nuls, c'est-à-dire en les supposant bloqués.

Ainsi, les colonnes de la matrice de rigidité pourraient être obtenues séquentiellement en bloquant tous les DLL puis, en leur imposant une valeur unitaire, l'un après l'autre. On calcule à chaque fois les forces induites aux nœuds.

3.5.2 Efforts aux nœuds dus aux charges extérieures. (Partie II).

Les forces extérieures appliquées à une structure peuvent être des :

- Forces/moments concentrés appliqués aux nœuds, dites charges nodales
- Charges concentrées ou réparties appliquées sur les poutres, dites charges en travée.

Comme on veut écrire les équations d'équilibre des nœuds, les charges nodales ne posent aucun problème.

Pour les charges en travée, il faut calculer les efforts transmis aux nœuds par les poutres chargées. On procède comme précédemment en pratiquant des coupures, afin d'isoler les nœuds des poutres, et on assure la continuité des efforts.

La Figure 3-5 montre les différents efforts dus aux charges extérieures. Ils sont exprimés dans le repère XY du plan. Pour toute poutre ij chargée, la notation ci-dessous est adoptée :

Fx_{ij}^0 est la force au nœud i de la poutre ij suivant l'axe X , due à la charge en travée uniquement.

$-Fy_{ij}^0$ est l'action de la poutre ij sur le nœud i suivant l'axe Y

Mz_{ji}^0 est le moment au nœud j de la poutre ij , dû à la charge en travée uniquement.

Ainsi, l'exposant 0 indique qu'il s'agit de forces liées aux charges en travées. L'indice cité en premier indique le nœud concerné.

Les actions des poutres sur les nœuds portent le signe $(-)$ afin d'assurer la continuité des efforts.

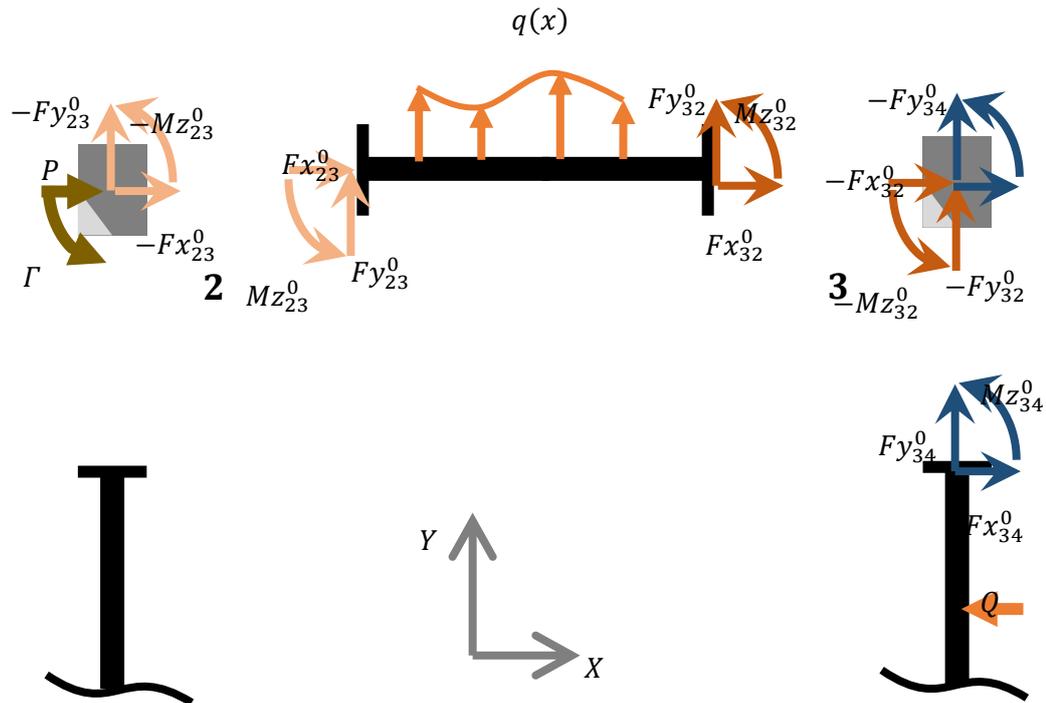


Figure 3-5. Les efforts aux nœuds induits par les charges extérieures.

3.5.3 Equilibre des nœuds (Partie I) + (Partie II)

On écrit maintenant l'équilibre des nœuds sous les forces induites par les déplacements (partie I) et les charges appliquées à la structure (partie II).

Equilibre du nœud 2

$$-(Fx_{21} + Fx_{23}) - Fx_{23}^0 + P = 0$$

$$-(Fy_{21} + Fy_{23}) - Fy_{23}^0 = 0$$

$$-(Mz_{21} + Mz_{23}) - Mz_{23}^0 + \Gamma = 0$$

Equilibre du nœud 3

$$-(Fx_{32} + Fx_{34}) - Fx_{32}^0 - Fx_{34}^0 = 0$$

$$-(Fy_{32} + Fy_{34}) - Fy_{32}^0 - Fy_{34}^0 = 0$$

$$-(Mz_{32} + Mz_{34}) - Mz_{32}^0 - Mz_{34}^0 = 0$$

Ainsi, on a les 6 équations nécessaires au calcul des 6 DDL de la structure qui sont inconnus. Pour les résoudre, on regroupe les termes inconnus à gauche et les termes connus à droite. On obtient alors :

$$\begin{cases} Fx_2 = P - Fx_{23}^0 \\ Fy_2 = 0 - Fy_{23}^0 \\ Mz_2 = \Gamma - Mz_{23}^0 \\ Fx_3 = 0 - Fx_{32}^0 - Fx_{34}^0 \\ Fy_3 = 0 - Fy_{32}^0 - Fy_{34}^0 \\ Mz_3 = 0 - Mz_{32}^0 - Mz_{34}^0 \end{cases} \quad (3-3)$$

Les 0 sont rajoutés pour mettre en évidence la nuance entre les forces nodales et les forces en travée.

La relation explicite entre les forces induites par la déformation et les DDL est donnée par des coefficients de rigidité. La procédure sera présentée ultérieurement.

3.5.4 Solution du système d'équations

La solution du système d'équations linéaires obtenu précédemment par l'équation (3-3) donne les DDL des nœuds. On en déduit ensuite les valeurs des forces aux nœuds.

Avec ces résultats, on peut déduire les réactions selon les DDL bloqués (imposés) ainsi que tous les paramètres souhaités (efforts internes, contraintes, déplacement en travée, ...) dans toutes les poutres.

3.5.5 Calcul des paramètres dans les poutres

Cette étape conclut la procédure de la MD. Le calcul mécanique de la structure et de ses éléments se trouve ainsi achevé. En effet, une poutre (Figure 3-6) dont on connaît les déplacements et les forces aux nœuds i et j est statiquement déterminée et on peut, grâce à la mécanique des structures (MDS), calculer tous les paramètres (efforts internes, déplacements, contraintes, etc.) pour n'importe quelle section Σ d'abscisse x le long de sa longueur.

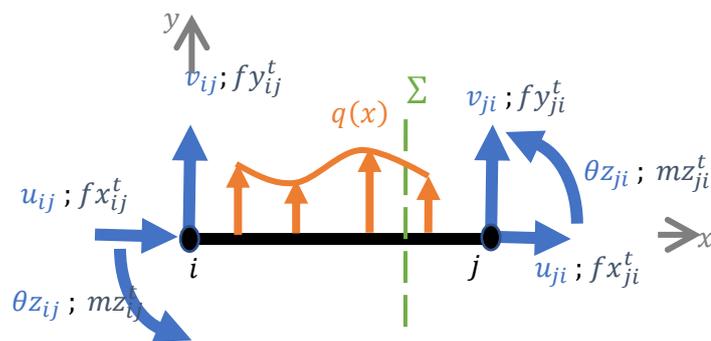


Figure 3-6. Efforts et DDL aux nœuds d'une poutre

3.6 Problématique du choix des DDL et du volume de calculs

Le nombre d'inconnues (NDL) de la MD est facile à calculer. C'est le nombre de nœuds de la structure (NN) multiplié par le nombre de DDL/nœud (NDN). On retranchera le nombre de DDL bloqués/connus au niveau des appuis (NDA).

$$NDL = NN \times NDN - NDA$$

Il est évident que le nombre d'inconnues d'une structure de génie civil relativement simple peut être très élevé. La résolution du système d'équations est assez fastidieuse à la main et les ingénieurs, avant l'avènement de l'ordinateur, se sont ingénies à réduire les DDL en exploitant astucieusement des propriétés (symétrie/antisymétrie) et/ou des hypothèses raisonnables sur la cinématique de la structure (indéformabilité de certaines parties, ...). D'autres, comme Cross, ont très astucieusement mis en œuvre des techniques de résolution des grands systèmes d'équations algébriques.

Dans ce qui suit, nous allons présenter, à travers notre exemple, comment et pourquoi la MD classique (MD_C) réduit le nombre de DDL.

3.7 Méthode des Déplacements vs Méthode des Forces

Pour notre exemple illustratif à 4 nœuds, deux sont encastres, c'est-à-dire que tous leurs DDL sont bloqués (nuls).

$$\delta_1 = \begin{cases} U_1 = 0 \\ V_1 = 0 \\ \theta_{z_1} = 0 \end{cases} \text{ et } \delta_4 = \begin{cases} U_4 = 0 \\ V_4 = 0 \\ \theta_{z_4} = 0 \end{cases}$$

Les DDL inconnus sont finalement ceux des nœuds 2 et 3. Autrement-dit, le système à résoudre est de dimension 6.

Si on utilise la méthode des forces (MF), notre structure est 3 fois hyperstatique. Le système à résoudre par la MF est de dimension 3. Il est alors évident qu'il vaut mieux étudier cet exemple par la MF, à moins d'utiliser des astuces/techniques pour alléger les calculs de la MD.

Pour réduire le volume de calculs, il est courant de prendre des hypothèses supplémentaires cohérentes avec le comportement réel de la structure.

3.8 Méthode des Déplacements classique (MD_C)

3.8.1 Hypothèse de conservation de la longueur des poutres.

L'hypothèse la plus usuelle dans l'étude de portiques plans par la MD est celle qui suppose l'indéformabilité axiale des poutres. Cela équivaut à considérer que toute poutre ij conserve sa dimension selon son axe x et cela se traduit par l'équation de contrainte suivante :

$$u_{ij} - u_{ji} = 0 \quad (3-4)$$

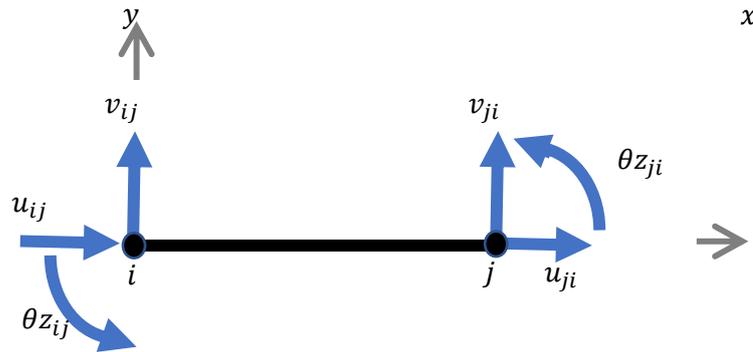


Figure 3-7. Représentation des différents DDL

3.8.2 Conséquence sur les DDL

Avec ces relations de contraintes (conditions) supplémentaires, le nombre total de DDL se trouve réduit de 1 DDL par poutre. La réduction concerne exclusivement les DDL de translation et les composantes à réduire dépendent des orientations des poutres et de leur maillage.

En notant NP le nombre de poutres, le NDL de la MR vaut :

$$NDL = NN \times NDN - NDA - NP \quad (3-5)$$

Pour notre exemple à 3 poutres, l'hypothèse d'indéformabilité axiale fait passer le NDL de 6 à 3 et rend la MD compétitive avec la MF.

Dans ce qui suit, on montre l'exploitation de ces relations dans le cas de notre exemple. Une procédure plus générale sera présentée ultérieurement.

Pour notre exemple à 3 poutres, l'hypothèse d'indéformabilité axiale (3-4) permet d'écrire, respectivement pour chacune des poutres 12, 23 et 34, les équations ci-dessous :

$$u_{12} = u_{21}, \quad u_{23} = u_{32} \quad \text{et} \quad u_{34} = u_{43}$$

Comme les nœuds sont indéformables et que les poutres sont orthogonales entre-elles, on peut aisément déduire que ces équations équivalent à :

$$V_1 = V_2, \quad U_2 = U_3 \quad \text{et} \quad V_3 = V_4$$

À partir des conditions d'appui, on arrive à conclure que

$$V_2 = 0 \quad \text{et} \quad V_3 = 0.$$

Ainsi, on peut retenir indifféremment U_2 ou U_3 comme translation inconnue. On choisit alors de retenir U_2 et les 3 DDL à calculer sont : θ_{z_2} , θ_{z_3} et U_2

3.8.3 Conséquence sur l'équilibre

L'hypothèse de l'indéformabilité axiale des poutres réduit les DDL mais pose un problème pour les efforts normaux : ils ne peuvent pas être calculés à partir des déplacements ! On ne peut donc pas les considérer parmi les efforts induits par les déplacements. La procédure de la MD présentée précédemment se trouve ainsi bouleversée et on ne pourra pas écrire l'équilibre des nœuds suivant les directions où interviendrait un effort normal, c'est-à-dire suivant les DDL de translation.

Il est évident que cela ne concerne pas les DDL en rotation. Ainsi, la MD classique utilise naturellement l'équilibre des moments appliqués aux nœuds pour obtenir les équations relatives aux DDL de rotation.

Alors que pour les équations relatives aux translations, elle utilise astucieusement les formes d'écriture de l'équilibre qui passent par le travail ou l'énergie.

Cette façon de faire permet d'éviter de faire mention directe des efforts normaux en faisant plutôt appel aux travaux (ou énergies) qui leurs correspondent et de négliger leurs contributions au travail (ou à l'énergie) global.

Cette pratique est courante en MDS classique. À titre d'exemples :

- L'effort tranchant est bien pris en compte dans l'équilibre des poutres alors que la distorsion (la déformation qui lui correspond) y est négligée.
- Les charpentes métalliques sont modélisées par des treillis car l'énergie flexionnelle y est négligeable...

La procédure consiste à calculer, pour chaque DDL de translation, la somme des travaux de toutes les forces aux nœuds de la structure ; on négligera évidemment la contribution des composantes des efforts induits (partie I) causées par les déformations axiales des poutres. On prendra une valeur quelconque (virtuelle) de la translation et on écrira que la somme des travaux est nulle (PTV).

3.8.4 Équilibre des nœuds selon les DDL de rotation

Les équations d'équilibre des nœuds sous les moments induits par les rotations (partie I) et ceux dus aux charges appliquées à la structure (partie II) restent identiques à celles de la MD

Equilibre des moments appliqués au nœud 2

$$-M_{z_{21}} - M_{z_{23}} + \Gamma - M_{z_{23}}^0 = 0$$

Equilibre des moments appliqués au nœud 3

$$-M_{z_{32}} - M_{z_{34}} - M_{z_{32}}^0 - M_{z_{34}}^0 = 0$$

3.8.5 Equilibre selon le DDL de translation

Pour exprimer l'équilibre selon le DDL de translation, on calcule la somme des travaux virtuels sous une translation quelconque U^* parallèle au (seul) DDL de translation U_2 . Pour illustrer la

procédure, on reprend les figures montrant les efforts intervenant dans l'équilibre (parties I et II) tout en mettant en évidence les efforts aux nœuds qui produisent un travail non nul sous U^* (Figure 3-8 et Figure 3-9) .

Les forces $(-Fx_{23})$ et $(-Fx_{32})$, résultant de l'action axiale de la poutre 23 sur les nœuds 2 et 3 respectivement, produiront un travail négligeable. Quant aux forces $(-Fx_{23}^0)$ et $(-Fx_{32}^0)$ qui résultent des charges en travée, elles produisent un travail virtuel sous U^* .

