

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REpubLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة أبي بكر بلقايد -

تلمسنان -

Université Aboubakr Belkaïd - Tlemcen -

Faculté de TECHNOLOGIE



Département du Génie Electrique et Electronique

Domaine : Science et Technologies

Master 1 Instrumentation Electronique
Semestre 2

Cours : Systèmes asservis numériques

Par : Dr. GORINE ALI
Maître de conférences classe B

Année universitaire 2018/2019

Table des matières

Avant-propos	1
Introduction	2
1 Etude de l'échantillonnage d'un signal	3
1.1 Introduction	3
1.2 Définitions	3
1.3 Transformée en Z et transformée en Z modifiée	4
1.3.1 Spectre d'un signal échantillonné	5
1.3.2 Théorème de Shannon	6
1.3.3 Transformée en Z	7
1.3.4 Bloqueurs d'ordre zéro et d'ordre un	8
1.3.5 Propriétés de la transformée en Z	12
1.3.6 Transformée en Z de signaux usuels	13
1.3.7 Aperçu sur la transformée en Z modifiée et ses propriétés . .	15
1.3.8 Théorème de la valeur initiale et de la valeur finale d'un système échantillonné	16
1.4 Transformée en Z inverse	17
1.4.1 Introduction	17
1.4.2 Méthodes analytiques	18
1.4.3 Méthodes numériques	19
1.5 Transferts échantillonnés et équations aux récurrences	20
1.5.1 Les équations aux récurrences	20
1.5.2 Discrétisation d'un transfert continu	21
1.5.3 Représentation des systèmes discrets par des équations de récurrences	21
1.5.4 Fonction de transfert échantillonnée	21
1.5.5 Relation entre systèmes asservis continus et systèmes asservis échantillonnés	22
1.6 Étude de la stabilité d'un système échantillonné	25
1.6.1 Critère De Jury	26

TABLE DES MATIÈRES

1.6.2	Critère de Routh	29
1.7	Etude de la précision d'un système échantillonné	30
2	Analyse des systèmes échantillonnés dans l'espace d'état	32
2.1	Introduction	32
2.2	Discrétisation de l'équation d'état d'un système continu	34
2.3	Représentation et résolution de l'équation d'état d'un système discret	35
2.3.1	Observabilité et Commandabilité	36
2.3.2	Différentes formes de la matrice d'évolution	37
2.3.3	Stabilité et précision d'un système discret	40
3	Synthèse d'un contrôleur	43
3.1	Placement de pôles par retour d'état et par retour de sortie	43
3.1.1	Placement de pôles par retour d'état	43
3.1.2	Synthèse de lois de commande simples	47
3.1.3	Observateur d'état	52
3.1.4	Commande par retour d'état observé	57
3.2	Autres méthodes de synthèse	59
3.2.1	Contrôleur PID numérique (structure à 1 degré de liberté)	59
3.2.2	Cas du régulateur PID filtré	61
3.2.3	Contrôleur RST (structure à 2 degrés de liberté)	62
	Bibliographie	66

Avant-propos

Ce cours adressé aux étudiants de la première année master en instrumentation électronique, est une introduction aux systèmes échantillonnés. Nous présentons tous d'abord l'outil mathématique pour traiter les signaux numérique, puis nous introduisons les propriétés et les représentations des systèmes dynamiques linéaires à temps discret. il est recommandé au lecteur d'avoir des compétences en théorie des systèmes continus. Parmi ces compétences nécessaire pour ce cours, on peut cité l'analyse temporelle et fréquentielle ainsi que la représentation d'état des systèmes asservis continus.

Introduction

Aujourd'hui, grâce au développement très important de l'informatique industrielle, la commande des processus est pratiquement réalisée par ordinateur. Cela nous permet d'assurer des performances optimales, par exemple minimiser le coût, l'énergie utilisée, maximiser la production,...

Classiquement une boucle de commande numérique se présente comme suit :

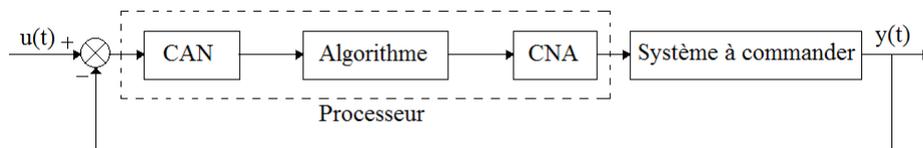


FIGURE 1 – Boucle de commande numérique

Les objectifs de la commande des systèmes sont :

- La sortie tend vers l'entrée ;
- Rejet de perturbation ;
- Robustesse vis-à-vis des erreurs de modèle.

Le fonctionnement de l'asservissement numérique se fait de la manière suivante (voir figure 1) :

1. La conversion d'un signal analogique en un signal numérique : Il s'agit de convertir les informations prises du signal analogique en une valeur numérique afin qu'elle soit traitée par le calculateur (bloc CAN).
2. La synthèse d'un algorithme de calcul : il s'agit d'établir une loi de commande numérique afin de permettre au système asservi de satisfaire un cahier des charges donné par l'utilisateur (bloc Algorithmes).
3. La conversion d'un signal numérique en un signal analogique : afin de pouvoir commander le système physique cette étape consiste à transformer le signal numérique issu du calculateur en signal analogique de commande existant sur toute la période d'échantillonnage (bloc CNA).

Chapitre 1

Etude de l'échantillonnage d'un signal

1.1 Introduction

Dans un contexte du traitement de l'information, échantillonner un signal analogique consiste à le remplacer par une suite de ses valeurs prises à des instants bien définis. Vu qu'un processeur ne traite que des nombres et pas des grandeurs analogiques l'échantillonnage joue un rôle central en commande numérique.

1.2 Définitions

Un signal analogique où à temps continu est une fonction f définie par :

$$\begin{aligned} f &: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ t &\mapsto f(t) \end{aligned}$$

Un signal analogique n'est pas forcément une fonction continue au sens mathématique il peut être une fonction contenant des discontinuités (1.1).

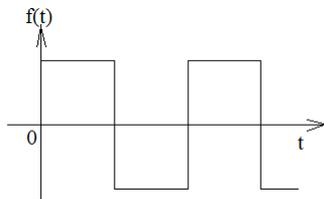


FIGURE 1.1 – signal carré

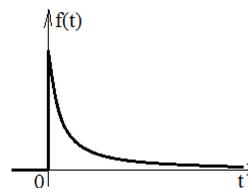


FIGURE 1.2 – signal exponentielle

Un signal numérique est un signal discret, ne pouvant prendre qu'un nombre fini N de valeurs réels x_0, x_1, \dots, x_N il peut être donc défini comme suite :

$$\begin{aligned} \{t_k : k \in \mathbf{Z}\} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ k &\longmapsto x(t) = x_k \end{aligned}$$

Si les différences $(x_{i+1} - x_i)$ sont les mêmes pour $i = 1, 2, \dots, n$ on parle de quantification. La version échantillonnée du signal analogique $y(t)$ est la suite réelle $\{y(t_k) : k \in \mathbf{Z}\}$. Les nombres t_k sont appelés instants d'échantillonnage. L'échantillonnage du signal analogique de la figure 2 peut être représenté par :

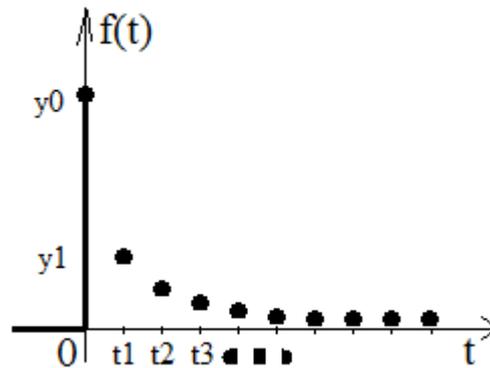


FIGURE 1.3 – signal échantillonné

Dans la suite de ce cours les instants d'échantillonnage sont uniformément espacés, c'est-à-dire : $t_k = k \times T$ avec $k \in \mathbf{Z}$. Il s'agit donc d'un échantillonnage périodique de période T_e (période d'échantillonnage).

La fréquence d'échantillonnage est donnée par : $f_e = \frac{1}{T_e}$

La pulsation d'échantillonnage est : $\omega_e = 2\pi f_e = \frac{2\pi}{T_e}$

1.3 Transformée en Z et transformée en Z modifiée

L'outil mathématique pour l'analyse et la synthèse des systèmes discrets est la transformée en Z. En discret cette transformée a un rôle similaire à celui de la transformée de Laplace dans le domaine continu. Les systèmes échantillonnés linéaires sont caractérisés par des équations aux différences finies. Afin de déterminer la réponse d'un tel système à une entrée donnée on doit résoudre les équations aux différences. La transformée en Z nous permet de transformer l'équation aux différences finies en une équation algébrique (exactement comme la transformée de Laplace qui nous permet de transformer une équation différentielle linéaire et

invariante dans le temps en une équation algébrique).

1.3.1 Spectre d'un signal échantillonné

Soit un signal à énergie finie $u(t)$ à échantillonner. Sa transformée de Fourier $U(f)$ est donnée par :

$$U(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

L'échantillonnage du signal $u(t)$ consiste à le transformer en une suite de nombre $U(kT_e)$ prises à des instants kT_e .

Les valeurs $u(kT_e)$ sont le résultat de la multiplication du signal $u(t)$ par une fonction $p(t)$ dite peigne de Dirac, elle est nulle partout, sauf au voisinage des instants kT_e ; $k \in \mathbb{Z}$.

L'échantillonnage du signal $u(t)$ est noté comme suit :

$$u^*(t) = \{u_0, u_1, u_2, \dots, u_n\} \text{ Ou encore : } u(k) = \{u_0, u_1, u_2, \dots, u_n\}.$$

Si un signal $p(t)$ est périodique, il peut donc être décomposé en série de Fourier que nous pouvons écrire :

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{-j2\pi n f_e t}.$$

Avec :

$$A_n = \frac{1}{T_e} \int_{t_0}^{t_0+T_e} p(t) e^{-j2\pi n f_e t} dt.$$

Le signal échantillonné :

$$u^*(t) = u(t)p(t) = u(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{-j2\pi n f_e t}$$

On peut calculer la transformée de Fourier $U^*(f)$ du signal échantillonné $u^*(t)$. Nous avons :

$$U^*(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} [u(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{j2\pi n f_e t}] e^{-j2\pi ft} dt \quad (1.1)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [A_n \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-j2\pi(f-nf_e)t} dt] \quad (1.2)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [A_n U(f - nf_e)] \quad (1.3)$$

Pour $n = 0$ on retrouve le spectre $|U(f)|$, pour n non nulle on retrouve ce même spectre, mais décalé, par rapport à $|U(f)|$ de nf_e avec $n \in \mathbf{Z}$.

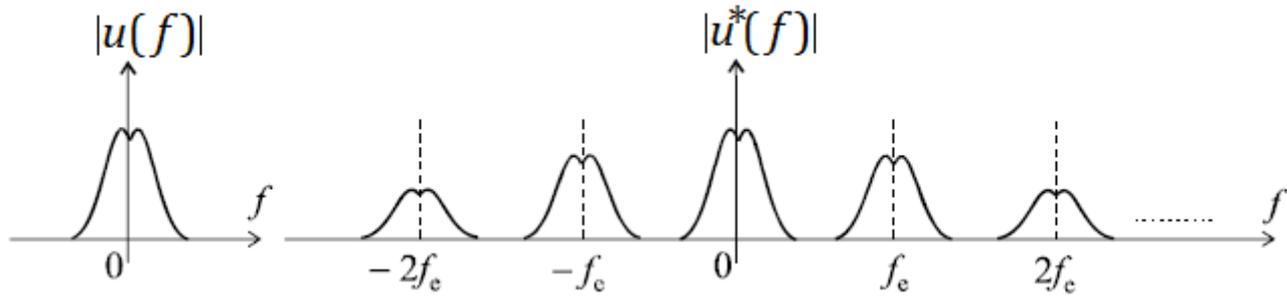


FIGURE 1.4 – Spectre du signal échantillonné

1.3.2 Théorème de Shannon

Afin de pouvoir reconstruire le signal original à partir du spectre du signal échantillonné, l'objectif majeur de l'échantillonnage consiste à ne pas perdre d'information lors de la discrétisation du signal continu.

Une simple observation du spectre $|U^*(f)|$ de la figure 1.4, nous montre que cela est possible s'il n'existe aucun recouvrement entre les différents segments de spectre.

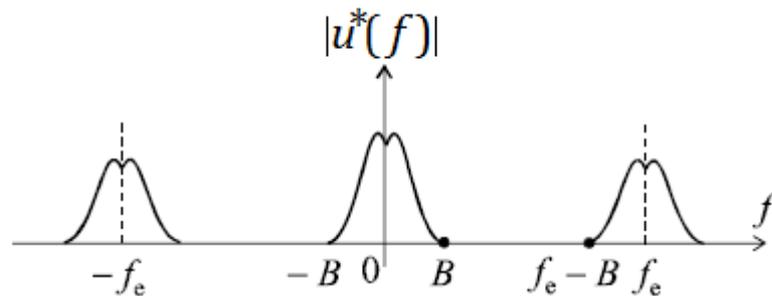


FIGURE 1.5 – Spectre d'un signal échantillonné

$$B < (f_e - B) \implies f_e > 2B \quad (1.4)$$

Cette inégalité constitue le théorème de Shannon qui peut également s'énoncer de la manière suivante :

Théorème un signal analogique $u(t)$ dont la transformée de Fourier est nulle à l'extérieur de l'intervalle $[-\omega_0, \omega_0]$ (ω_0 est une fréquence) est parfaitement défini par ses valeurs échantillonnées $u(kT)$ si la pulsation d'échantillonnage satisfait

l'inégalité :

$$\omega_e > 2\omega_0.$$

Exemple : Si on veut numériser le signal analogique du réseau téléphonique qui possède une bande passante s'étendant de 300 à 3400Hz, quelle doit être la fréquence d'échantillonnage minimum ?

La formule du théorème de Shannon nous montre immédiatement que la fréquence d'échantillonnage doit être supérieure au double de la fréquence maximum, soit 6800Hz. La fréquence standard qui a été choisie dans le réseau numérique est de 8KHz, ce qui satisfait les conditions ci-dessus.

1.3.3 Transformée en Z

Définition

Soit un signal analogique $u(t)$ qu'on échantillonne à une fréquence d'échantillonnage f_e en respectant le théorème de Shannon.

Nous avons : $u(k) = u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$ cette suite est la somme du produit des impulsions unités décalé l'une des autres d'une période T_e et le coefficient u_k .

$$u^*(t) = u_0\delta(t) + u_1\delta(t - T_e) + u_2\delta(t - 2T_e) + \dots \quad (1.5)$$

$$= \sum_{k=0}^n u_k\delta(t - kT_e) \quad (1.6)$$

$$u^*(t) = \sum_{k=0}^n u_k\delta_k \quad (1.7)$$

On note $\Delta_k(s)$ la transformée de Laplace de l'impulsion unité à l'instant kT_e :

$$\Delta_k(s) = \int_0^{+\infty} \delta_k(t)e^{-st}dt \quad (1.8)$$

En nommant $\Delta_0(s)$ la transformée de Laplace de l'impulsion unité en 0, le théorème du retard (section 1.3.5) nous permet d'écrire $\Delta_k(s)$ comme suit :

$$\Delta_k(s) = \Delta_0(s)e^{-skT_e} \quad (1.9)$$

Avec :

$$\Delta_0(s) = \int_0^{+\infty} \delta_0(t)e^{-st}dt = 1 \implies \Delta_k(s) = e^{-sT_e k} \quad (1.10)$$

La transformée de Laplace du signal échantillonné $u^*(t)$ est :

$$u^*(s) = \sum_{k=0}^n u_k e^{-skT_e} \quad (1.11)$$

En posant $z = e^{sT_e}$, la transformée en Z du signal $u(t)$ est défini par :

$$U(z) = \sum_{k=0}^n u_k z^{-k} \quad (1.12)$$

Remarque : la transformée en Z n'existe que si la somme $U(z)$ défini par l'équation 1.12 converge.