La somme des travaux virtuels (non négligeables) sous U^* doit être nulle (quel que soit U^*), alors :

$$-Fx_{21}U^* - Fx_{34}U^* + PU^* - Fx_{23}^0U^* - Fx_{32}^0U^* - Fx_{34}^0U^* = 0$$

Il s'ensuit évidemment que :

$$-Fx_{21} - Fx_{34} + P - Fx_{23}^0 - Fx_{32}^0 - Fx_{34}^0$$

3.8.6 Système à résoudre

Les 3 équations, nécessaires au calcul des 3 DDL de la structure, sont établies. Pour les résoudre, on regroupe les termes inconnus à gauche et les termes connus à droite :

$$\begin{cases} Mz_{21} + Mz_{23} = \Gamma - Mz_{23}^0 \\ Mz_{32} + Mz_{34} = 0 - Mz_{32}^0 - Mz_{34}^0 \\ Fx_{21} + Fx_{34} = P - Fx_{23}^0 - Fx_{32}^0 - Fx_{34}^0 \end{cases}$$

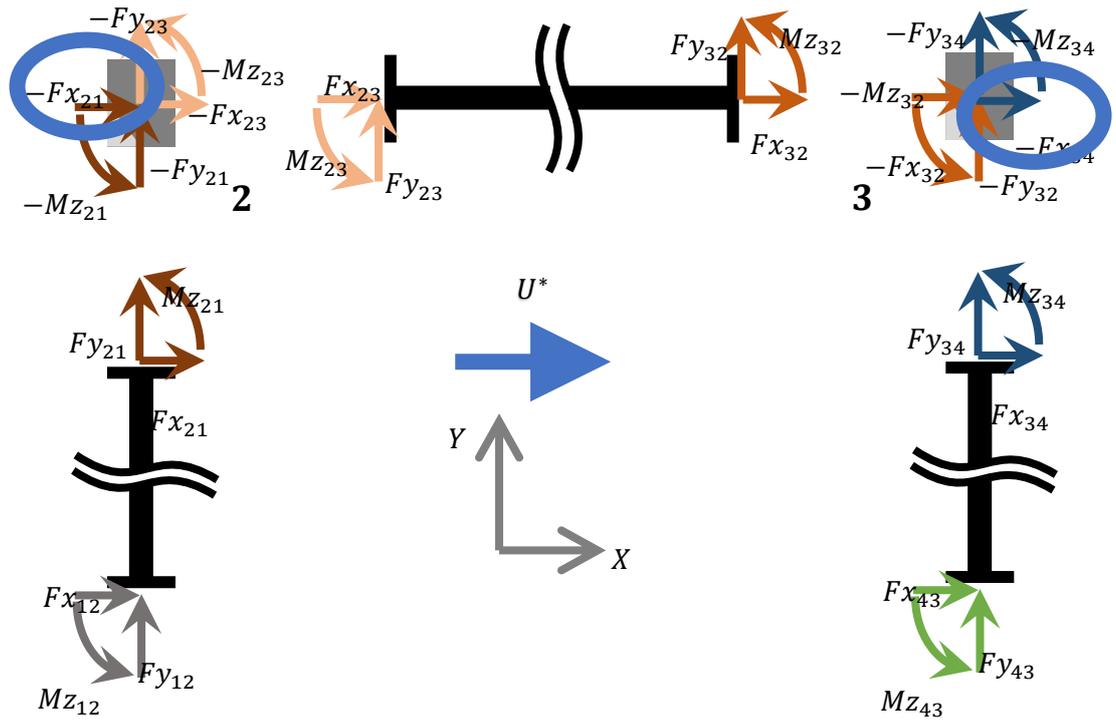


Figure 3-8. Équilibre (Partie I). Les Efforts induits par les déplacements des nœuds

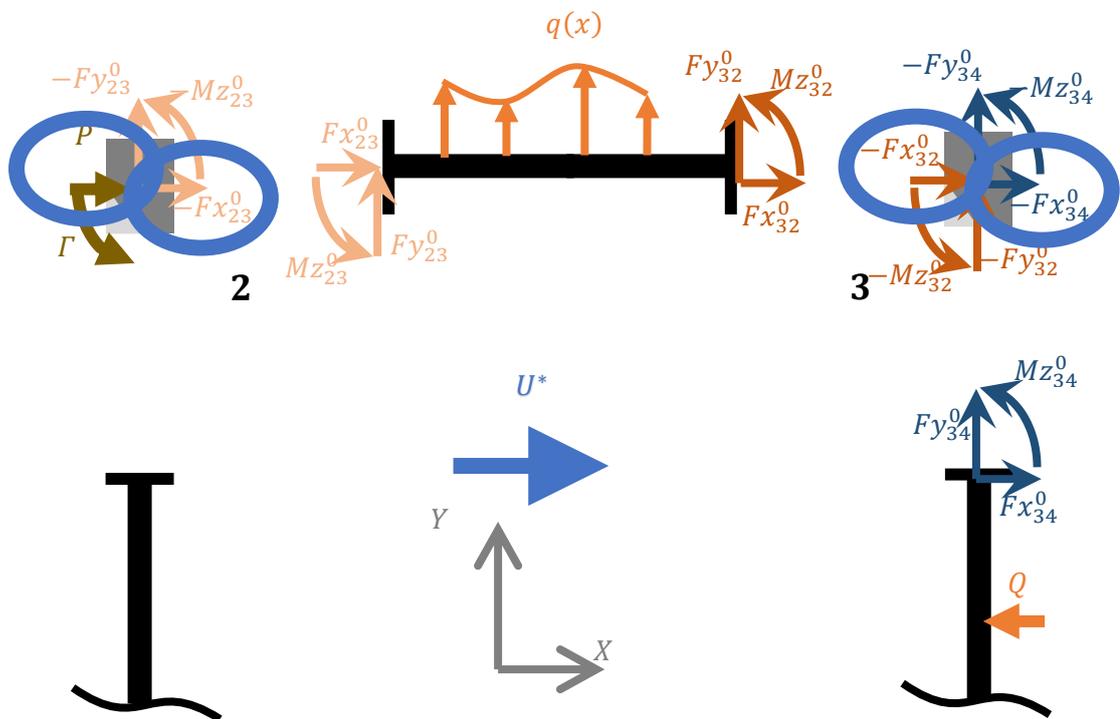


Figure 3-9. Équilibre (Partie II). Les Efforts dus aux charges extérieures (sans aucun déplacement des nœuds)

3.9 Calcul des paramètres dans les poutres. Particularité des efforts axiaux

L'étape suivante de la MD est le calcul des efforts aux extrémités des poutres à partir des DDL obtenus par résolution du système précédent puis, d'en déduire les réactions et tous les paramètres des poutres (efforts internes, etc.).

Cependant, l'hypothèse de l'indéformabilité axiale des poutres fait que les efforts axiaux ne sont pas reliés aux DDL! Pour contourner ce problème, on pose les équations d'équilibre en translation, selon X et Y , des NN nœuds pour trouver les NP efforts axiaux inconnus.

On ne peut donc envisager de solution que si : $NP \leq 2 \times NN$

3.10 Les solutions des Poutres Isolées

La MD dans ses deux versions pose des équations d'équilibre pour trouver les DDL qui sont inconnus.

Elle utilise le principe de superposition pour écrire l'équilibre des nœuds de la structure. Les forces aux nœuds sont alors dues à la superposition de deux états :

- Les actions induites par les DDL seuls (sans le chargement)
- Les efforts dus aux charges extérieures (sans aucun déplacement des nœuds)

La mécanique des structures (MDS) permet de résoudre entièrement le cas des poutres isolées soumises à des déplacements imposés en leurs extrémités. Elle donne aussi les efforts développés dans les poutres isolées chargées en travée, lorsque leurs extrémités ne se déplacent pas.

Dans ce qui suit, on donne ces relations/expressions pour une poutre isolée. On abordera ensuite la problématique de l'orientation des poutres.

3.10.1 Forces induites – Déplacements imposés

La MD se base sur les relations entre les forces induites et les DDL qui les provoquent (Figure 3-10). Pour une poutre seule, il est aisé d'établir ces relations par l'une des méthodes de la MDS. Dans ce cours, on fera usage de l'équation de la ligne élastique.

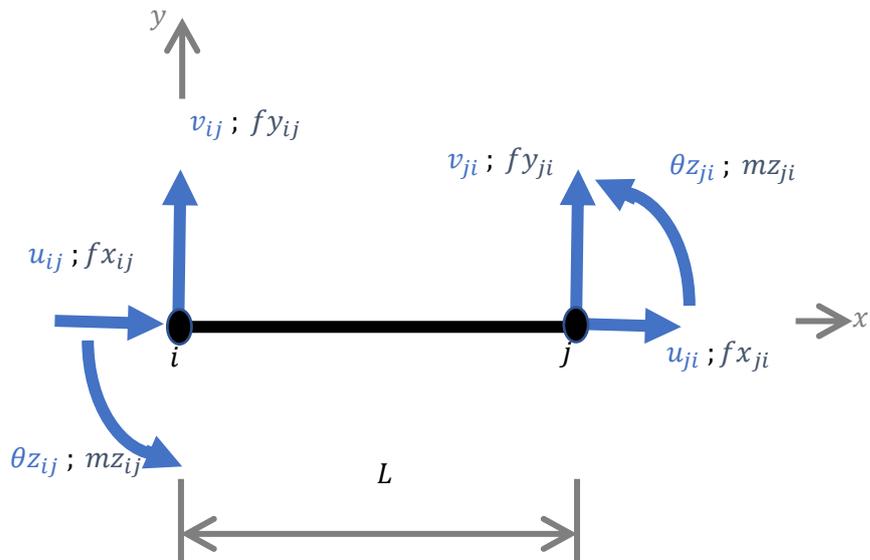


Figure 3-10. Illustration des différents DDL/Efforts aux nœuds

3.10.1.1 Décomposition : Flexion Simple + Sollicitation Axiale.

Comme il est courant de faire usage du principe de superposition, on considère alors séparément la flexion de la poutre de son comportement axial.

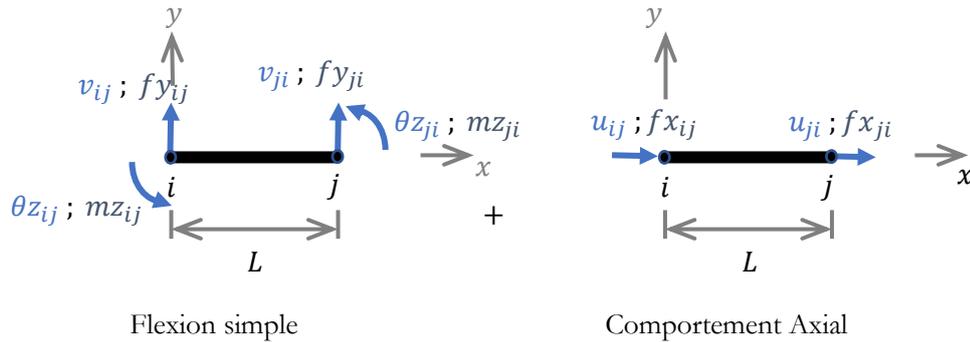


Figure 3-11. Décomposition : Flexion simple Comportement axial.

3.10.1.2 Flexion simple : Equation de la ligne élastique

Une poutre droite d'axe longitudinal x qui fléchit dans le plan xy (défini par un repère orthonormé direct) est régie par l'équation différentielle d'ordre 4 ci-dessous, dite équation de la ligne élastique.

$$\frac{d^4 v(x)}{dx^4} = \frac{q(x)}{EI_z} \tag{3-6}$$

Où

$v(x)$ est la flèche

$q(x)$ est la charge appliquée sur la ligne moyenne de la poutre et dirigée selon y .

E est le module de Young

I_z est le moment d'inertie de la section transversale de la poutre par rapport à l'axe z , normal au plan de flexion.

Connaissant les conditions aux limites i et j de la poutre, on peut résoudre entièrement cette équation et en déduire la rotation, le moment fléchissant et l'effort tranchant dans n'importe quelle section d'abscisse x par les relations :

$$\theta_z(x) = dv(x)/dx \quad (3-7)$$

$$M(x) = EI_z d^2v(x)/dx^2 \quad (3-8)$$

$$T(x) = -dM(x)/dx \quad (3-9)$$

3.10.1.3 Flèche en imposant v_{ij} seul

L'équation de la ligne élastique avec un second membre nul (pas de chargement sur la poutre) admet comme solution un polynôme du 3ème degré :

$$v(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

En imposant les 4 conditions aux limites

$$v(0) = v_{ij} ; \theta_z(0) = 0 ; v(L) = 0 ; \theta_z(L) = 0$$

On trouve les 4 coefficients du polynôme et par suite l'équation de la flèche sous v_{ij} seul :

$$v(x) = \left(\frac{2}{L^3}x^3 - \frac{3}{L^2}x^2 + 1 \right) v_{ij} \quad (3-10)$$

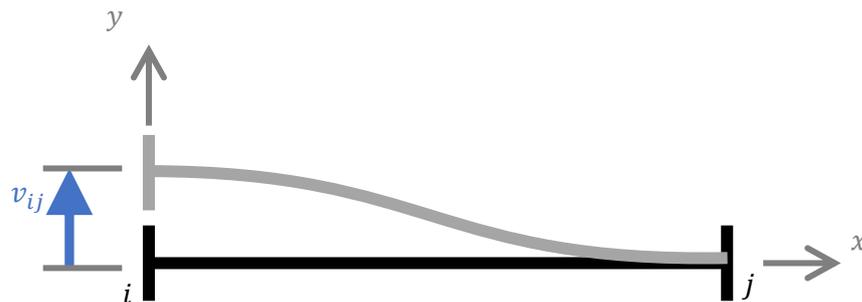


Figure 3-12. Flèche en imposant v_{ij} seul.

3.10.1.4 Efforts internes en imposant v_{ij} seul

À partir de l'équation de la flèche, on déduit les expressions du moment fléchissant et de l'effort tranchant dans n'importe quelle section d'abscisse x (l'effort normal est nul en flexion simple) :

$$M(x) = EI_z d^2v(x)/dx^2 = EI_z \left(\frac{12}{L^3}x - \frac{6}{L^2} \right) v_{ij}$$

$$T(x) = -dM(x)/dx = -EI_z \frac{12}{L^3} v_{ij}$$

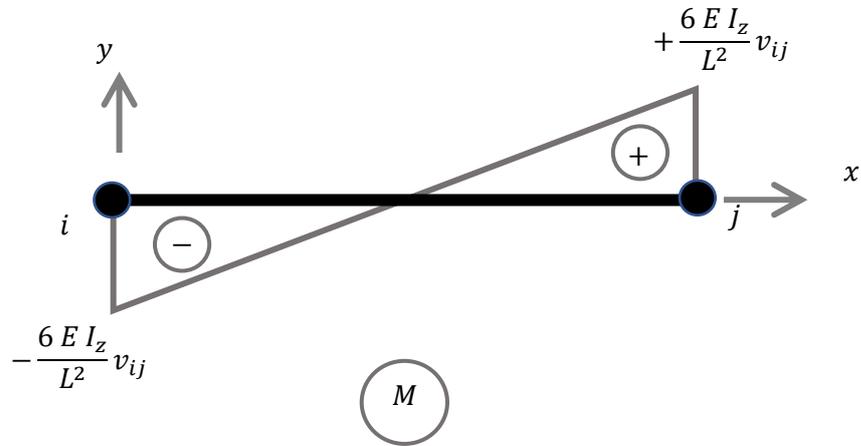


Figure 3-13. Moment fléchissant en imposant v_{ij} seul

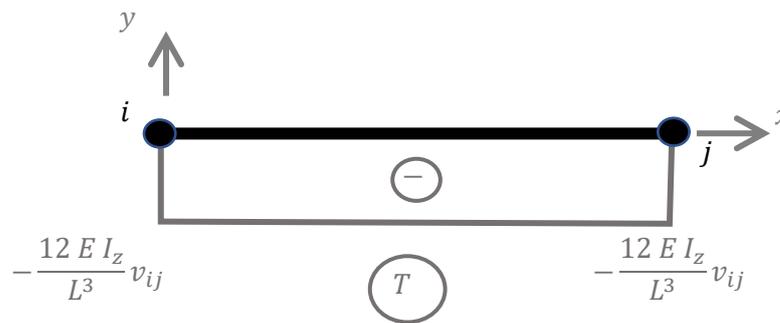


Figure 3-14. Effort tranchant en imposant v_{ij} seul

3.10.1.5 Efforts induits aux nœuds en imposant v_{ij} seul

En tenant compte de la convention de signes des efforts internes, on arrive à établir la relation recherchée, c'est-à-dire à exprimer les efforts induits aux nœuds à la suite de l'application de v_{ij} seul.