1.3.4 Bloqueurs d'ordre zéro et d'ordre un

La commande des systèmes par des impulsions n'est pas toujours possible. Il faut donc transformer la suite de nombres en un signal continu, cette opération est appelée reconstitution d'un signal discret. La reconstitution où la restitution d'un signal est l'opération inverse de l'échantillonnage.

La façon la plus simple de restituer un signal est par un élément de blocage qui revient à une interpolation par un polynôme d'ordre zéro ou d'ordre un.

Dans ce qui suit, nous allons étudier le bloqueur d'ordre zéro puis bloquer d'ordre un.

Bloqueur d'ordre zéro

Le bloqueur d'ordre zéro fait maintenir le signal constant à une valeur d'un échantillon jusqu'à l'échantillon suivant pour prendre la nouvelle valeur. La réponse temporelle d'un bloqueur d'ordre zéro $b_0(t)$ est donnée par la figure suivante :

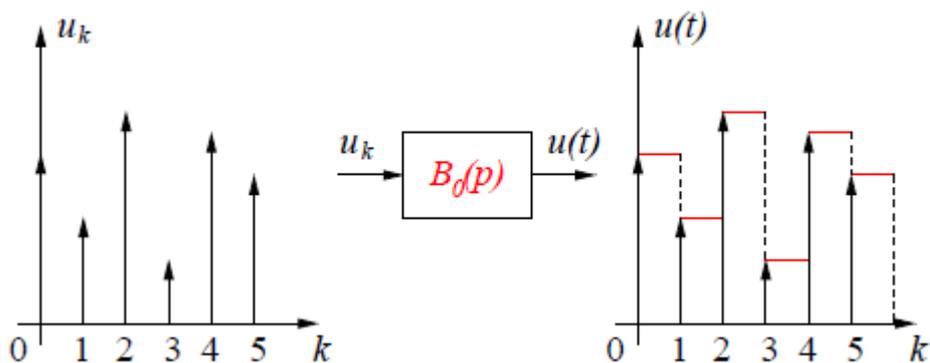


FIGURE 1.6 – Réponse temporelle du bloqueur d'ordre zéro.

La fonction de transfert du bloqueur d'ordre zéro est la transformée de Laplace de sa réponse impulsionnelle unitaire, représenté par la figure suivante :

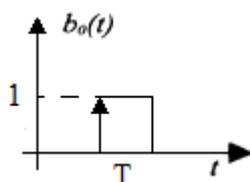


FIGURE 1.7 – Réponse impulsionnelle du bloqueur d'ordre zéro.

$$b_0(t) = \Gamma(t) - \Gamma(t - T) \quad (1.13)$$

Avec : $\Gamma(t)$ est l'échelon unité.

La transformée de Laplace de $b_0(t)$ nous donne la fonction de transfert du bloqueur d'ordre zéro :

$$B_0(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s} = \frac{(1 - e^{-sT})}{s} \quad (1.14)$$

Fonction de transfert : bloqueur et processus :

Soit un système représenté par le schéma bloc suivant :

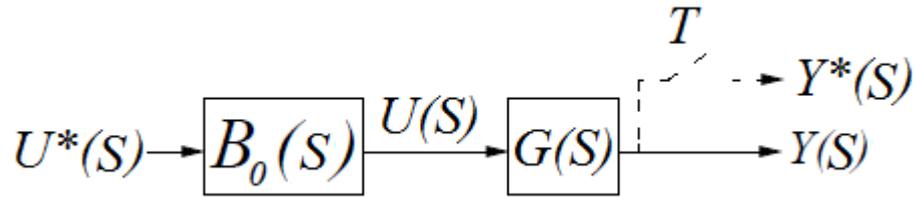


FIGURE 1.8 – Schéma bloc d'un processus + bloqueur.

La fonction de transfert du système échantillonné est donnée par :

$$G(z) = Z \left[B_0(s)G(s) \right] \quad (1.15)$$

En remplaçant $B_0(s)$ par ça fonction de transfert on obtient :

$$G(z) = Z \left[\frac{1 - e^{-st}}{s} G(s) \right] \quad (1.16)$$

D'où :

$$G(z) = (1 - z^{-1})Z \left[\frac{G(s)}{s} \right] \quad (1.17)$$

Nous obtenons donc :

$$G(z) = \frac{z - 1}{z} Z \left[\frac{G(s)}{s} \right] \quad (1.18)$$

Réalisation pratique du bloqueur d'ordre zéro

La réalisation pratique de l'échantillonneur bloqueur d'ordre zéro nécessite un interrupteur statique (transistor, relais ou thyristor), commandé par in signal horloge de période T, et la mémorisation de l'amplitude mesurée.

Le circuit de l'échantillonneur bloqueur d'ordre zéro peut être schématisé par la figure suivante :

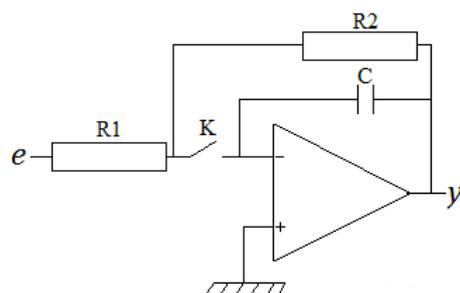


FIGURE 1.9 – Schémas de l'échantillonneur bloqueur d'ordre zéro.

Pendant la fermeture de l'interrupteur K , la capacité se charge à travers la résistance R_2 . La tension de sortie y est donnée par :

$$y = \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + R_2 C s} e \quad (1.19)$$

Le choix de $R_2 C$ suffisamment grand voir $R_2 C \gg T_e$ et avec un bon choix de R_1 nous conduit à avoir la tension de sortie $y \approx e$.

Lorsque l'interrupteur k est ouvert, la capacité se décharge lentement et la tension y est maintenue constante jusqu'à la fermeture de l'interrupteur k à nouveau.

Bloqueur d'ordre un

Le bloqueur d'ordre 1 permet l'extrapolation linéaire (de degré 1) entre nT et $(n+1)T$ à partir de $x(nT)$ et de $x((n-1)T)$.

La réponse temporelle du bloqueur d'ordre un est donnée par :

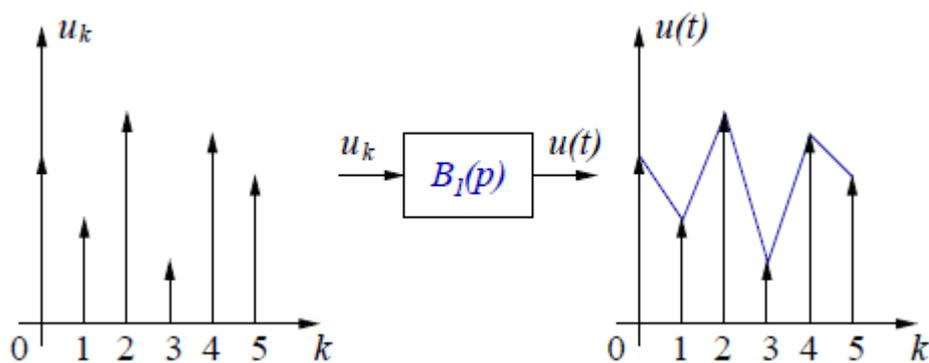


FIGURE 1.10 – Réponse temporelle du bloqueur d'ordre 1.

La réponse impulsionnelle unitaire du bloqueur d'ordre 1 dans le domaine temporel est donnée par :

$$u(t) = \left(1 + \frac{t}{T}\right)(\Gamma(t) - \Gamma(t+T)) + \left(1 - \frac{t}{T}\right)(\Gamma(t+T) - \Gamma(t+2T)) \quad (1.20)$$

Avec : $\Gamma(t)$ est l'échelon unité.

La fonction de transfert du bloqueur d'ordre 1 est la transformée de Laplace ça la réponse impulsionnelle unitaire $u(t)$.

Il vient que :

$$u(s) = T(1+Ts) \left(\frac{1 - e^{-Ts}}{Ts} \right)^2 \quad (1.21)$$

1.3.5 Propriétés de la transformée en Z

Linéarité

Soit $u_1(t)$ et $u_2(t)$ deux signaux quelconques chaque signal possède la transformée en Z, $U_1(z)$ et $U_2(z)$ respectivement.

La transformée en Z de la combinaison linéaire $\alpha u_1(t) + \beta u_2(t)$ de ces deux signaux est : $\alpha U_1(z) + \beta U_2(z)$

Donc :

$$\alpha u_1(t) + \beta u_2(t) \xleftrightarrow{TZ} \alpha U_1(z) + \beta U_2(z)$$

Décalages temporels

Soit $u(t)$ un signal quelconque possédant la transformée en Z notée $U(z)$

— Théorème du retard : La transformée en Z du signal $u(t)$ retardé d'un temps aT_e , est :

$$u(t - aT_e) \xleftrightarrow{TZ} z^{-a} U(z)$$

— Théorème d'avance : La transformée en Z du signal $u(t)$ avancé d'un temps aT_e , est :

$$u(t + aT_e) \xleftrightarrow{TZ} z^a U(z)$$

Dérivée par rapport à Z

Soit $u(t)$ un signal quelconque et $U(z)$ sa transformée en Z.

La transformée en Z jouit de la propriété suivante :

$$tu(t) \xleftrightarrow{TZ} -Tz \frac{dU(z)}{dz}$$

Le rayon de convergence de la transformée en Z de $kT.u(kT)$ est celui de $U(z)$.

Changement d'échelle complexe

Soit $u(t)$ un signal quelconque et $U(z)$ sa transformée en Z .

L'échantillonnage du signal $u(t)$ nous donne la suite u_k .

Soit $x_k = a^k u_k$ avec $a \neq 0$.

Le signal $x(t)$ correspondant à la suite x_k possède une transformée en z telle que :

$$X(z) = U\left(\frac{z}{a}\right)$$

Produit de convolution

Soit $u(t)$ et $y(t)$ deux signaux quelconques chaque signal possède la transformée en Z notée $U(z)$ et $Y(z)$ respectivement.

La transformée en Z du produit de convolution de ces deux signaux $u(t)$ et $y(t)$ est donné par :

$$u(t) * y(t) \xrightarrow{TZ} U(z)Y(z)$$

Accumulation

La transformée en z de l'accumulation des échantillons d'un signal discret est :

$$\sum_{k=0}^n u_k \xrightarrow{TZ} \frac{z}{z-1} U(z)$$

1.3.6 Transformée en Z de signaux usuels

Impulsion unité

L'impulsion unité est définie par :

$$\begin{cases} \delta_k = 1 & \text{si } k = 0 \\ \delta_k = 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

On a :

$$\Delta(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k z^{-k} = z^0 = 1$$

Échelon unité

L'échelon unité est défini par :

$$\begin{cases} \Gamma_k = 1 & \forall k \geq 0 \\ \Gamma_k = 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^k \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{z}} \\ &= \frac{z}{z-1}\end{aligned}$$

Rampe unité

La rampe unité en temps continu est définie par :

$$\begin{cases} v(t) = t & \forall t \geq 0 \\ v(t) = 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$v(t)$ peut s'écrire comme suit :

$$v(t) = t \cdot \Gamma(t)$$

En utilisant la propriété de dérivation complexe, on obtient :

$$\begin{aligned}V(z) &= -zT_e \frac{d\Gamma(z)}{dz} \\ &= -zT_e \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z-1}\right)\end{aligned}$$

En fin :

$$V(z) = \frac{zT_e}{(z-1)^2}$$

Exponentielle décroissante

Soit $u(t)$ le signal défini par :

$$\begin{cases} u(t) = e^{-at}, \forall t \geq 0. \\ u(t) = 0, \text{ailleurs} \end{cases}$$

La transformée en Z de ce signal a pour expression :

$$\begin{aligned}U(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT_e} z^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{ze^{aT_e}}\right)^k\end{aligned}$$

D'où :

$$U(z) = \frac{z}{z - e^{-aT_e}}$$

1.3.7 Aperçu sur la transformée en Z modifiée et ses propriétés

Transformée en Z modifiée

La transformée en Z modifiée est une modification de la transformée en Z . Elle est basée sur l'insertion d'un retard fictif à la sortie du système, en ajoutant une sortie fictif échantillonné comme le montre la figure suivante :

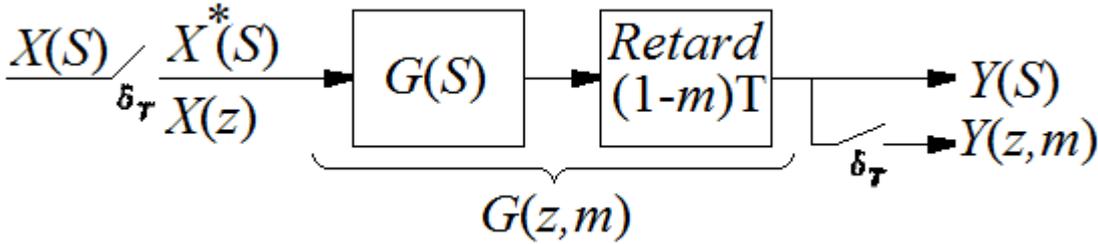


FIGURE 1.11 – Système avec retard fictif.

Le retard fictif est de $(1 - m)T$ avec $0 \leq m \leq 1$.

Ce retard fictif nous permet d'obtenir la réponse du système $y(t)$ entre deux périodes d'échantillonnage, sachant que $t = kT - (1 - m)T$. (avec : $k = 1, 2, 3, \dots$). Soit :

$$G^*(S) = TL[g(t)\delta_T(t)]$$

Avec :

$TL[g(t)\delta_T(t)]$ est la transformée de Laplace de $(g(t)\delta_T(t))$.