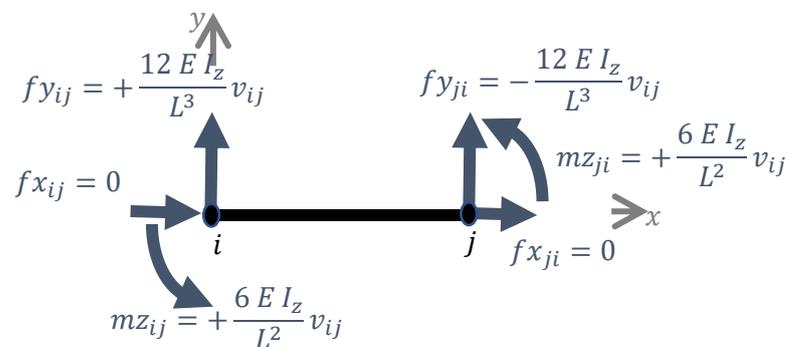


Figure 3-15. Efforts induits aux nœuds en imposant v_{ij} seul.

3.10.1.6 Flèche et Efforts internes en imposant $\theta_{z_{ij}}$ seul

En utilisant les conditions aux limites, on peut écrire :

$$v(0) = 0 ; \theta_z(0) = \theta_{z_{ij}} ; v(L) = 0 ; \theta_z(L) = 0$$

On obtient alors l'expression de la flèche en fonction de $\theta_{z_{ij}}$, elle est donnée par :

$$v(x) = \left(\frac{1}{L^2} x^3 - \frac{2}{L} x^2 + x \right) \theta_{z_{ij}}$$

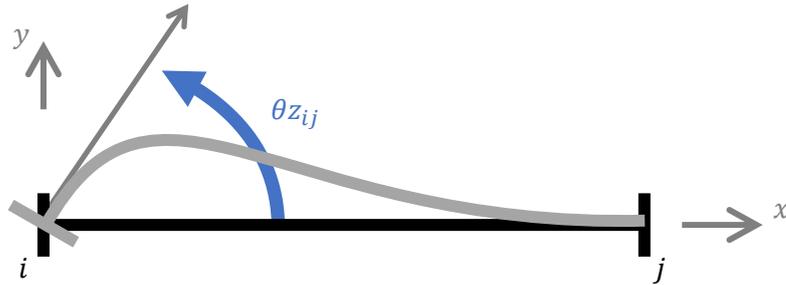


Figure 3-16. Déformée en imposant $\theta_{z_{ij}}$ seul.

D'où

$$M(x) = EI_z \left(\frac{6}{L^2} x - \frac{4}{L} \right) \theta_{z_{ij}}$$

$$T(x) = -EI_z \frac{6}{L^2} \theta_{z_{ij}}$$

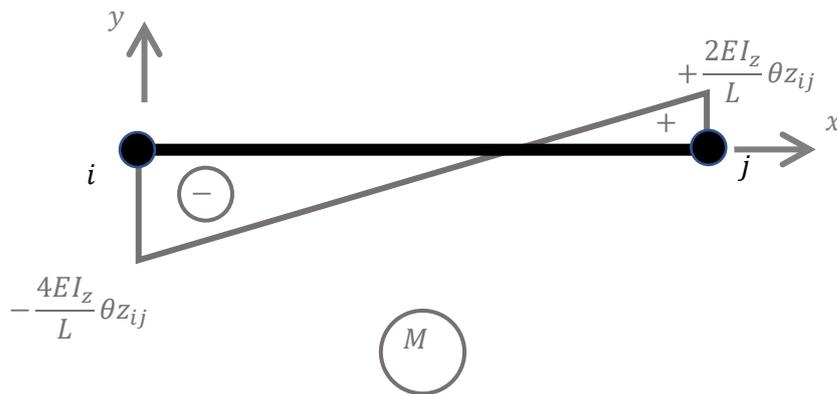


Figure 3-17. Moment fléchissant en imposant $\theta_{z_{ij}}$ seul.

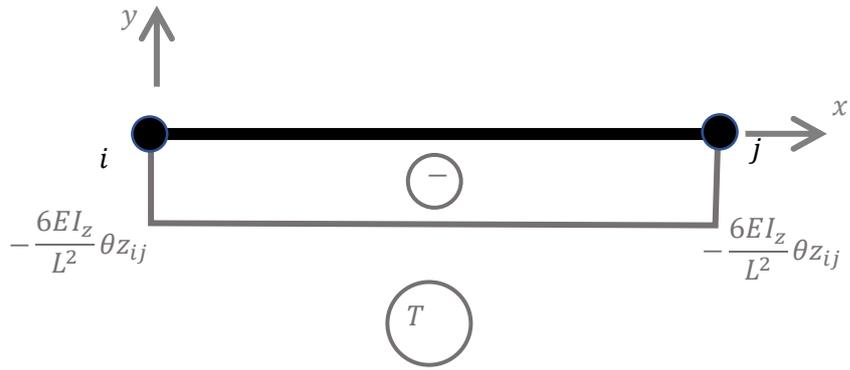


Figure 3-18. Effort tranchant en imposant $\theta_{z_{ij}}$ seul.

3.10.1.7 Efforts induits aux nœuds en imposant $\theta_{z_{ij}}$ seul.

Les efforts induits aux nœuds dus à $\theta_{z_{ij}}$ seul valent alors :

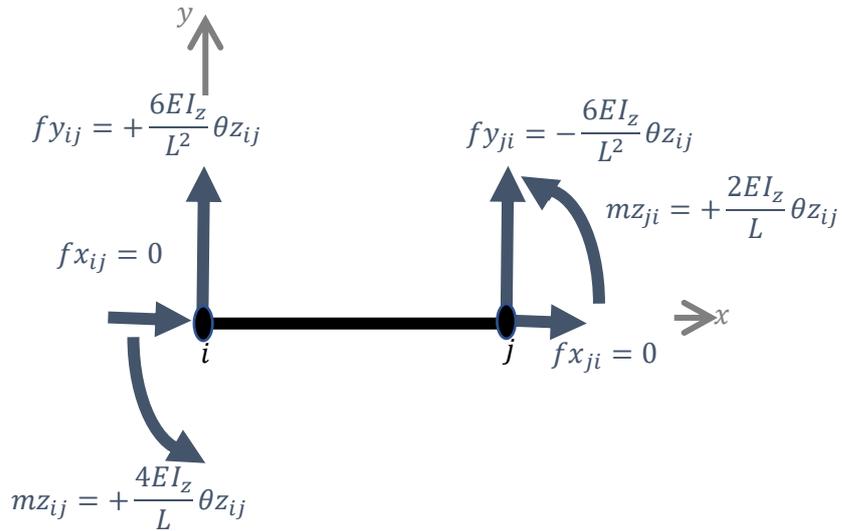


Figure 3-19. Efforts induits en imposant $\theta_{z_{ij}}$ seul.

3.10.1.8 Efforts induits aux nœuds en imposant v_{ji} seul.

De la même manière, les efforts induits aux nœuds dus à v_{ji} seul sont donnés par la Figure 3-22

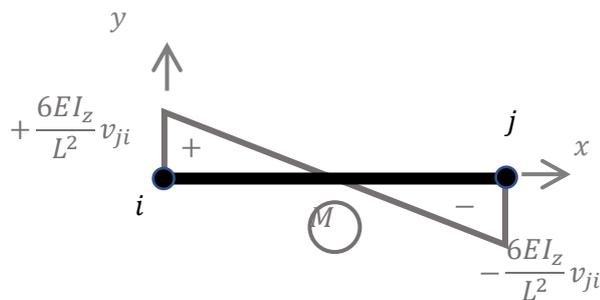


Figure 3-20. Moment fléchissant en imposant v_{ji} seul.

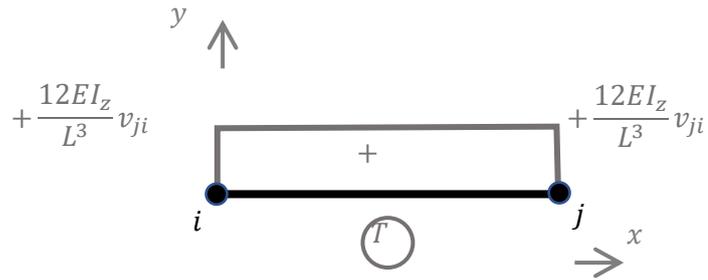


Figure 3-21. Effort tranchant en imposant v_{ji} seul

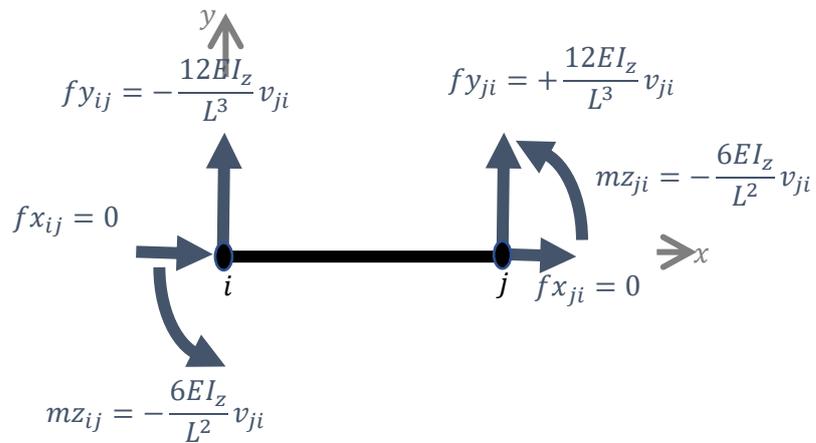


Figure 3-22. Efforts induits aux nœuds en imposant v_{ji} seul.

3.10.1.9 Efforts induits aux nœuds en imposant θ_{zji} seul

Les efforts induits aux nœuds dus à θ_{zji} seul sont donnés sur la Figure 3-25

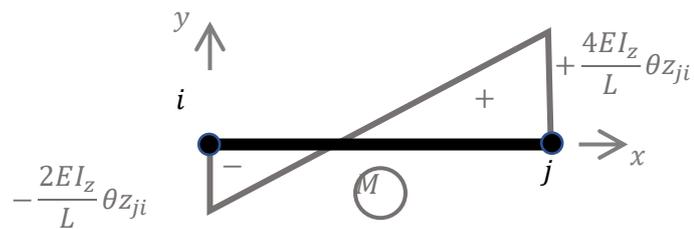


Figure 3-23. Moment fléchissant en imposant θ_{zji} seul

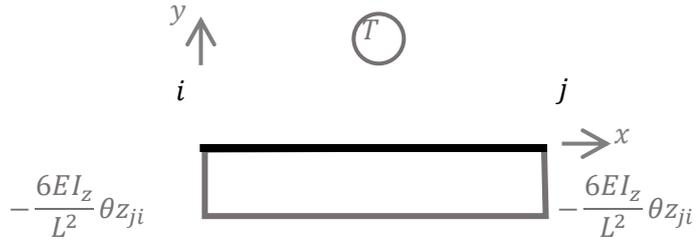


Figure 3-24. Effort tranchant en imposant θ_{zji} seul

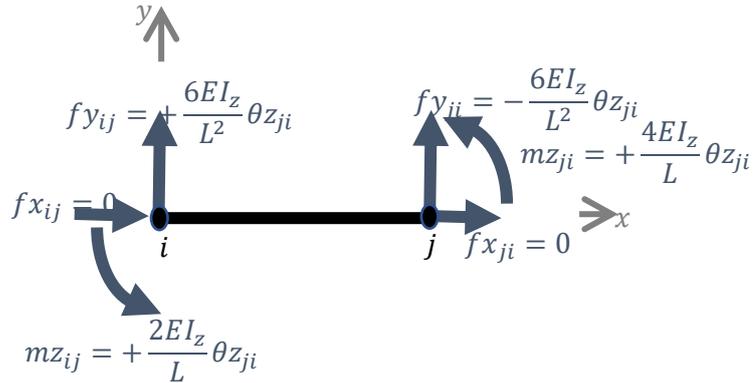


Figure 3-25. efforts induits aux nœuds en en imposant θ_{zji} seul

3.10.1.10 Efforts induits aux nœuds sous v_{ij} , θ_{zij} , v_{ji} et θ_{zji}

En combinant les résultats intermédiaires, on trouve les efforts induits aux nœuds par une flexion simple provoquée par les déplacements des extrémités de la poutre.

$$m_{zij} = +\frac{2EI_z}{L}(2\theta_{zij} + \theta_{zji}) + \frac{6EI_z}{L^2}(v_{ij} - v_{ji})$$

$$m_{zji} = +\frac{2EI_z}{L}(\theta_{zij} + 2\theta_{zji}) + \frac{6EI_z}{L^2}(v_{ij} - v_{ji})$$

$$f_{yij} = +\frac{6EI_z}{L^2}(\theta_{zij} + \theta_{zji}) + \frac{12EI_z}{L^3}(v_{ij} - v_{ji})$$

$$f_{yji} = -\frac{6EI_z}{L^2}(\theta_{zij} + \theta_{zji}) - \frac{12EI_z}{L^3}(v_{ij} - v_{ji})$$

3.10.1.11 Sollicitation axiale : Efforts induits aux nœuds en imposant u_{ij} et u_{ji}

Par définition, la déformation axiale est : $\varepsilon_x = (u_{ji} - u_{ij})/L$

La loi de Hook donne la contrainte en fonction de la déformation. La contrainte normale est exprimée par : $\sigma_x = E\varepsilon_x$, où E est le module de Young. Si A désigne l'aire de la section de la poutre, l'effort normal vaut $N = A\sigma_x = EA(u_{ji} - u_{ij})/L$. En tenant compte de la convention de signe de l'effort normal, on déduit aisément que :

$$f_{xij} = EA(u_{ij} - u_{ji})/L \quad \text{et} \quad f_{xji} = EA(u_{ji} - u_{ij})/L$$

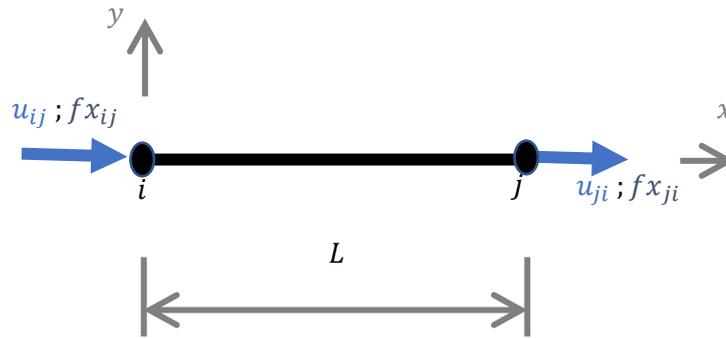


Figure 3-26. Efforts induits aux nœuds dans le cas de la sollicitation axiale.

3.10.1.12 Forces induites – Déplacements imposés. Ecriture matricielle.

Pour une poutre seule, les relations entre les forces induites et les DDL qui les provoquent peuvent être réécrites sous forme matricielle comme suit.

$$\text{Sollicitation Axiale : } \begin{Bmatrix} f_{x_{ij}} \\ f_{x_{ji}} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{ij} \\ u_{ji} \end{Bmatrix}$$

Flexion simple :

$$\begin{Bmatrix} f_{y_{ij}} \\ m_{z_{ij}} \\ f_{y_{ji}} \\ m_{z_{ji}} \end{Bmatrix} = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{ij} \\ \theta_{z_{ij}} \\ v_{ji} \\ \theta_{z_{ji}} \end{Bmatrix}$$

3.10.2 Forces aux nœuds dues aux charges en travée seules

Dans l'écriture de l'équilibre dans la MD, on a aussi besoin des forces aux nœuds dues aux charges en travée seules, sans aucun déplacement de nœuds. Pour une poutre isolée, il est aisé de les calculer par une méthode de la MDS. Les résultats pour différents cas de chargement sont disponibles dans la bibliographie.

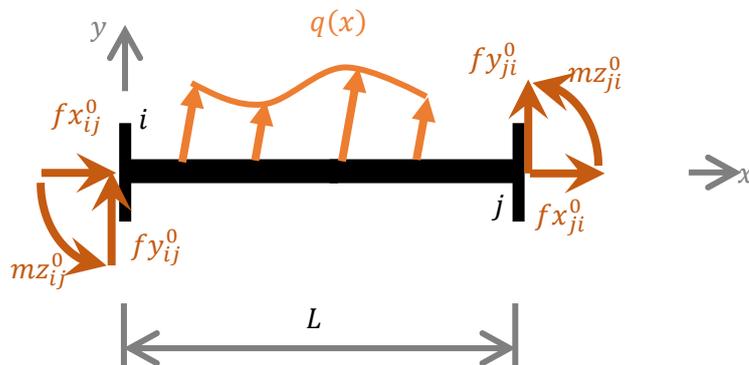


Figure 3-27. Forces aux nœuds dues aux charges en travées

3.10.2.1 Cas de la charge transversale uniformément répartie

A titre d'exemple, on donne les forces aux nœuds sous une charge en travée uniformément répartie, exprimées dans le référentiel de la poutre isolée.

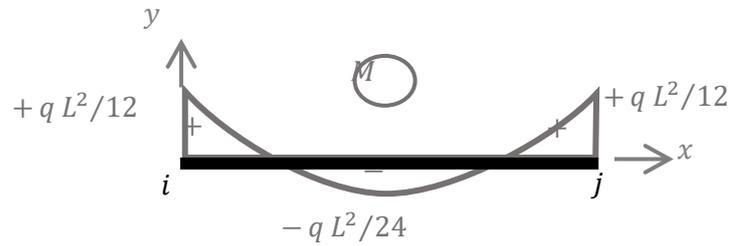


Figure 3-28. Moment fléchissant. Cas de la charge transversale uniformément répartie

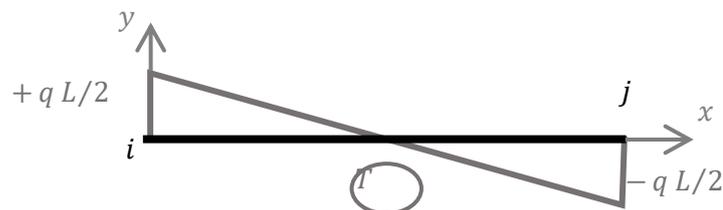


Figure 3-29. Effort tranchant. Cas de la charge transversale uniformément répartie

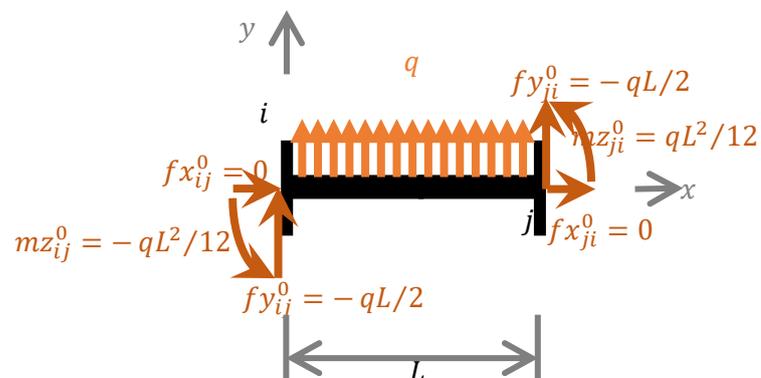


Figure 3-30. Forces aux nœuds. Cas de la charge transversale uniformément répartie

On peut écrire les forces aux nœuds sous une charge en travée transversale uniformément répartie comme suit.

$$\text{Sollicitation Axiale : } \begin{Bmatrix} fx_{ij}^0 \\ fx_{ji}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Flexion simple : } \begin{cases} fy_{ij}^0 \\ mz_{ij}^0 \\ fy_{ji}^0 \\ mz_{ji}^0 \end{cases} = \begin{cases} -qL/2 \\ -qL^2/12 \\ -qL/2 \\ +qL^2/12 \end{cases}$$

3.10.2.2 Cas d'une Charge concentrée transversale à mi travée.

Un autre exemple est celui d'une force concentrée appliquée transversalement au milieu de la poutre

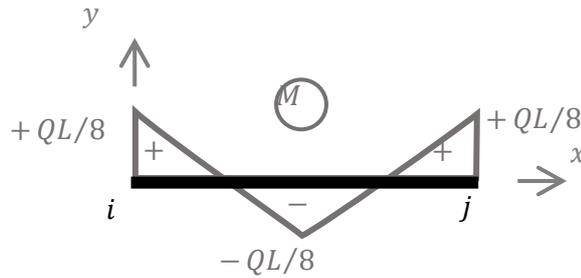


Figure 3-31. Moment fléchissant. Cas d'une force concentrée à mi-travée

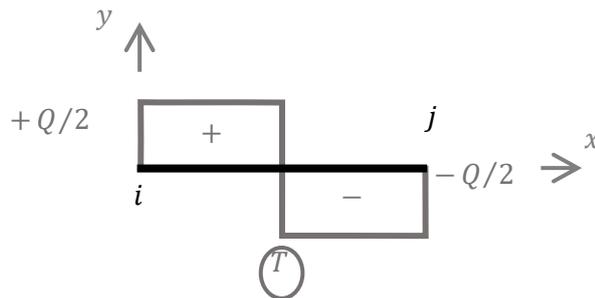


Figure 3-32. Effort tranchant. Cas d'une force concentrée à mi-travée.

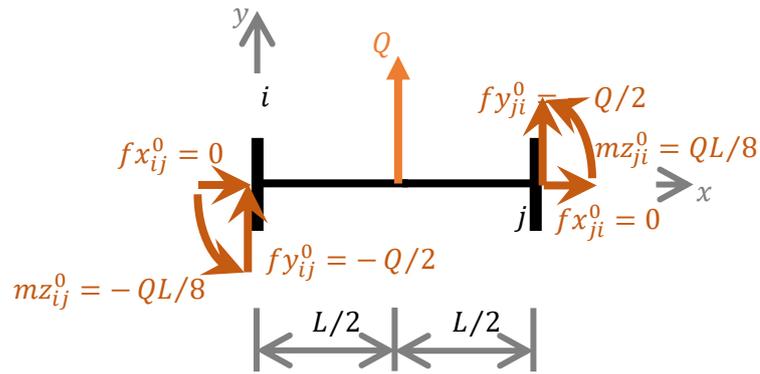


Figure 3-33. Forces aux nœuds dues à une charge concentrée à mi-travée

On peut écrire les forces aux nœuds sous une charge concentrée transversale à mi travée comme suit.

$$\text{Sollicitation Axiale : } \begin{cases} fx_{ij}^0 \\ fx_{ji}^0 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases}$$

$$\text{Flexion simple : } \begin{cases} fy_{ij}^0 \\ mz_{ij}^0 \\ fy_{ji}^0 \\ mz_{ji}^0 \end{cases} = \begin{cases} -Q/2 \\ -QL/8 \\ -Q/2 \\ +QL/8 \end{cases}$$

3.10.3 Forces totales aux nœuds.

Les forces totales aux extrémités de la poutre ij sont donc la superposition des 2 états présentés ci-avant, soit les forces dues aux DDL sans charges, plus, les forces dues aux charges en travées sans déformation. Ainsi, on a

$$\begin{cases} fx_{ij}^t \\ fx_{ji}^t \end{cases} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} u_{ij} \\ u_{ji} \end{cases} + \begin{cases} fx_{ij}^0 \\ fx_{ji}^0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} fy_{ij}^t \\ mz_{ij}^t \\ fy_{ji}^t \\ mz_{ji}^t \end{cases} = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{cases} v_{ij} \\ \theta_{z_{ij}} \\ v_{ji} \\ \theta_{z_{ji}} \end{cases} + \begin{cases} fy_{ij}^0 \\ mz_{ij}^0 \\ fy_{ji}^0 \\ mz_{ji}^0 \end{cases}$$

3.10.4 Forces aux nœuds dans le cas de la MD_c.

Le problème de la MD_c qui suppose l'indéformabilité axiale des poutres pour réduire les DDL est qu'il n'est pas possible d'obtenir directement les efforts axiaux des poutres. On ne pourra calculer que les efforts de flexion à partir des DDL.

$$\begin{cases} fx_{ij}^t \\ fx_{ji}^t \end{cases} = \begin{cases} ? \\ ? \end{cases} + \begin{cases} fx_{ij}^0 \\ fx_{ji}^0 \end{cases}$$

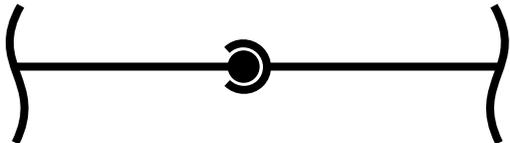
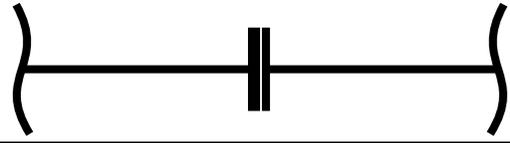
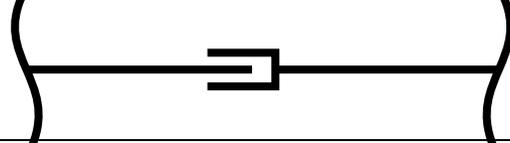
$$\begin{Bmatrix} fy_{ij}^t \\ mz_{ij}^t \\ fy_{ji}^t \\ mz_{ji}^t \end{Bmatrix} = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{ij} \\ \theta z_{ij} \\ v_{ji} \\ \theta z_{ji} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} fy_{ij}^0 \\ mz_{ij}^0 \\ fy_{ji}^0 \\ mz_{ji}^0 \end{Bmatrix}$$

3.10.5 Poutres Isolées particulières.

Dans la MD les nœuds assurent le lien entre les poutres de la structure, et entre la structure et son environnement. Par hypothèse, les nœuds sont indéformables et transmettent intégralement les efforts. Pour prendre en charge les discontinuités de DDL introduites par certains dispositifs mécaniques, telle l'articulation, on utilise la technique suivante. On crée un nœud situé « immédiatement avant » ou « immédiatement après » la discontinuité, et on « reporte » la discontinuité sur l'origine ou l'extrémité d'une poutre connectée à ce nœud. Cette poutre devra avoir/assurer en sa limite concernée les conditions modélisant le comportement du dispositif mécanique en question.

Dans ce qui suit, on va présenter quelques exemples de dispositifs sources de discontinuités avec leurs CL, et on n'exposera que le cas de l'articulation.

Tableau 3-1. Exemples de dispositifs sources de discontinuité.

Rotations indépendantes, moment fléchissant nul : Articulation.	
Flèches indépendantes, effort tranchant nul.	
Déplacements axiaux indépendants, effort normal nul.	

On résout l'équation de la ligne élastique en imposant les 4 conditions aux limites pour trouver la relation recherchée.

$$v(0) = v_{ij} ; \theta z(0) = \theta z_{ij}; \quad v(L) = v_{ji}; \quad M(L) = 0$$

Le moment à l'extrémité est bien sûr nul et les autres efforts sont indépendants de la rotation du nœud j .

$$\begin{Bmatrix} fy_{ij} \\ mz_{ij} \\ fy_{ji} \\ mz_{ji} \end{Bmatrix} = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 3 & 3L & -3 & 0 \\ 3L & 3L^2 & -3L & 0 \\ -3 & -3L & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{ij} \\ \theta z_{ij} \\ v_{ji} \\ \theta z_{ji} \end{Bmatrix}$$

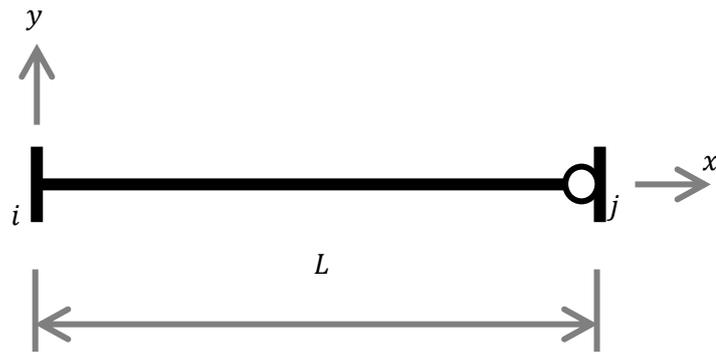


Figure 3-34. Poutre avec une extrémité articulée

Dans l'écriture de l'équilibre dans la MD, on a aussi besoin des forces aux nœuds dues aux charges en travée seules, sans aucun déplacement de nœuds. Pour une poutre isolée articulée à son extrémité, on adopte l'un des deux modèles ci-dessous et il est aisé de les calculer par une méthode de la MDS. Les résultats pour différents cas de chargement sont disponibles dans la bibliographie.

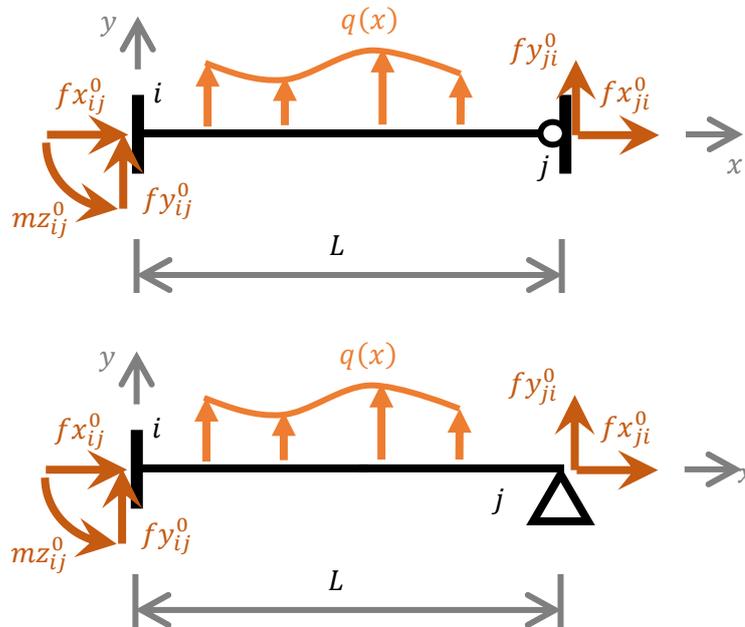


Figure 3-35. Modèles pour poutres articulées à une extrémités.

3.10.5.1 Forces aux nœuds dans le cas de la charge transversale uniformément répartie.

On peut écrire les forces aux nœuds sous une charge en travée uniformément répartie comme suit.

$$\text{Sollicitation Axiale : } \begin{Bmatrix} fx_{ij}^0 \\ fx_{ji}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\text{Flexion simple : } \begin{cases} fy_{ij}^0 \\ mz_{ij}^0 \\ fy_{ji}^0 \\ mz_{ji}^0 \end{cases} = \begin{cases} -5 q L/8 \\ -q L^2/8 \\ -3 q L/8 \\ 0 \end{cases}$$

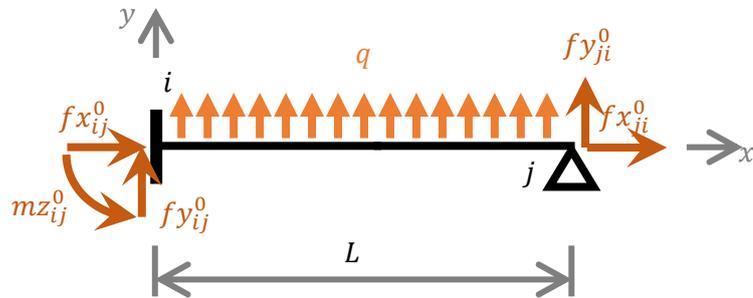


Figure 3-36. Forces aux nœuds. Cas d'une charge répartie

3.10.5.2 Forces aux nœuds dans le cas d'une charge concentrée transversale à mi travée.

On peut écrire les forces aux nœuds sous une charge concentrée à mi travée comme suit.

$$\text{Sollicitation axiale : } \begin{cases} fx_{ij}^0 \\ fx_{ji}^0 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases}$$

$$\text{Flexion simple : } \begin{cases} fy_{ij}^0 \\ mz_{ij}^0 \\ fy_{ji}^0 \\ mz_{ji}^0 \end{cases} = \begin{cases} -11 Q/16 \\ -6 Q L/32 \\ -5 Q/16 \\ 0 \end{cases}$$

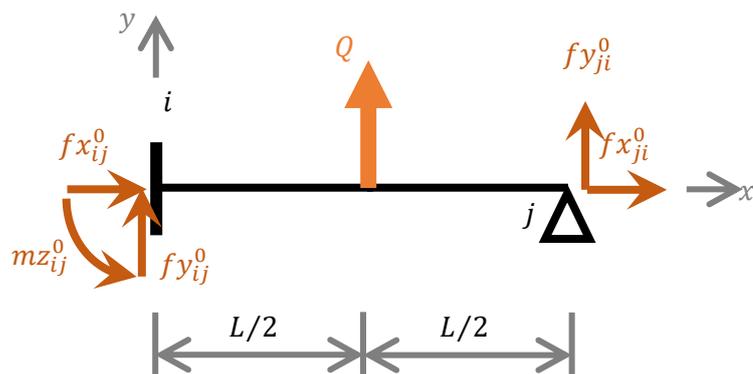


Figure 3-37. Forces aux nœuds. Cas d'une force concentrée à mi travée

3.11 Problématique de l'orientation des poutres

Les forces induites par les déplacements des nœuds et celles dues aux charges en travées sont connues mais pour les poutres isolées.