On définit $G(z, m)$ la transformée en Z modifiée (Z_m) de $G^*(S)$.

$$\begin{aligned} G(z, m) &= G^*(S, m)|_{s=\frac{1}{T}\text{Log}(z)} \\ &= TL[g(t - (1 - m)T)\delta_T(t)]|_{s=\frac{1}{T}\text{Log}(z)} \\ TL[g(t - (1 - m)T)\delta_T(t)] &= TL[g(t - T + mT)\delta_T(t)] \\ &= e^{-sT}TL[g(t + mT)\delta_T(t)] \end{aligned}$$

Nous obtenons donc :

$$G^*(S, m) = e^{-sT}TL[g(t + mT)\delta_T(t)]$$

Sachant que le Résidu de $G(s)$ au point $(-a)$ est donné par : $\lim_{s \rightarrow -a} [(s + a)G(S)]$, la transformée de Laplace de $[g(t + mT)\delta_T(t)]$ peut être calculée en utilisant l'équa-

tion suivante :

$$\begin{aligned} TL[g(t + mT)\delta_T(t)] &= \frac{1}{j2\pi f} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} G(\tau) \frac{e^{mT\tau}}{1 - e^{-T(s-\tau)}} d\tau & (1.22) \\ &= \sum \text{Résidue de } \left[G(s) \frac{e^{mTs}z}{z - e^{TS}} \right] \text{ au pôles de } G(s) & (1.23) \end{aligned}$$

En fin :

$$G(z, m) = z^{-1} \sum \text{Résidue de } \left[\frac{G(s)e^{mTs}z}{z - e^{TS}} \right] \text{ au pôles de } G(s) \quad (1.24)$$

Exemple : On veut calculer la transformée en Z modifiée du système représenté par la fonction de transfert suivante :

$$G(s) = \frac{1}{s + a}$$

En appliquant l'équation 1.24 nous obtenons :

$$\begin{aligned} G(z, m) &= z^{-1} \sum \text{Résidue de } \left[\frac{1}{s + a} \frac{e^{mTs}z}{z - e^{TS}} \right] \Bigg|_{s=-a} \\ &= z^{-1} \lim_{s \rightarrow -a} \left[(s + a) \frac{1}{s + a} \frac{e^{mTs}z}{z - e^{TS}} \right] \end{aligned}$$

Donc :

$$G(z, m) = \frac{e^{-maT}}{z - e^{-aT}}$$

Propriétés de la transformée en Z modifiée

On peut exploiter pour la transformée en Z modifiée toutes les propriétés définies pour la transformée en Z.

1.3.8 Théorème de la valeur initiale et de la valeur finale d'un système échantillonné

Soit $U(z)$ la transformée en Z du signal $u(t)$.
L'échantillonnage du signal $u(t)$ nous donne la suite u_k .

Théorème de la valeur initiale

La valeur initiale $u(0)$ peut être évaluée directement à partir de sa transformée en Z selon la formule :

$$u(0) = \lim_{z \rightarrow +\infty} U(z)$$

Théorème de la valeur finale

Le théorème de la valeur finale permet de connaître la valeur vers laquelle tend la suite u_k lorsque $k \rightarrow +\infty$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = \lim_{z \rightarrow 1} [(1 - z^{-1})U(z)] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{z-1}{z} U(z) \right]$$

1.4 Transformée en Z inverse

1.4.1 Introduction

La transformée en Z en temps discret joue le même rôle que la transformée de Laplace dans le domaine continu.

L'utilisation de la transformée en Z nous impose de nous familiariser avec des méthodes pour trouver la transformée en Z inverse.

La transformée en Z inverse d'un signal $U(z)$ nous fournit la séquence de temps correspondante à $u(kT)$.

Il est très important de signaler que la transformée en Z inverse ne fournit que la séquence $u(kT)$ à des instants d'échantillonnage $0, T, 2T, \dots, kT$.

Cette séquence $u(kT)$ est unique. Cependant le signal $u(t)$ peut ne pas être unique. La figure suivante présente un exemple pour lequel nous avons une séquence $u(kT)$ la même pour deux signaux différents $u_1(t)$ et $u_2(t)$.

On distingue quatre méthodes d'inversion la transformée en Z . Deux méthodes analytiques nous permettent d'obtenir le signal original en fonction du temps t , les deux autres méthodes sont de type numérique qui ne donne que les valeurs numériques à des instants d'échantillonnages du signal $u(t)$.

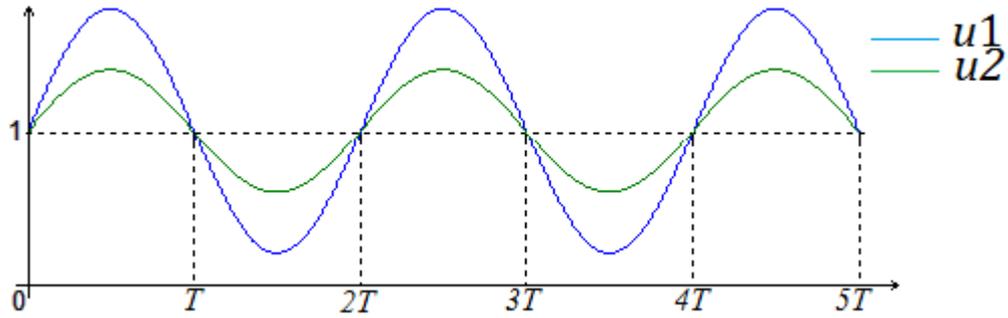


FIGURE 1.12 – Deux différents signaux $u_1(t)$ et $u_2(t)$ qui ont la même valeurs à des instants d'échantillonnages.

1.4.2 Méthodes analytiques

Méthode des Résidues

$$\text{Soit : } u(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u(nT)z^{-n}$$

$$\text{Avec : } u(nT) = \sum_{z_i} \left[\text{Résidus de } z^{(n-1)}U(z) \right]_{z=z_i} .$$

Où z_i sont les pôles de $U(z)$.

Exemple Soit un signal $U(z)$ donné par :

$$U(z) = \frac{Tz^n}{(z-1)^2}$$

Cette fonction possède un pôle double en $z = 1$.

$$u(nT) = \left[\text{Résidus de } z^{(n-1)} \frac{Tz}{(z-1)^2} \right]_{(z=1)} = \frac{d}{dz} \left[(z-1)^2 \frac{Tz^n}{(z-1)^2} \right]_{z=1} = nT.$$

Donc :

$$U(z) = T \sum_{n=0}^{\infty} nz^{-n} \text{ et } U(t) = t.\Gamma(t).$$

Méthode de décomposition en éléments simples

Bien connue en calcul opérationnel. Cette méthode consiste à décomposer $U(z)$ en éléments simples dont on trouve les originaux dans la table de transformée en Z .

Exemple Soit un signal $U(z)$ donné par l'équation suivante :

$$U(z) = \frac{z(5z-3.6)}{z^2-1.4z+0.48}$$

Cette fonction possède deux pôles : $z = 0.8$ et $z = 0.6$

La décomposition en éléments simple de $U(z)$ nous donne :

$$U(z) = \frac{2z}{z-0.8} + \frac{3z}{z-0.6}.$$

En utilisant les tables de transformée en Z on trouve :

$$u(t) = 2e^{-0.223\frac{t}{T}} + 3e^{-0.511\frac{t}{T}}$$

1.4.3 Méthodes numériques

Division suivant les puissances croissantes de z^{-1}

Cette méthode est utilisée lorsque $U(z)$ se présente sous la forme de fractions rationnelles en z (ou en z^{-1}), il suffit de diviser le numérateur par le dénominateur pour obtenir une série en z^{-1} , dont les coefficients sont les valeurs de $u(nT)$ désirées.

Exemple soit un signal échantillonné possédant la transformée en Z suivant :

$$U(z) = \frac{z}{z^2-3z+2}$$

La division du polynôme-numérateur par celui du dénominateur conduit à :

$$\begin{aligned} U(z) &= z^{-1} + 3z^{-2} + 7z^{-3} + 15z^{-4} + 31z^{-5} + \dots \\ u^*(t) &= \delta(t-T) + 3\delta(t-2T) + 7\delta(t-3T) + 15\delta(t-4T) + 31\delta(t-5T) + \dots \end{aligned}$$

Donc :

$$u(kT) = 2^k - 1$$

Méthode des équations récurrentes

Cette méthode consiste à déduire la valeur de l'échantillon $u(nT)$ de la connaissance des échantillons précédents aux instants : $(n-1)T, (n-2)T, (n-3)T, \dots$ On procède ainsi de manière itérative en progressant pas à pas de période en période.