Dans un portique plan, les poutres présentent différentes orientations et pour écrire les équations d'équilibre de la structure, il faut relier les déplacements des extrémités des poutres isolées aux déplacements des nœuds de la structure. Il faut également projeter les actions des nœuds sur les poutres (ainsi que les forces aux nœuds dues aux charges en travées des poutres isolées) dans le repère de la structure.

C'est l'objectif de cette partie du cours. On commencera par le cas simple des réseaux de poutres orthogonales entre-elles et on présentera ensuite le cas des poutres orientées arbitrairement dans le plan de la structure.

3.11.1 Poutres orthogonales entre-elles.

Les poutres formant les portiques plans constituent généralement un maillage de poutres orthogonales entre-elles. Dans ces cas-là, on ne trouve aucune difficulté à relier les déplacements des extrémités des poutres isolées aux déplacements aux nœuds de la structure. Les rotations sont d'ailleurs les mêmes ($\theta_{z_{ij}} = \theta_{z_i}$). Le changement d'orientation n'affecte que les DDL de translation.

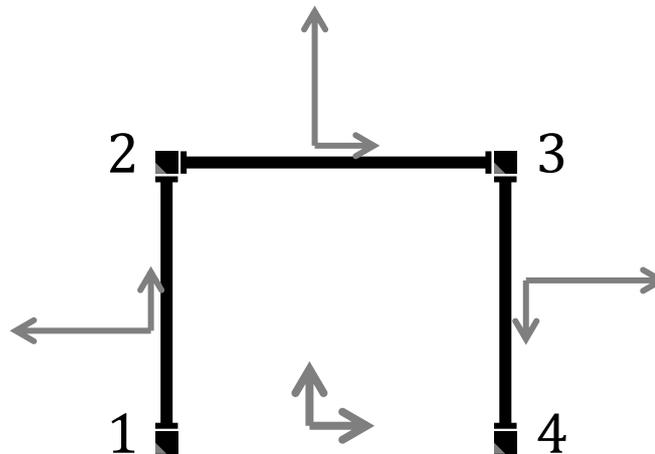


Figure 3-38. Portique à poutres orthogonales entre elles

Pour l'exemple d'illustration montré par la Figure 3-38, il est facile d'établir que pour

- La poutre 12

$$u_{21} = V_2 ; \quad v_{21} = -U_2$$

- La poutre 23

$$u_{23} = U_2 ; \quad v_{23} = V_2 , \quad u_{32} = U_3 ; \quad v_{32} = V_3$$

- La poutre 34

$$u_{34} = -V_3 ; v_{34} = U_3$$

Aussi, les moments ne sont pas affectés par le changement d'orientation ($Mz_{ij} = mz_{ij}$) et les actions des nœuds sur les poutres isolées valent alors :

- La poutre 12 :

$$Fy_{21} = fx_{21} ; Fx_{21} = -fy_{21}$$

- La poutre 23 :

$$Fx_{23} = fx_{23} ; Fy_{23} = fy_{23} ; Fx_{32} = fx_{32} ; Fy_{32} = fy_{32}$$

- Poutre 34 :

$$Fy_{34} = -fx_{34} ; Fx_{34} = fy_{34}$$

Il en est de même pour les forces aux nœuds dus aux charges en travées seules.

3.11.2 Poutres inclinées

Il arrive aussi qu'une poutre ait une orientation quelconque dans le plan XY , définie par l'angle α_{ij} que fait son axe x avec l'axe X de la structure

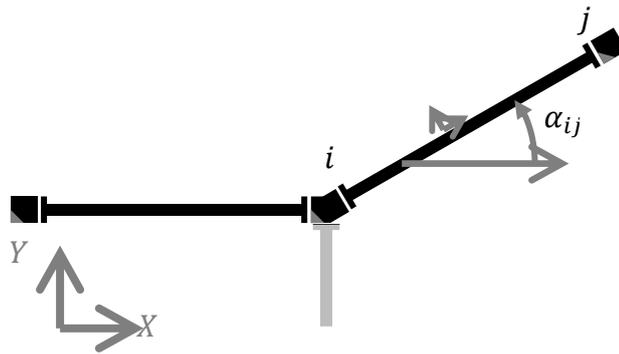


Figure 3-39. Poutre inclinée

Comme précisé précédemment, les rotations ne sont pas affectées par le changement d'orientation dans le plan car elles sont toutes mesurées autour de la normale au plan.

La translation d'un nœud i a deux composantes U_i et V_i . Pour une poutre ij inclinée de α_{ij} , cette translation se décompose en u_{ij} et v_{ij} dans le référentiel de la poutre.

Dans le cadre des petits déplacements, u_{ij} et v_{ij} s'obtiennent en additionnant les projections de U_i et V_i sur l'axe longitudinal de la poutre puis sur son axe transversal, respectivement.

On trouve alors :

$$u_{ij} = U_i \cos(\alpha_{ij}) + V_i \sin(\alpha_{ij})$$

$$v_{ij} = V_i \cos(\alpha_{ij}) - U_i \sin(\alpha_{ij})$$

Sachant que

$$\theta_{z_{ij}} = \theta_{z_i}$$

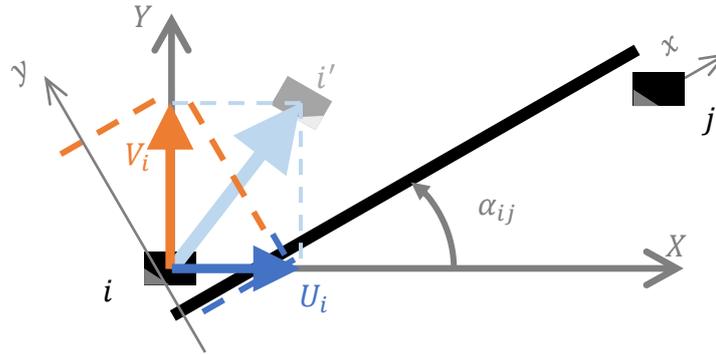


Figure 3-40. Les composantes des translations des nœuds

Les actions des nœuds sur les poutres (comme les forces aux nœuds dues aux charges en travées) sont connues pour les poutres isolées, c'est-à-dire dans le repère de chaque poutre. Les moments ne sont pas affectés par le changement d'orientation et les actions des nœuds sur les poutres isolées valent :

$$F_{x_{ij}} = f_{x_{ij}} \cos(\alpha_{ij}) - f_{y_{ij}} \sin(\alpha_{ij})$$

$$F_{y_{ij}} = f_{y_{ij}} \cos(\alpha_{ij}) + f_{x_{ij}} \sin(\alpha_{ij})$$

Avec :

$$M_{z_{ij}} = m_{z_{ij}}$$

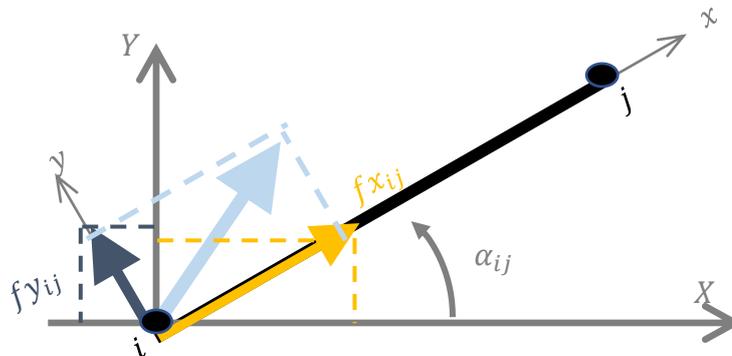


Figure 3-41. Les actions des nœuds sur les poutres isolées

L'hypothèse d'indéformabilité axiale des poutres permet d'écrire pour chaque poutre (*ij*):

$$u_{ij} - u_{ji} = 0$$

En projetant des translations des nœuds *i* et *j* sur l'axe de la poutre inclinée de α_{ij} , cette condition devient :

$$(U_i - U_j) \cos(\alpha_{ij}) + (V_i - V_j) \sin(\alpha_{ij}) = 0$$

On retrouve le cas des maillages de poutres orthogonales entre-elles :

Pour $\alpha_{ij} = \pm\pi$, on a: $U_i = \pm U_j$

Pour $\alpha_{ij} = \pi/2 \pm \pi$, on a: $V_i = \pm V_j$

Le cas d'une inclinaison quelconque est maintenant abordé.

Lorsque la structure comporte des poutres inclinées arbitrairement, il peut se poser un problème de **choix** des DDL de translation à « **retenir** ».

L'écriture de la condition d'indéformabilité axiale d'une poutre en fonction des DDL de translation de ses nœuds i et j donne :

$$(U_i - U_j) \cos(\alpha_{ij}) + (V_i - V_j) \sin(\alpha_{ij}) = 0$$

Soit une équation où interviennent 4 DDL. Nous pouvons l'utiliser pour exprimer l'un d'eux en fonction des 3 autres et le réduire du système à résoudre. Nous avons autant d'équations de ce type que de poutres.

En somme, le système final à résoudre sera réduit de **NP** degrés de liberté de translation. Mais la question est, lesquels ?

En règle générale et pour tenir compte de l'interconnexion des poutres, il faudra poser les **NP** équations et les exploiter simultanément pour arriver à réduire les DDL de translation non déterminants.

En général, les choix sont faciles, ou imposés, pour certains nœuds. On commencera par là et, de proche en proche, on arrive à prendre les décisions pour arriver à **choisir** les translations à retenir.

Remarque. Le cas limite est celui où il y a tellement d'équations qu'aucune translation n'est possible. Comme chaque nœud n'a que 2 translations, si $NP \geq 2 \times NN$ alors aucune translation n'est possible. En tenant compte en plus du nombre de translations bloquées aux appuis **NTA**, la condition devient plus contraignante, ainsi :

Si $NP \geq 2 \times NN - NTA$ alors, les nœuds de la structure ne peuvent subir que des rotations.

3.12 Applications.

3.12.1 Exemple 1

Comme première application (Figure 3-42), nous allons terminer l'exemple illustratif, on précise quelques données : Les poutres ont la même longueur L et la même raideur EI . La charge Q est appliquée à mi travée et q est uniformément distribuée.

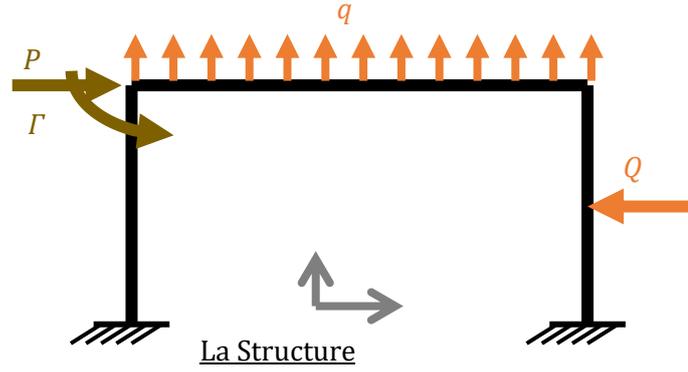


Figure 3-42. structure de l'application

En utilisant la MDC, on est arrivé à définir les 3 DDL inconnus θ_{z_2} , θ_{z_3} et U_2 et à écrire le système des 3 équations d'équilibre qui permettent de les obtenir :

$$\begin{cases} Mz_{21} + Mz_{23} = \Gamma - Mz_{23}^0 \\ Mz_{32} + Mz_{34} = 0 - Mz_{32}^0 - Mz_{34}^0 \\ Fx_{21} + Fx_{34} = P - Fx_{23}^0 - Fx_{32}^0 - Fx_{34}^0 \end{cases}$$

En tenant compte des orientations des poutres, on écrit les correspondances entre les efforts intervenant dans les équations à résoudre et les forces des poutres isolées :

$$Mz_{ij} = mz_{ij} \quad ; \quad Mz_{ij}^0 = mz_{ij}^0$$

$$Fx_{21} = -fy_{21}; \quad Fx_{34} = fy_{34};$$

$$Fx_{23}^0 = fx_{23}^0 \quad ; \quad Fx_{32}^0 = fx_{32}^0 \quad ; \quad Fx_{34}^0 = fy_{34}^0$$

En revenant aux expressions établies pour une poutre isolée, on écrit les expressions des efforts induits par les déplacements qui interviennent dans les équations d'équilibre :

$$mz_{21} = +\frac{2EI_z}{L}(\theta_{z_{12}} + 2\theta_{z_{21}}) + \frac{6EI_z}{L^2}(v_{12} - v_{21});$$

$$mz_{23} = +\frac{2EI_z}{L}(2\theta_{z_{23}} + \theta_{z_{32}}) + \frac{6EI_z}{L^2}(v_{23} - v_{32});$$

$$mz_{32} = +\frac{2EI_z}{L}(\theta_{z_{23}} + 2\theta_{z_{32}}) + \frac{6EI_z}{L^2}(v_{23} - v_{32});$$

$$mz_{34} = +\frac{2EI_z}{L}(2\theta_{z_{34}} + \theta_{z_{43}}) + \frac{6EI_z}{L^2}(v_{34} - v_{43});$$

$$fy_{21} = -\frac{6EI_z}{L^2}(\theta_{z_{12}} + \theta_{z_{21}}) - \frac{12EI_z}{L^3}(v_{12} - v_{21});$$

$$fy_{34} = +\frac{6EI_z}{L^2}(\theta_{z_{34}} + \theta_{z_{43}}) + \frac{12EI_z}{L^3}(v_{34} - v_{43});$$

En tenant compte des conditions aux limites et des orientations des poutres, les équations ci-avant s'écrivent en fonction des DDL inconnus comme suit :

$$Mz_{21} = mz_{21} = +\frac{2EI_z}{L}(2\theta_{z_2}) + \frac{6EI_z}{L^2}(U_2)$$

$$Mz_{23} = mz_{23} = +\frac{2EI_z}{L}(2\theta_{z_2} + \theta_{z_3})$$

$$Mz_{32} = mz_{32} = + \frac{2 E I_z}{L} (\theta_{z_2} + 2 \theta_{z_3})$$

$$Mz_{34} = mz_{34} = + \frac{2 E I_z}{L} (2 \theta_{z_3}) + \frac{6 E I_z}{L^2} (U_2)$$

$$Fx_{21} = -fy_{21} = + \frac{6 E I_z}{L^2} (\theta_{z_2}) + \frac{12 E I_z}{L^3} (U_2)$$

$$Fx_{34} = fy_{34} = + \frac{6 E I_z}{L^2} (\theta_{z_3}) + \frac{12 E I_z}{L^3} (U_2)$$

En revenant aux expressions établies pour une poutre isolée, on écrit les expressions des efforts dus aux charges en travées qui interviennent dans les équations d'équilibre :

$$Mz_{23}^0 = mz_{23}^0 = -q L^2 / 12$$

$$Mz_{32}^0 = mz_{32}^0 = +q L^2 / 12$$

$$Mz_{34}^0 = mz_{34}^0 = -(-Q) L / 8$$

$$Fx_{23}^0 = fx_{23}^0 = 0$$

$$Fx_{32}^0 = fx_{32}^0 = 0$$

$$Fx_{34}^0 = fy_{34}^0 = -(-Q) / 2$$

En remplaçant, on arrive au système suivant :

$$\begin{cases} + \frac{2 E I_z}{L} (4 \theta_{z_2} + \theta_{z_3}) + \frac{6 E I_z}{L^2} U_2 = \Gamma + q L^2 / 12 \\ + \frac{2 E I_z}{L} (\theta_{z_2} + 4 \theta_{z_3}) + \frac{6 E I_z}{L^2} U_2 = 0 - q L^2 / 12 - QL / 8 \\ + \frac{6 E I_z}{L^2} (\theta_{z_2} + \theta_{z_3}) + \frac{24 E I_z}{L^3} U_2 = P - 0 - 0 - Q / 2 \end{cases}$$

Dont la solution est

$$\begin{pmatrix} \theta_{z_2} \\ \theta_{z_3} \\ U_2 \end{pmatrix} = \frac{L}{84 E I_z} \begin{bmatrix} 13 & -1 & -3 L \\ -1 & 13 & -3 L \\ -3 L & -3 L & 5 L^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma + q L^2 / 12 \\ -q L^2 / 12 - QL / 8 \\ P - Q / 2 \end{pmatrix}$$

En se rappelant que : $U_3 = U_2$; $V_2 = V_3 = 0$; $U_1 = V_1 = U_4 = V_4 = 0$; $\theta_{z_1} = \theta_{z_4} = 0$ on a donc tous les déplacements des nœuds de la structure.

Les déplacements aux extrémités d'une poutre sont déduits des DDL de ses nœuds (fonction de l'orientation de la poutre). Quant aux efforts, on commence par calculer les efforts dus à la flexion. Les efforts axiaux se déduisent à partir de l'équilibre des nœuds.

Flexion simple :

$$\begin{pmatrix} fy_{ij}^t \\ mz_{ij}^t \\ fy_{ji}^t \\ mz_{ji}^t \end{pmatrix} = \frac{E I_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6 L & -12 & 6 L \\ 6 L & 4 L^2 & -6 L & 2 L^2 \\ -12 & -6 L & 12 & -6 L \\ 6 L & 2 L^2 & -6 L & 4 L^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_{ij} \\ \theta_{z_{ij}} \\ v_{ji} \\ \theta_{z_{ji}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} fy_{ij}^0 \\ mz_{ij}^0 \\ fy_{ji}^0 \\ mz_{ji}^0 \end{pmatrix}$$

Vu l'orientation de la poutre 12, on a : $\begin{Bmatrix} v_{12} \\ \theta_{z_{12}} \\ v_{21} \\ \theta_{z_{21}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -U_2 \\ \theta_{z_2} \end{Bmatrix}$, d'où

$$\begin{Bmatrix} fy_{12}^t \\ mz_{12}^t \\ fy_{21}^t \\ mz_{21}^t \end{Bmatrix} = \frac{1}{42} \begin{Bmatrix} \frac{21}{L}\Gamma + 21P + \frac{7L}{2}q - \frac{63}{8}Q \\ 4\Gamma + 12LP + \frac{7L^2}{6}q - \frac{19L}{4}Q \\ -\frac{21}{L}\Gamma - 21P - \frac{7L}{2}q + \frac{63}{8}Q \\ 17\Gamma + 9LP + \frac{7L^2}{3}q - \frac{25L}{8}Q \end{Bmatrix}$$

Vu l'orientation de la poutre 23, on a : $\begin{Bmatrix} v_{23} \\ \theta_{z_{23}} \\ v_{32} \\ \theta_{z_{32}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \theta_{z_3} \\ 0 \\ \theta_{z_3} \end{Bmatrix}$, d'où

$$\begin{Bmatrix} fy_{23}^t \\ mz_{23}^t \\ fy_{32}^t \\ mz_{32}^t \end{Bmatrix} = \frac{1}{42} \begin{Bmatrix} \frac{36}{L}\Gamma - 18P - 21Lq + \frac{9}{2}Q \\ 25\Gamma - 9LP - \frac{7L^2}{3}q + \frac{25L}{8}Q \\ -\frac{36}{L}\Gamma + 18P - 21Lq - \frac{9}{2}Q \\ 11\Gamma - 9LP + \frac{7L^2}{3}q + \frac{11L}{8}Q \end{Bmatrix}$$

Vu l'orientation de la poutre 34, on a : $\begin{Bmatrix} v_{34} \\ \theta_{z_{34}} \\ v_{43} \\ \theta_{z_{43}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_2 \\ \theta_{z_3} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$, d'où

$$\begin{Bmatrix} fy_{34}^t \\ mz_{34}^t \\ fy_{43}^t \\ mz_{43}^t \end{Bmatrix} = \frac{1}{42} \begin{Bmatrix} -\frac{21}{L}\Gamma + 21P - \frac{7L}{2}q + \frac{63}{8}Q \\ -11\Gamma + 9LP - \frac{7L^2}{3}q - \frac{11L}{8}Q \\ \frac{21}{L}\Gamma - 21P + \frac{7L}{2}q + \frac{273}{8}Q \\ -10\Gamma + 12LP - \frac{7L^2}{6}q - \frac{47L}{4}Q \end{Bmatrix}$$

Les efforts axiaux se déduisent à partir des équations d'équilibre des nœuds de la structure suivant les DDL de translation. Vu que les poutres sont orthogonales entre-elles, qu'aucune poutre n'est chargée selon son axe, et qu'il n'y a pas plus de 2 poutres connectées à un nœud, il est aisé de déduire que :

$$fx_{21}^t = -fy_{23}^t$$

$$fx_{23}^t = P + fy_{21}^t$$

$$fx_{32}^t = -fy_{34}^t$$

$$fx_{34}^t = fy_{32}^t$$

Tous les efforts appliqués aux nœuds sont maintenant connus sauf, les réactions selon les DDL bloqués (ou imposés). Elles se déduisent en écrivant l'équilibre des nœuds selon ces DDL. On trouve aisément :

$$R_{X1} = -fy_{12}^t$$

$$R_{Y1} = fx_{12}^t$$

$$R_{\theta 1} = mz_{12}^t$$

$$R_{X4} = fy_{43}^t$$

$$R_{Y4} = -fx_{43}^t$$

$$R_{\theta 4} = mz_{43}^t$$

Avec les résultats ci-avant, toutes les poutres sont statiquement déterminées. On peut calculer tous les paramètres (efforts internes, déplacements, contraintes, ...) en n'importe quelle section Σ d'abscisse x le long de leurs longueurs.

À titre d'exemples, on va calculer le moment fléchissant et l'effort tranchant à mi travée de la poutre (23) et à $x = 3L/4$ de la poutre (34).

Le moment à mi travée de la poutre (23) vaut:

$$M\left(\frac{L}{2}\right) = fy_{23}^t \frac{L}{2} - mz_{23}^t + \frac{L^2}{8}q$$

$$M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{42} \left(-7 \times \Gamma + 0 \times P - \frac{35L^2}{12}q - \frac{7L}{8}Q \right)$$

L'effort tranchant est égal à:

$$V\left(\frac{L}{2}\right) = -fy_{23}^t - \frac{L}{2}q$$

$$V\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{42} \left(-\frac{36}{L}\Gamma + 18P + 0q - \frac{9}{2}Q \right)$$

Le moment fléchissant à $x = 3L/4$ de la poutre (34) vaut :

$$M\left(\frac{3L}{4}\right) = fy_{34}^t \frac{3L}{4} - \frac{L}{4}Q$$

$$M\left(\frac{3L}{4}\right) = \frac{1}{42} \left(-\frac{63}{4}\Gamma + \frac{63L}{4}P - \frac{21L^2}{8}q - \frac{147L}{32}Q \right)$$

L'effort tranchant est égal à :

$$V\left(\frac{3L}{4}\right) = -fy_{34}^t + Q$$

$$V\left(\frac{3L}{4}\right) = \frac{1}{42} \left(\frac{21}{L}\Gamma - 21P + \frac{7L}{2}q + \frac{273}{8}Q \right)$$

Pour tracer les diagrammes des efforts internes, on effectue les calculs en prenant :

$$L = 2m; q = 10 \text{ kN/m}; Q = 10 \text{ kN}; P = 10 \text{ kN}; \Gamma = 10 \text{ kN.m}$$

Les diagrammes sont donnés pour chaque charge, puis pour la combinaison. Les unités sont le kN et le m

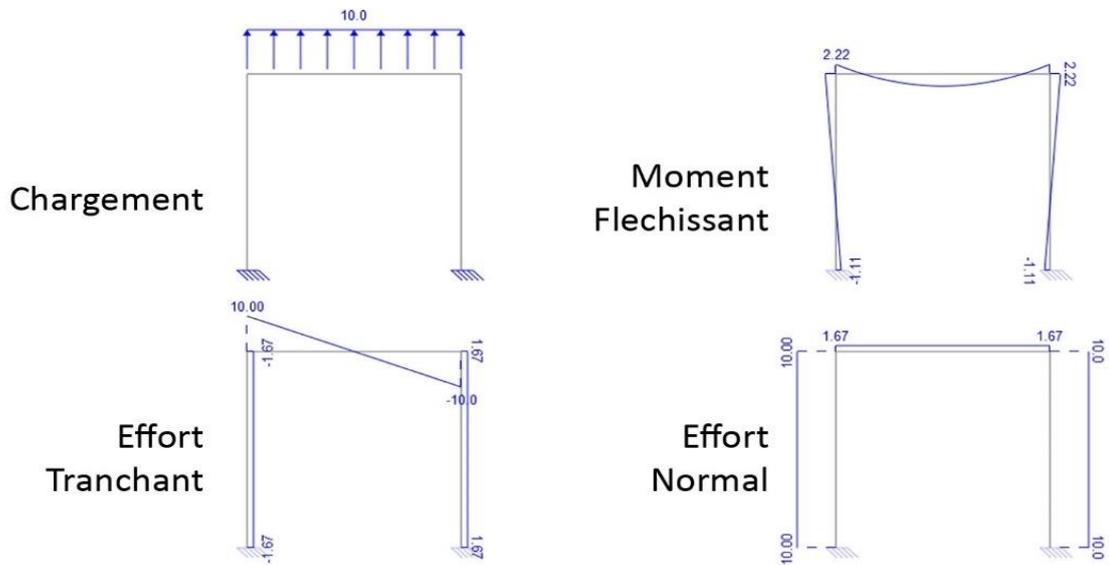


Figure 3-43. Chargement et diagrammes des efforts internes pour $q = 10 \text{ kN/m}$

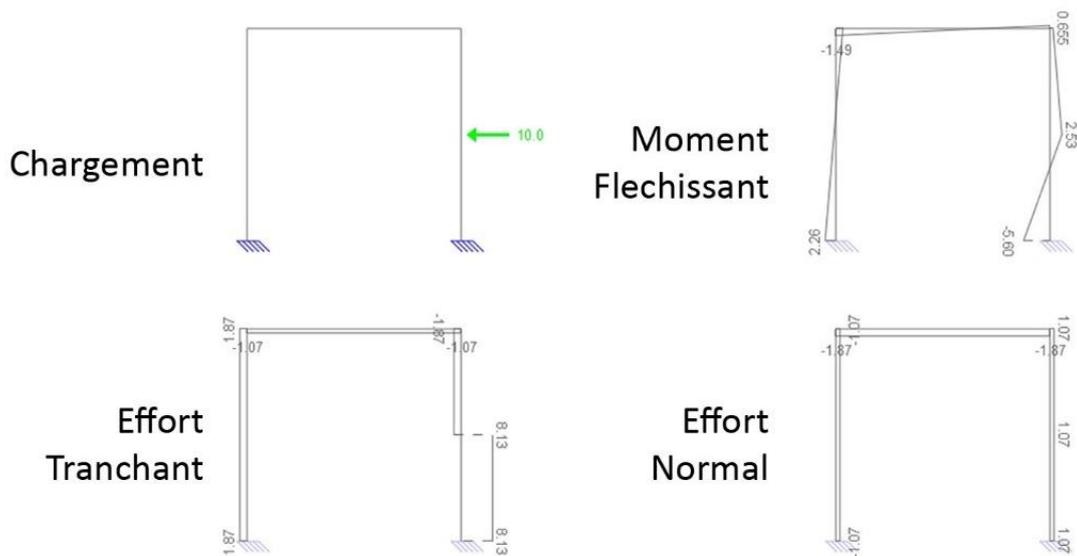


Figure 3-44. Chargement et diagrammes des efforts internes pour $Q = 10 \text{ kN}$

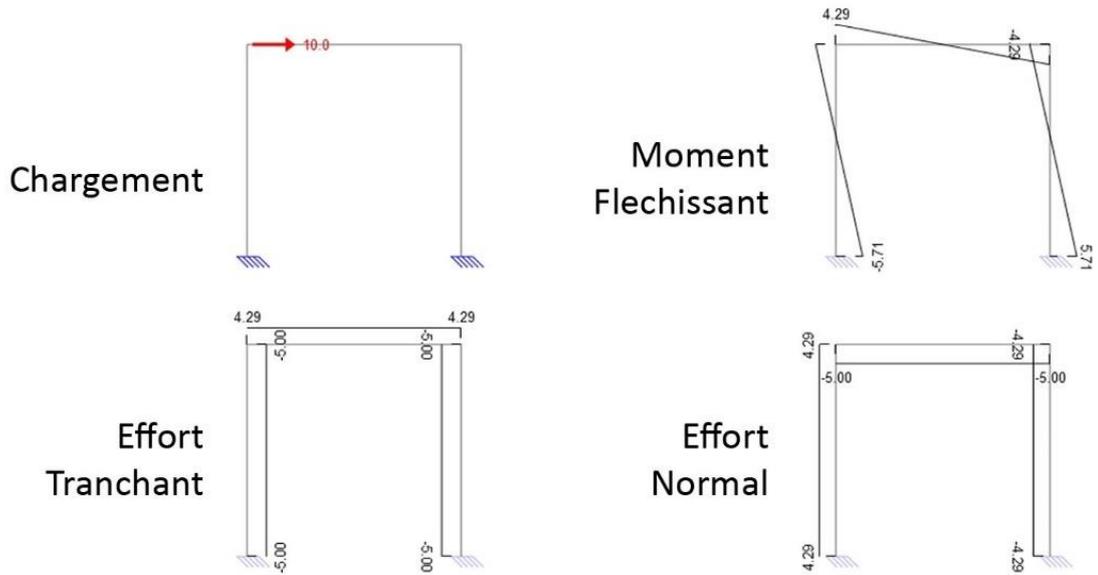


Figure 3-45. Chargement et diagrammes des efforts internes pour $P = 10\text{ kN}$

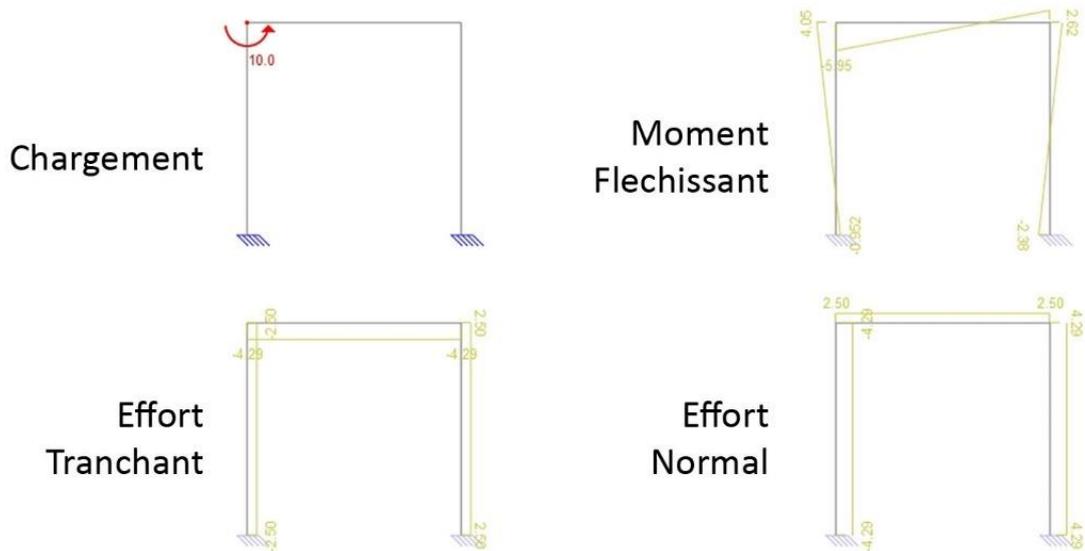


Figure 3-46. Chargement et diagrammes des efforts internes pour $\Gamma = 10\text{ kN.m}$

La superposition des différents diagrammes permet d'obtenir les diagrammes des efforts internes de la structure.