1.5. TRANSFERTS ÉCHANTILLONNÉS ET ÉQUATIONS AUX RÉCURRENCES

Exemple Soit un système de fonction de transfert discrète :

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{z - 0.5} \Rightarrow Y(z) - 0.5z^{-1}Y(z) = z^{-1}U(z)$$

On trouve donc :

$$y(kT) = 0.5y[(k-1)T] + u[(k-1)T]$$

1.5 Transferts échantillonnés et équations aux récurrences

1.5.1 Les équations aux récurrences

Définition On appelle une équation de récurrence linéaire d'ordre 1 à coefficients constants toute équation du type :

$$u_{k+1} + \alpha u_k = f(k)$$

Avec : $\alpha \in \mathfrak{R}^*$ et f une fonction à valeurs dans \mathfrak{R} .

La solution de cette équation est la suite réelle $u(k)_{k \in \mathbb{N}}$ dont les termes u_k vérifient l'égalité pour tout indice k .

Dans le cas général une équation de récurrence d'ordre n est de la forme :

$$\sum_{k=0}^n a_k y_{(n-k)} = \sum_{k=0}^m b_k u_{(m-k)}$$

Le développement de cette équation nous donne :

$$a_0 y(n) + a_1 y(n-1) + \dots + a_n y(0) = b_0 u(m) + b_1 u(m-1) + \dots + b_m u(0) \quad (1.25)$$

En automatique un système échantillonné d'ordre n régi par une équation de récurrence de la forme (1.25) avec y représente la sortie et u représente l'entrée. Pour que ce système soit causal il faut que n soit supérieur ou égal à m ($n \geq m$).

Exemple Soit un système discret représenté par l'équation de récurrence suivante :

$$y(k) = y(k-1) - ay(k-1) + ae(k-1)$$

On suppose que l'entrée du système est e et sa sortie est y . La transformée en Z de cette équation est donnée par :

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) - az^{-1}Y(z) + az^{-1}E(z) \Rightarrow [1 + (a-1)z^{-1}]Y(z) = az^{-1}E(z)$$

Donc la fonction de transfert de ce système est donnée par :

$$G(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{az^{-1}}{1 + (a-1)z^{-1}} = \frac{a}{z + (a-1)}$$

1.5.2 Discrétisation d'un transfert continu

La discrétisation d'un transfert continu consiste à effectuer une transformation $P \rightarrow Z$.

Cette transformation se fait à l'aide d'une approximation de la relation : $Z = e^{sT}$. Plusieurs méthodes d'approximation permettant le passage du domaine continu vers le domaine discret.

Le choix de l'une ou l'autre de ces méthodes dépend des avantages et des inconvénients présentés par chacune de ces méthodes, ainsi que la validité des résultats en termes de réponse temporelles et fréquentielles.

Deux catégories de méthodes sont présentées :

- Par approximations de l'opérateur intégral.
- Par techniques d'invariants.

Approximations de l'opérateur intégral

Cette approximation contient les méthodes suivantes :

- **Méthode d'Euler** pour la quel $s = \frac{z-1}{Tz}$.
- **Méthode de Tustin** $s = \frac{2z-1}{Tz+1}$.

1.5.3 Représentation des systèmes discrets par des équations de récurrences

Un système linéaire à temps discret peut être représenté par une équation de récurrence entre les différents termes des séquences d'entrée et de sortie.

La forme générale d'une équation de récurrente est donnée par :

$$a_n y_{k+n} + a_{n-1} y_{k+n-1} + \dots + a_1 y_{k+1} + a_0 y_k = b_m u_{k+m} + b_{m-1} u_{k+m-1} + \dots + b_1 u_{k+1} + b_0 u_k \quad (1.26)$$

Avec : n est l'ordre de système.

L'équation de la sortie en fonction des données entrée/sortie passés est donnée par :

$$a_n y_{k+n} = -a_{n-1} y_{k+n-1} - \dots - a_1 y_{k+1} - a_0 y_k + b_m u_{k+m} + b_{m-1} u_{k+m-1} + \dots + b_1 u_{k+1} + b_0 u_k.$$

A condition que le système soit causal c'est-a-dire que : $n \geq m$.

1.5.4 Fonction de transfert échantillonnée

L'application de la transformée en Z à l'équation récurrente, nous conduit a trouvée la fonction de transfert échantillonné. On suppose que les conditions initiales sont nulles, la transformée en Z de l'équation (1.26) nous donne :

1.5. TRANSFERTS ÉCHANTILLONNÉS ET ÉQUATIONS AUX RÉCURRENCES

$$(a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0)Y(z) = (b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0)U(z)$$

Soit encore :

$$G(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}$$

Qui est défini comme la fonction de transfert en Z représentant un système échantillonné.

Cette fonction de transfert peut être représenté par le modèle suivant :

$$G(z) = \frac{b_m (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_m)}{a_n (z - s_1)(z - s_2) \dots (z - s_n)}$$

Avec :

$z_i, i \in [1, m]$ Sont les zéros du système.

$s_i, i \in [1, n]$ Sont les pôles du système.

Remarque Pour que le système soit causal, le degré du dénominateur doit être supérieur ou égal au degré du numérateur. sinon le système n'est pas causal donc n'est pas pratiquement réalisable.

1.5.5 Relation entre systèmes asservis continus et systèmes asservis échantillonnés

On considère le système asservi représenté par le schéma bloc suivant : Il s'agit

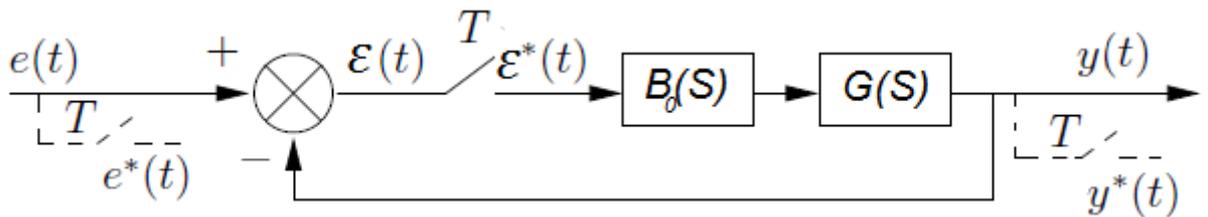


FIGURE 1.13 – Système asservi à retour unitaire avec un seul échantillonneur.

d'un système asservi à retour unitaire avec un seul échantillonneur.

Pour ce type de système nous avons :

$$\varepsilon(t) = e(t) - y(t) \Rightarrow \varepsilon^*(t) = e^*(t) - y^*(t)$$

Soit : $T(s) = B_0(s)G(s) \Rightarrow T(z) =$ Transformée en Z de $[B_0(s)G(s)]$

Nous avons :

$$\begin{cases} \varepsilon(z) = E(z) - Y(z) \\ Y(z) = T(z).\varepsilon(z) \end{cases}$$

Donc la fonction de transfert du système en boucle fermée est donnée par :

$$\frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{T(z)}{1 + T(z)}$$

Cas d'un système à retour non unitaire avec un seul échantillonneur

Ce système peut être représenté par le schéma bloc suivant :

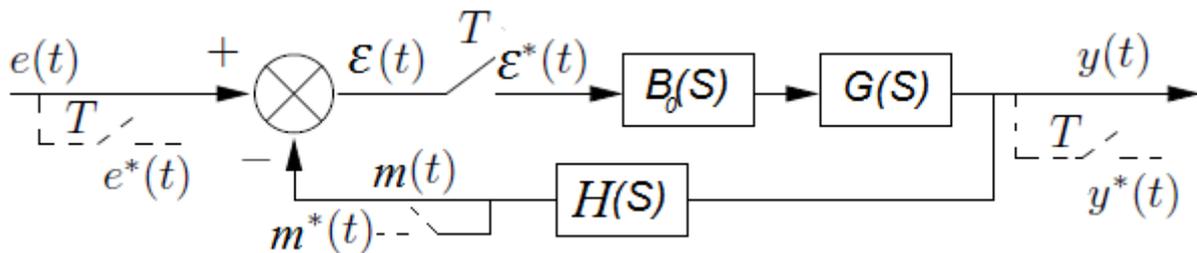


FIGURE 1.14 – Système asservi à retour non unitaire avec un seul échantillonneur.