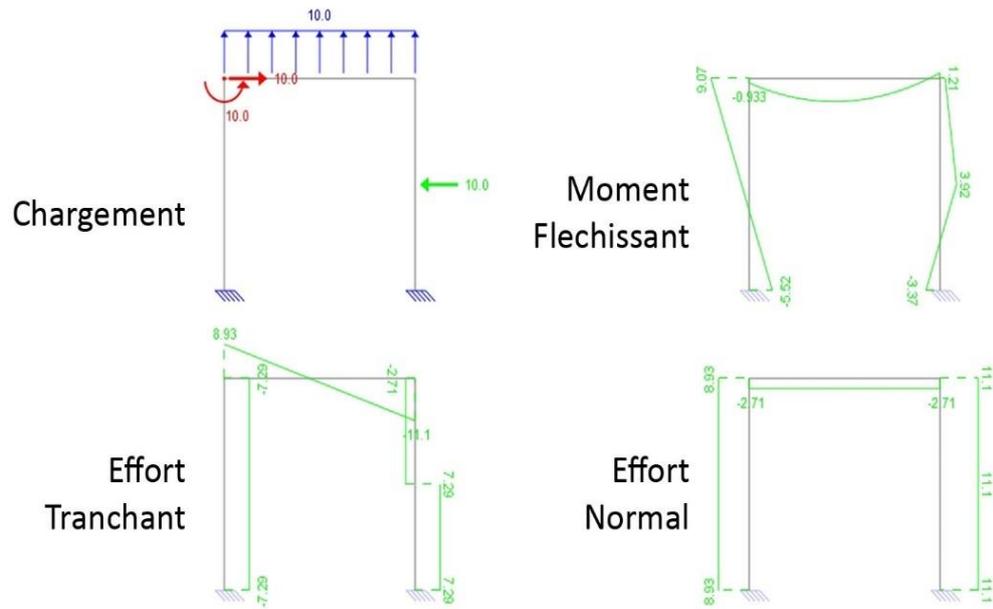


Figure 3-47. Les diagrammes des efforts internes

3.12.2 Exemple 2

Comme deuxième application, nous avons choisi la structure montrée par la Figure 3-48.

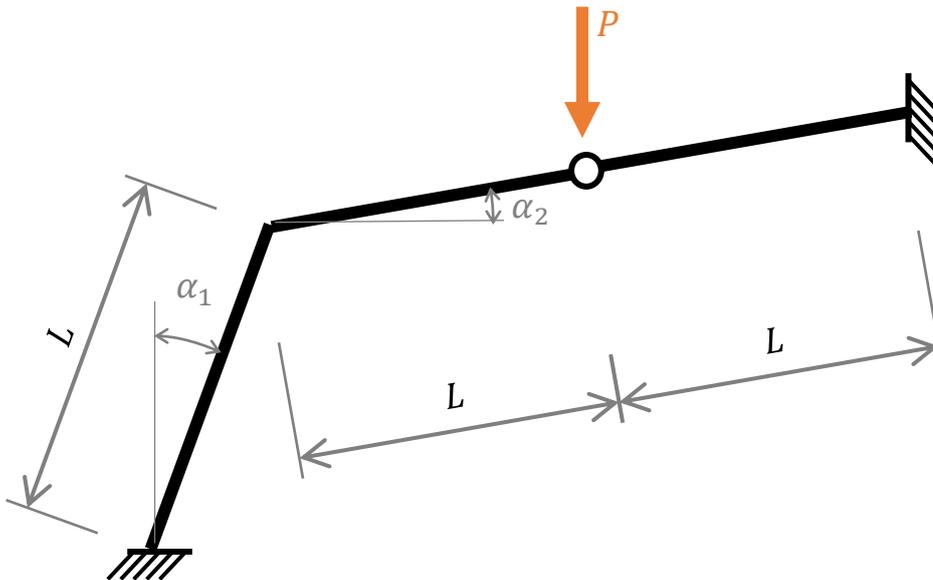


Figure 3-48. Structure et chargement de l'exemple 2

Les nœuds de la structure sont numérotés, et les poutres sont orientées tel que le montre

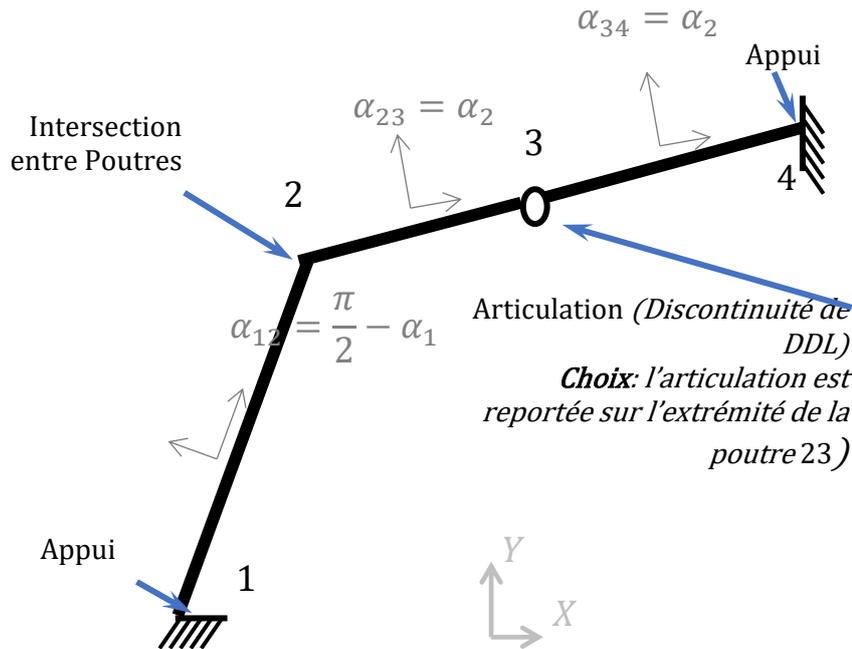


Figure 3-49. Nœuds et orientations des poutres

Le nombre de nœuds de la structure : $NN = 4$

Le nombre de poutres de la structure : $NP = 3$

La structure est plane et se déforme dans son plan (les DDL d'un nœud i sont donc U_i , V_i et θz_i)

- Le nombre de DDL/nœuds : $NDN = 3$
- Le nombre de translations/nœuds : $NTN = 2$

Les liaisons de la structure

- Le nombre de DDL bloqués : $NDA = 6$
- Les translations bloquées : $U_1 = V_1 = U_4 = V_4 = 0$; soit $NTA = 4$
- Les rotations bloquées : $\theta z_1 = \theta z_4 = 0$

Pour la résolution de ce système, nous allons utiliser la MD_C

- Le nombre total d'inconnues : $NDL = NN \times NDN - NDA - NP = 3$
- Le nombre de translations inconnues : $NTL = NN \times NTN - NTA - NP = 1$
- On a donc deux rotations inconnues θz_2 et θz_3 et une translation, laquelle ?

Les conditions d'indéformabilité axiale des 3 poutres s'écrivent :

$$\begin{cases} u_{12} - u_{21} = 0 \\ u_{23} - u_{32} = 0 \\ u_{34} - u_{43} = 0 \end{cases}$$

En les exprimant en fonction des translations des nœuds et en exploitant les conditions d'appuis, on arrive à

$$\begin{cases} (0 - U_2) \sin(\alpha_1) + (0 - V_2) \cos(\alpha_1) = 0 \\ (U_2 - U_3) \cos(\alpha_2) + (V_2 - V_3) \sin(\alpha_2) = 0 \\ (U_3 - 0) \cos(\alpha_2) + (V_3 - 0) \sin(\alpha_2) = 0 \end{cases}$$

On a un système de 3 équations où interviennent 4 translations ; ces translations ne sont donc pas indépendantes : on peut en exprimer 3 en fonction de la 4ème.

Pour donner une approche générale, on réécrit ces équations sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} \sin(\alpha_1) & \cos(\alpha_1) & 0 & 0 \\ \cos(\alpha_2) & \sin(\alpha_2) & -\cos(\alpha_2) & -\sin(\alpha_2) \\ 0 & 0 & \cos(\alpha_2) & \sin(\alpha_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Pour trouver une/la translation « déterminante » qui permet de définir les 3 autres, il faut trouver le/un sous déterminant non nul en éliminant une colonne à la fois. Ainsi, on peut retenir le 4ème DDL (ou le 3ème), soit V_3 . D'où

$$\begin{cases} U_2 = 0 \\ V_2 = 0 \\ U_3 = -\operatorname{tg}(\alpha_2) V_3 \end{cases}$$

La translation retenue est donc V_3 .

La cinématique de la structure, illustrée par la Figure 3-50, permet de bien visualiser les 3 DDL θ_{z_2} , θ_{z_3} et V_3

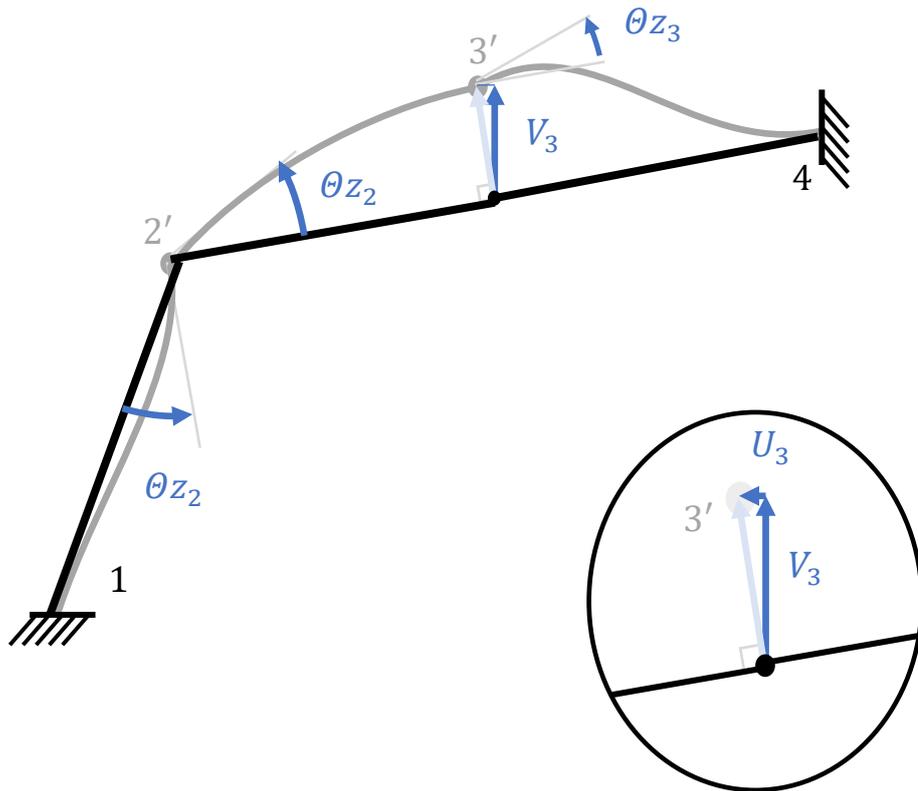


Figure 3-50. La cinématique de structure

Pour écrire l'équilibre, il faut pratiquer des coupures afin d'isoler les nœuds des poutres. Comme il n'y a pas de charges en travées, les deux étapes de l'équilibre (Parties I et II) se réduisent à une seule. Les équations d'équilibre des nœuds sous les moments induits par les rotations sont faciles à écrire :

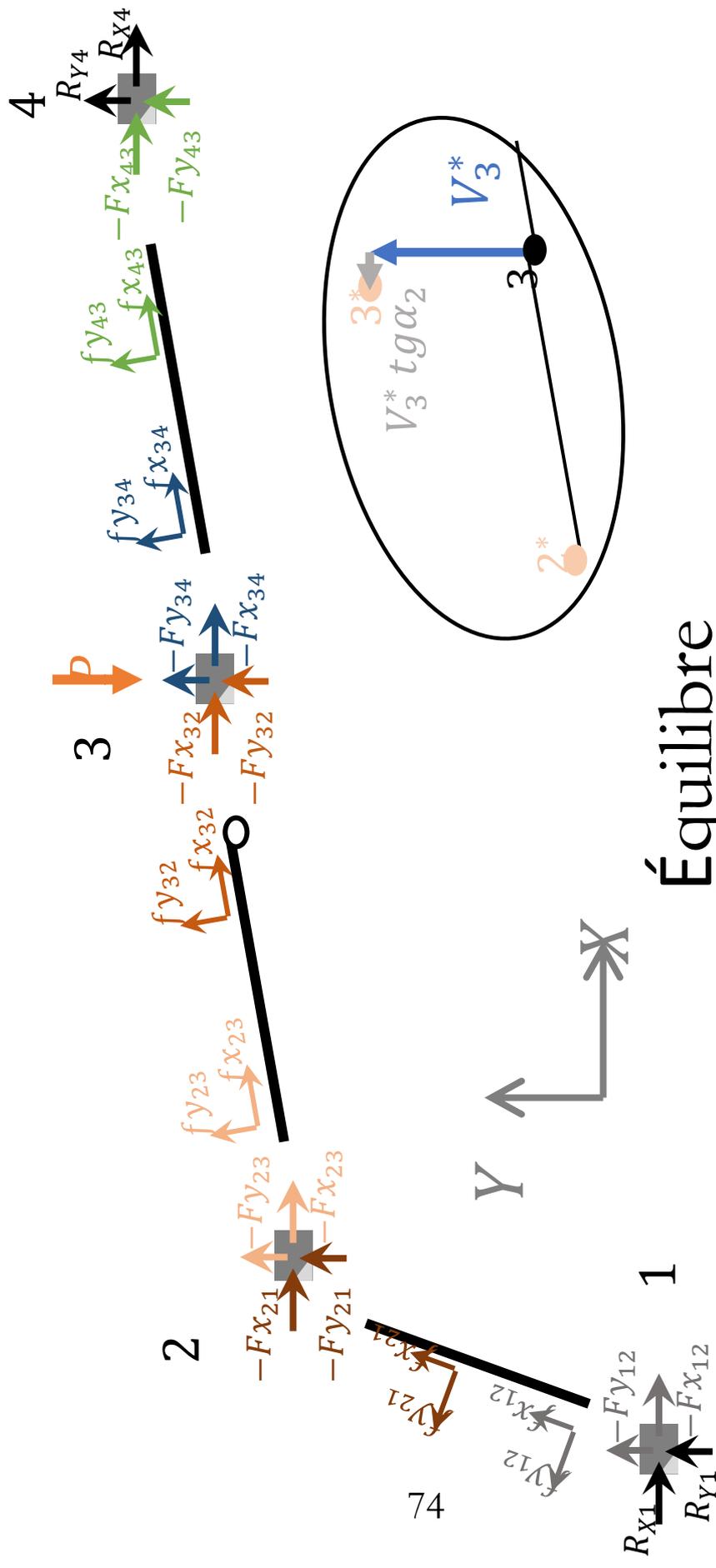
Au nœud 2

$$Mz_{21} + Mz_{23} = 0$$

Au nœud 3

$$Mz_{32} + Mz_{34} = 0$$

Pour écrire l'équilibre selon le DDL de translation, on utilise le PTV. Un déplacement virtuel quelconque V_3^* est pris dans la direction du DDL retenu V_3 . Il induit une composante $(-tg\alpha_2 V_3^*)$ dans la direction de U_3 et aucune translation du nœud 2 (déformation virtuelle cinématiquement admissible).



Équilibre

Forces et cinématique virtuelle

La somme des travaux virtuels sous la déformée virtuelle doit être nulle, alors

$$+Fx_{32} \operatorname{tg}\alpha_2 V_3^* + Fx_{34} \operatorname{tg}\alpha_2 V_3^* - Fy_{32} V_3^* - Fy_{34} V_3^* - P V_3^* = 0$$

En utilisant les relations entre les forces aux nœuds et les forces aux extrémités des poutres, on

a :

$$[+ (fx_{32} \operatorname{cosa}_2 - fy_{32} \operatorname{sina}_2) \operatorname{tg}\alpha_2 V_3^* + (fx_{34} \operatorname{cosa}_2 - fy_{34} \operatorname{sina}_2) \operatorname{tg}\alpha_2 V_3^* - (fy_{32} \operatorname{cosa}_2 + fx_{32} \operatorname{sina}_2) V_3^* - (fy_{34} \operatorname{cosa}_2 + fx_{34} \operatorname{sina}_2) V_3^* - P V_3^*] = 0$$

Les travaux virtuels des forces axiales sont négligés. Il s'ensuit :

$$\left(-fy_{32} \frac{1}{\operatorname{cosa}_2} - fy_{34} \frac{1}{\operatorname{cosa}_2} - P\right) V_3^* = 0$$

Ce travail virtuel devant être nul ($\forall V_3^*$), on obtient alors la 3^{ème} équation d'équilibre dans la direction de V_3 . Le système d'équation à résoudre est donc :

$$\begin{cases} mz_{21} + mz_{23} = 0 \\ mz_{32} + mz_{34} = 0 \\ fy_{32} + fy_{34} = -P \operatorname{cosa}_2 \end{cases}$$

On utilise maintenant les expressions « connues » pour les poutres isolées ; la poutre 23 est articulée en son extrémité 3.

$$mz_{21} = \frac{EI_z}{L} (2 \theta_{z12} + 4 \theta_{z21}) + \frac{6EI_z}{L^2} (v_{12} - v_{21})$$

$$mz_{23} = \frac{EI_z}{L} (3 \theta_{z23}) + \frac{3EI_z}{L^2} (v_{23} - v_{32})$$

$$mz_{32} = 0$$

$$mz_{34} = \frac{EI_z}{L} (4 \theta_{z34} + 2 \theta_{z43}) + \frac{6EI_z}{L^2} (v_{34} - v_{43})$$

$$fy_{32} = \frac{EI_z}{L^2} (-3 \theta_{z23}) + \frac{3EI_z}{L^3} (v_{32} - v_{23})$$

$$fy_{34} = \frac{6EI_z}{L^2} (\theta_{z34} + \theta_{z43}) + \frac{12EI_z}{L^3} (v_{34} - v_{43})$$

En exploitant aussi les CL (DDL en gras dans les équations ci avant), les équations d'équilibre deviennent :

$$\begin{cases} \frac{7EI_z}{L} \theta_{z21} - \frac{6EI_z}{L^2} v_{21} + \frac{3EI_z}{L^2} v_{23} - \frac{3EI_z}{L^2} v_{32} = 0 \\ \frac{4EI_z}{L} \theta_{z34} + \frac{6EI_z}{L^2} v_{34} = 0 \\ -\frac{3EI_z}{L^2} \theta_{z23} + \frac{6EI_z}{L^2} \theta_{z34} + \frac{3EI_z}{L^3} v_{32} - \frac{3EI_z}{L^3} v_{23} + \frac{12EI_z}{L^3} v_{34} = -P \operatorname{cosa}_2 \end{cases}$$

Or, les translations des extrémités des poutres sont reliées aux translations des nœuds par

$$u_{ij} = U_i \operatorname{cosa}_{ij} + V_i \operatorname{sina}_{ij} ; v_{ij} = V_i \operatorname{cosa}_{ij} - U_i \operatorname{sina}_{ij}$$

Et les rotations des extrémités des poutres sont les rotations des nœuds.

Ainsi,

$$v_{21} = V_2 \sin\alpha_1 - U_2 \cos\alpha_1$$

$$v_{23} = V_2 \cos\alpha_2 - U_2 \sin\alpha_2$$

$$v_{32} = V_3 \cos\alpha_2 - U_3 \sin\alpha_2$$

$$v_{34} = V_3 \cos\alpha_2 - U_3 \sin\alpha_2$$

Or, d'après la cinématique on a

$$U_2 = 0 ; V_2 = 0 \text{ et } U_3 = -V_3 \operatorname{tg}\alpha_2$$

Donc :

$$v_{21} = v_{23} = 0 \text{ et } v_{32} = v_{34} = V_3 / \cos\alpha_2$$

Le système à résoudre est :

$$\begin{cases} \frac{7EI_z}{L} \theta_{z_2} - \frac{3EI_z}{L^2} \frac{V_3}{\cos\alpha_2} = 0 \\ \frac{4EI_z}{L} \theta_{z_3} + \frac{6EI_z}{L^2} \frac{V_3}{\cos\alpha_2} = 0 \\ -\frac{3EI_z}{L^2} \theta_{z_2} + \frac{6EI_z}{L^2} \theta_{z_3} + \frac{15EI_z}{L^3} \frac{V_3}{\cos\alpha_2} = -P \cos\alpha_2 \end{cases}$$

La solution est :

$$\begin{cases} V_3 = -\frac{7L^3}{33EI_z} P \cos^2\alpha_2 \\ \theta_{z_2} = -\frac{L^2}{11EI_z} P \cos\alpha_2 \\ \theta_{z_3} = +\frac{7L^2}{22EI_z} P \cos\alpha_2 \end{cases}$$

Les déplacements aux extrémités d'une poutre sont déduits des DDL de ses nœuds (fonction de l'orientation de la poutre). Quant aux efforts, on commence par calculer les efforts dus à la flexion. Les efforts axiaux se déduisent à partir de l'équilibre des nœuds.

Vu l'orientation de la poutre 12, on a :

$$u_{12} = 0 ; v_{12} = 0 ; \theta_{z_{12}} = 0 ;$$

$$u_{21} = 0 ; v_{21} = 0 ; \theta_{z_{21}} = \theta_{z_2} ;$$

D'où :

$$\begin{pmatrix} fy_{12}^t \\ mz_{12}^t \\ fy_{21}^t \\ mz_{21}^t \end{pmatrix} = \frac{EI_z}{L^2} \begin{pmatrix} 6 \\ 2L \\ -6 \\ 4L \end{pmatrix} \theta_{z_2} = \begin{pmatrix} -6 \\ -2L \\ 6 \\ -4L \end{pmatrix} \frac{P \cos\alpha_2}{11}$$

Vu l'orientation de la poutre 23, on a :

$$u_{23} = 0 ; v_{23} = 0 ; \theta_{z_{23}} = \theta_{z_2} ;$$

$$u_{32} = 0 ; v_{32} = V_3 / \cos\alpha_2 ; \theta_{z_{32}} ;$$

D'où :

$$\begin{pmatrix} fy_{23}^t \\ mz_{23}^t \\ fy_{32}^t \\ mz_{32}^t \end{pmatrix} = \frac{EI_z}{L^2} \begin{pmatrix} 3 \\ 3L \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \theta_{z_2} + \frac{EI_z}{L^3} \begin{pmatrix} -3 \\ -3L \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{V_3}{\cos\alpha_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ L \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{4P \cos\alpha_2}{11}$$

Vu l'orientation de la poutre 34, on a :

$$u_{34} = 0; v_{34} = V_3 / \cos\alpha_2; \theta_{z_{34}} = \theta_{z_3};$$

$$u_{43} = 0; v_{43} = 0; \theta_{z_{43}} = 0;$$

D'où :

$$\begin{pmatrix} fy_{34}^t \\ mz_{34}^t \\ fy_{43}^t \\ mz_{43}^t \end{pmatrix} = \frac{EI_z}{L^3} \begin{pmatrix} 12 \\ 6L \\ -12 \\ 6L \end{pmatrix} \frac{V_3}{\cos\alpha_2} + \frac{EI_z}{L^2} \begin{pmatrix} 6 \\ 4L \\ -6 \\ 2L \end{pmatrix} \theta_{z_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -L \end{pmatrix} \frac{7P \cos\alpha_2}{11}$$

Les efforts axiaux se déduisent à partir des équations d'équilibre des nœuds de la structure suivant les DDL translation :

Au nœud 2

$$Fx_{21} + Fx_{23} = 0$$

$$Fy_{21} + Fy_{23} = 0$$

Au nœud 3

$$Fx_{32} + Fx_{34} = 0$$

$$Fy_{32} + Fy_{34} + P = 0$$

En utilisant les relations « forces locales » - « forces globales » et en rassemblant les inconnues à gauche, ces équations deviennent :

Au nœud 2

$$fx_{21}^t \sin\alpha_1 + fx_{23}^t \cos\alpha_2 = fy_{21}^t \cos\alpha_1 + fy_{23}^t \sin\alpha_2$$

$$fx_{21}^t \cos\alpha_1 + fx_{23}^t \sin\alpha_2 = -fy_{21}^t \sin\alpha_1 - fy_{23}^t \cos\alpha_2$$

Au nœud 3

$$fx_{32}^t \cos\alpha_2 + fx_{34}^t \cos\alpha_2 = fy_{32}^t \sin\alpha_2 + fy_{34}^t \sin\alpha_2$$

$$fx_{32}^t \sin\alpha_2 + fx_{34}^t \sin\alpha_2 = -fy_{32}^t \cos\alpha_2 - fy_{34}^t \cos\alpha_2 - P$$

Les 2 équations relatives au nœud 2 donnent :

$$\begin{Bmatrix} fx_{21}^t \\ fx_{23}^t \end{Bmatrix} = \frac{2P \cos\alpha_2}{11 \cos(\alpha_1 + \alpha_2)} \begin{Bmatrix} -2 - 3 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) \\ 3 + 2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) \end{Bmatrix}$$

Évidemment si $\cos(\alpha_1 + \alpha_2) \neq 0$, c'est-à-dire si les poutres 12 et 23 ne sont pas alignées.

Quant aux 2 équations relatives au nœud 3, elles ont une matrice non inversible (les poutres sont alignées)! On utilise alors l'équilibre de la poutre 23 pour obtenir fx_{32}^t :

$$fx_{32}^t = -fx_{23}^t = \frac{-2P \cos\alpha_2}{11 \cos(\alpha_1 + \alpha_2)} (3 + 2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2))$$

Puis, de la 1ère équation d'équilibre du nœud 3 et de l'équilibre de la poutre 34, on obtient :

$$fx_{34}^t = -fx_{43}^t = \frac{P \cos\alpha_2}{11} \left[\frac{2(3 + 2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2))}{\cos(\alpha_1 + \alpha_2)} - 11 \operatorname{tg}\alpha_2 \right]$$

On a aussi : $fx_{12}^t = -fx_{21}^t$

Tous les efforts appliqués aux nœuds sont maintenant connus sauf, les réactions selon les DDL bloqués (ou imposés). Elles se déduisent en écrivant l'équilibre des nœuds selon ces DDL. On trouve aisément :

$$R_{X1} = Fx_{12} = fx_{12}^t \sin\alpha_1 - fy_{12}^t \cos\alpha_1$$

$$R_{Y1} = Fy_{12} = fy_{12}^t \sin\alpha_1 + fx_{12}^t \cos\alpha_1$$

$$R_{\theta 1} = Mz_{12} = mz_{12}^t$$

$$R_{X4} = Fx_{43} = fx_{43}^t \cos\alpha_2 - fy_{43}^t \sin\alpha_2$$

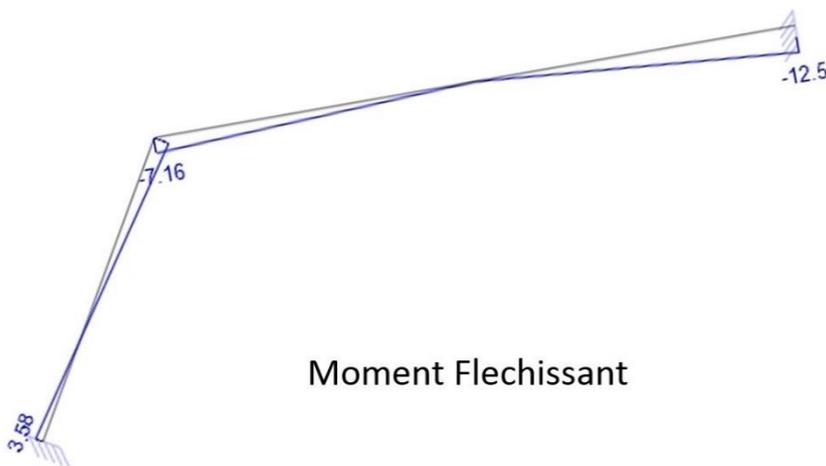
$$R_{Y4} = Fy_{43} = fy_{43}^t \cos\alpha_2 + fx_{43}^t \sin\alpha_2$$

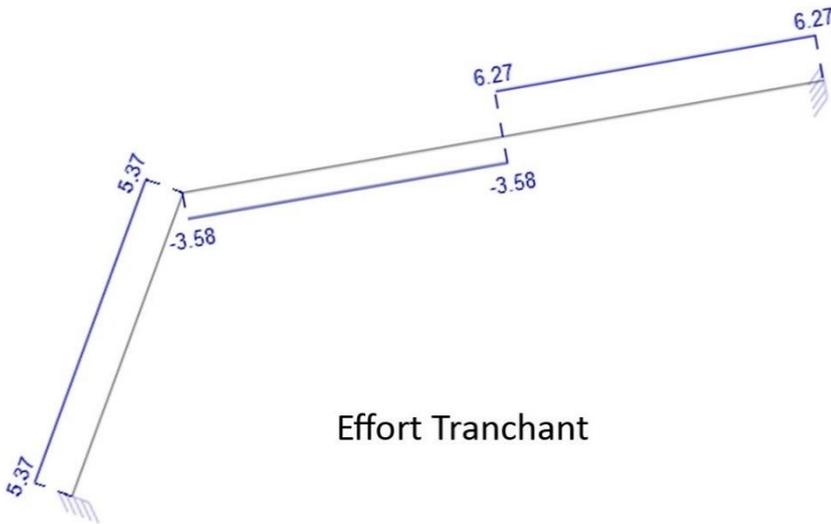
$$R_{\theta 4} = Mz_{43} = mz_{43}^t$$

Pour tracer les diagrammes des efforts internes, on effectue les calculs en considérant les données suivantes :

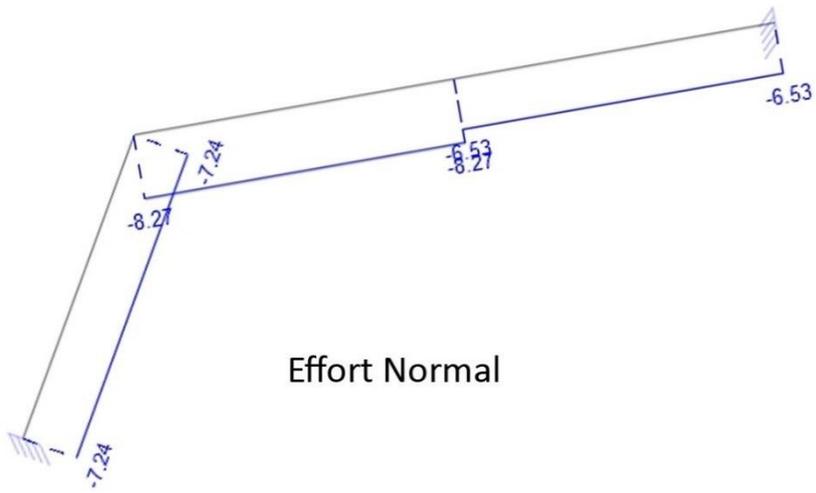
$$L = 2m, P = 10 \text{ kN}; \alpha_1 = 20^\circ; \text{ et } \alpha_2 = 10^\circ$$

Les unités des diagrammes sont le m et kN .





Effort Tranchant



Effort Normal

Références Bibliographiques

Damien André. « Résistance des matériaux ». Université de Limoge, 2020

François Fleury & Rémy Mouterde. « Comprendre simplement la résistance des matériaux ». Le moniteur, 2007.

James Gere. « Mechanics of materials ». Thomson Learning, 2004

Jean-François Remacle. « Mécanique des structures ». Université catholique de Louvain, 2002.

René Maquoi. « Mécanique des structures première partie ». Université de Liège, 2008

Stephen Timoshenko. « Résistance des matériaux. Théories élémentaires et problèmes. Tome 1 ». Dunod, 1968.

Youde Xiong. « Exercices résolus de résistance des matériaux ». Eyrolles, 2016