Nous allons suivre la même procédure pour démontrer la fonction de transfert en boucle fermée.

Nous avons :

$$\begin{aligned} \varepsilon^*(s) &= E^*(s) - M^*(s) \\ Y(s) &= T(s)\varepsilon^*(s) \Rightarrow Y(z) = T(z)\varepsilon(z) \\ M(s) &= H(s)Y(s) \Rightarrow M(s) = H(s)T(s)\varepsilon^*(s) \end{aligned}$$

Le signal de mesure échantillonné est donné par :

$$M^*(s) = [H(s)T(s)]^* \varepsilon^*(s) \Rightarrow \varepsilon^*(s) = \frac{1}{1 + [H(s)T(s)]^*} E^*(s)$$

Soit la fonction $F(z)$ la Transformée en Z de $[H(s)T(s)]$, donc la fonction de transfert échantillonné du système asservi dans ce cas est donnée par :

$$\frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{T(z)}{1 + F(z)}$$

1.5. TRANSFERTS ÉCHANTILLONNÉS ET ÉQUATIONS AUX RÉCURRENCES

Cas d'un système à retour non unitaire avec deux échantillonneurs

Dans ce cas le système asservi est représenté par la figure suivante :
Ce système peut être représenté par l'équation suivante :

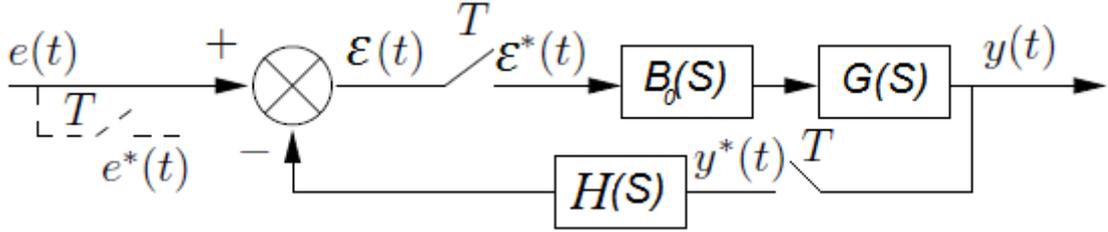


FIGURE 1.15 – Système asservi à retour non unitaire avec deux échantillonneurs.

$$Y^*(s) = T^*(s)\varepsilon^*(s) \Rightarrow Y(z) = T(z)\varepsilon(z)$$

Le signal de mesure est donné par :

$$M(s) = H(s)Y^*(s) \Rightarrow M^*(s) = H^*(s)Y^*(s)$$

L'écart entre le signal d'entrée et le signal de sortie est donné par l'équation suivante :

$$\varepsilon^*(s) = E^*(s) - M^*(s) \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon^*(s) &= E^*(s) - H^*(s)Y^*(s) \\ Y^*(s) &= T^*(s)[E^*(s) - H^*(s)Y^*(s)] \end{cases}$$

Soit :

$$Y^*(s) = \frac{T^*(s)}{1 + T^*(s)H^*(s)} E^*(s)$$

En fin, la fonction de transfert échantillonné dans ce cas est donnée par :

$$\frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{T(z)}{1 + T(z)H(z)}$$

Exemple Soit un système asservi échantillonné à retour unitaire de la figure 1.13 avec :

$$G(s) = \frac{k}{1 + \tau s}$$

La période d'échantillonnage $T_e = 1 \text{ sec}$.

La fonction de transfert de ce système est donnée par :

$$\frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{T(z)}{1 + T(z)}$$

Avec : $T(z) =$ Transformée en Z de $[B_0(s)G(s)] = (1 - z^{-1}) \left[\frac{G(s)}{s} \right] (z)$.

On note que $\left[\frac{G(s)}{s} \right] (z)$ est la transformée en Z de $\left[\frac{G(s)}{s} \right]$.

Donc

$$T(z) = (1 - z^{-1}) \left[\frac{k}{s(1 + \tau s)} \right] (z)$$

En utilisant la table de transformée en Z nous obtenons :

$$\begin{aligned} T(z) &= (1 - z^{-1}) k \frac{(1 - e^{-\frac{T_e}{\tau}}) z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - z^{-1} e^{-\frac{T_e}{\tau}})} \\ &= k \frac{(1 - e^{-\frac{T_e}{\tau}})}{(z - e^{-\frac{T_e}{\tau}})} \end{aligned}$$

Par conséquent la fonction de transfert du système en boucle fermée est :

$$\frac{Y(z)}{E(z)} = k \frac{(1 - e^{-\frac{T_e}{\tau}})}{z + (1 - e^{-\frac{T_e}{\tau}})}$$

1.6 Étude de la stabilité d'un système échantillonné

L'étude de la stabilité d'un système en boucle fermée consiste à localiser les pôles de ce dernier dans le plan complexe.

Dans le cas d'un système continu, le système est stable si et seulement si les pôles de ce dernier se trouvent dans le demi-plan gauche.

Pour les systèmes discret, nous allons commencer l'étude de la stabilité par la relation entre le plan S et le plan Z afin de localiser le domaine de stabilité dans le plans Z .

Soit :

$$Z = e^{sT} \text{ avec } S = \sigma \pm j\omega \Rightarrow Z = e^{\sigma T} e^{\pm j\omega T}$$

Z Peut s'écrire comme suit :

$$Z = e^{\sigma T} e^{j(\omega T + 2\pi k)}$$

Et donc :

$$|Z| = e^{\sigma T}$$

La relation entre la zone de stabilité en continu et en discret est donnée par :

$$\sigma < 0 \Rightarrow |Z| < 1$$

Le calcul des pôles peut être compliqué dans le cas d'un système d'ordre élevé, on fait appel donc à des méthodes algébriques tel que le critère de Routh, critère De Jury, ...

1.6.1 Critère De Jury

Soit le système asservi à retour unitaire représenté par la figure suivante :

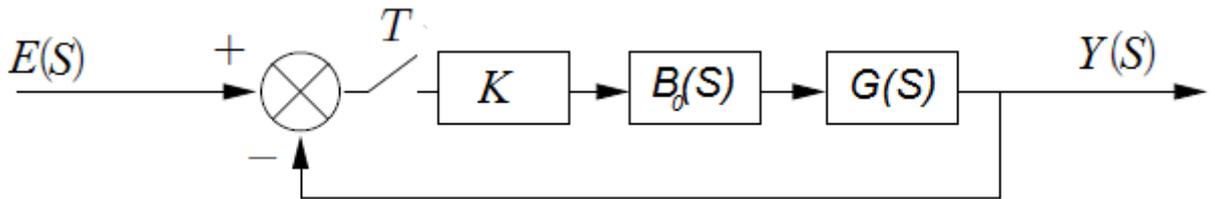


FIGURE 1.16 – Système asservi à retour unitaire et un gain avec un seul échantillonneur.

La fonction de transfert en boucle fermée de ce système est :

$$\frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{T(z)}{1 + T(z)}$$

Avec : $T(z)$ = Transformée en Z de $[KB_0(s)G(s)]$

Soit :

$$P(z) = 1 + T(z)$$

On appelle l'équation caractéristique du système l'équation $P(z) = 0$.

Soit

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

Avec : $a_0 > 0$.

Le tableau de jury est donné par :

	z^0	z^1	z^2	z^3	\dots	z^{n-2}	z^{n-1}	z^n
1	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}		a_2	a_1	a_0
2	a_0	a_1	a_2	a_3		a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
3	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	b_{n-4}		b_1	b_0	
4	b_0	b_1	b_2	b_3		b_{n-2}	b_{n-1}	
5	c_{n-2}	c_{n-3}	c_{n-4}	c_{n-5}		c_0		
6	c_0	c_1	c_2	c_3		c_{n-2}		
\dots								
$2n - 5$	p_3	p_2	p_1	p_0				
$2n - 4$	p_0	p_1	p_2	p_3				
$2n - 3$	q_2	q_1	q_0					

Les coefficients du tableau peuvent être calculés comme suite :

$$b_k = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1-k} \\ a_0 & a_{k+1} \end{vmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

$$c_k = \begin{vmatrix} b_{n-1} & b_{n-2-k} \\ b_0 & b_{k+1} \end{vmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-2.$$

Et ainsi de suite jusqu'à :

$$q_k = \begin{vmatrix} p_3 & p_{2-k} \\ p_0 & p_{k+1} \end{vmatrix}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Théorème Le critère de stabilité par la méthode de jury est donné par :

Un système dont l'équation caractéristique $P(z) = 0$ de la forme :

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

Est stable si et seulement si :

1. $|a_n| < a_0$
2. $P(1) > 0$
3. $(-1)^n P(-1) > 0$
4. $|b_{n-1}| > |b_0|$
5. $|c_{n-2}| > |c_0|$
- ⋮
- ⋮
- $|q_2| > |q_0|$

1.6. ÉTUDE DE LA STABILITÉ D'UN SYSTÈME ÉCHANTILLONNÉ

Exemple Soit le système échantillonné représenté par la figure suivante :

Avec : $R(z) = 1$ et $G(z) = \frac{(z - 0.2)}{(z - 0.37)(z - 0.13)}$

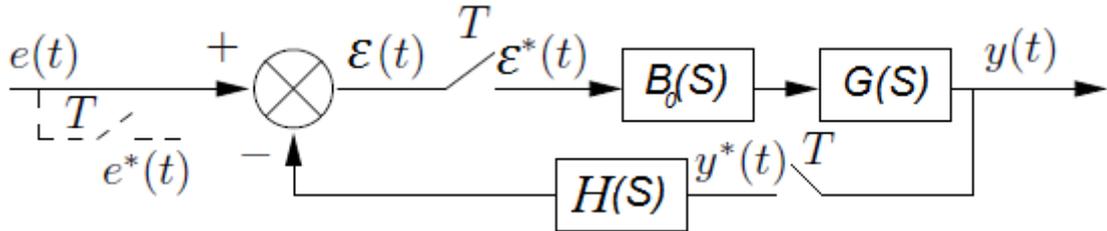


FIGURE 1.17 – Système asservi à retour unitaire avec régulateur et deux échantillonneurs.

Le problème est l'étude de la stabilité du système en utilisant le critère de Jury. Tout d'abord on doit trouver l'équation caractéristique (le dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée égale 0).

La fonction de transfert en boucle fermée de ce système est donnée par :

$$F(z) = \frac{z - 0.2}{(z - 0.37)(z - 0.13) + (z - 0.2)} = \frac{z - 0.2}{z^2 + 0.5z - 0.1519}$$

Donc l'équation caractéristique est :

$$P(z) = z^2 + 0.5z - 0.1519 = 0$$

$$P(1) = 1.3481$$

$$P(-1) = 0.3481$$

Pour que le système soit stable, il faut :

$$\begin{aligned} P(1) &= 1.3481 > 0 \\ (-1)^n P(-1) &> 0 \Rightarrow 0.3481 > 0 \text{ car } n = 2 \end{aligned}$$

On forme maintenant le tableau de jury

	z^0	z^1	z^2
1	-0.1519	0.5	1
2	1	0.5	-0.1519
3	-0.9769	-0.5759	
4	-0.5759	-0.9769	
5	0.6226		

Nous avons :

$$\begin{aligned} |a_n| &< a_0 \Rightarrow 0.1519 < 1 \\ |b_{(n-1)}| &> |b_0| \Rightarrow 0.9769 > 0.5759 \end{aligned}$$

Donc le système est stable.

1.6.2 Critère de Routh

Soit un système asservi échantillonné dont l'équation caractéristique est :

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

En remplaçant Z par $\left(\frac{w+1}{w-1}\right)$ on obtient :

$$P(w) = a_0 \left(\frac{w+1}{w-1}\right)^n + a_1 \left(\frac{w+1}{w-1}\right)^{n-1} + \dots + a_{n-1} \left(\frac{w+1}{w-1}\right) + a_n$$

En multipliant le polynôme $P(w)$ par $(w-1)^n$ nous obtenons le nouveau polynôme $Q(w)$ Qui peut être représenté par :

$$Q(z) = b_n w^n + b_{n-1} w^{n-1} + \dots + b_1 w + b_0 = 0$$

On peut donc appliquer le théorème de Routh tel qu'il est donné on continu en remplaçant juste l'opérateur de Laplace s par w .

Le tableau de Routh peut être donné par :

w^n	b_n	b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}	\dots
w^{n-1}	b_{n-1}	b_{n-3}	b_{n-5}	\dots	\dots
w^{n-2}	x_{n-2}	x_{n-3}	x_{n-4}	\dots	\dots
w^{n-3}	y_{n-3}	y_{n-4}	\dots	\dots	\dots
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
w^0	Valeurs de même signe				

Avec :

$$x_{n-2} = \frac{b_{n-1}b_{n-2} - b_n b_{n-3}}{b_{n-1}}$$

$$x_{n-3} = \frac{b_{n-1}b_{n-4} - b_n b_{n-5}}{b_{n-1}}$$

$$x_{n-4} = \frac{b_{n-1}b_{n-6} - b_n b_{n-7}}{b_{n-1}}$$

La ligne suivante est donnée par :

$$y_{n-3} = \frac{x_{n-2}b_{n-3} - b_{n-1}x_{n-3}}{x_{n-2}}$$

Et ainsi de suite pour les autres coefficients.

Théorème Le système est stable si est seulement si tous les coefficients de la première colonne sont de même signe.

1.7 Etude de la précision d'un système échantillonné

Un système est robuste s'il est caractérisé par les trois qualités suivantes : stabilité, rapidité et précision.

Dans cette partie nous allons étudier la précision d'un système asservi numérique. Les systèmes bouclés considérés ici sont supposés stables.

La précision peut être définie par la capacité d'un système à suivre une consigne particulière donnée avec une certaine erreur qui doit être limitée par le cahier des charges.

Dans cette partie on s'intéresse à la précision dite statique qui est définie par : la limite d'erreur au bout d'un temps assez grand (supérieur au temps de réponse libre).

Pour étudier la précision statique, on considère le système asservi représenté par le schéma bloc suivant :

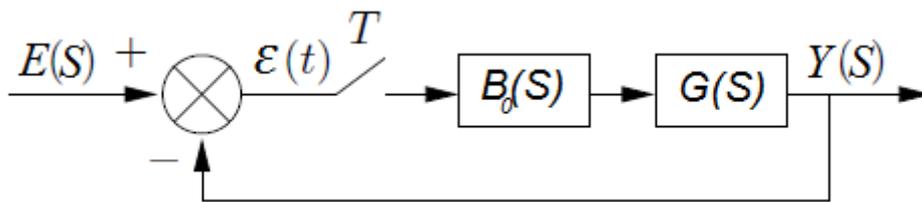


FIGURE 1.18 – Système asservi à retour unitaire avec un seul échantillonneur.

La transformée en Z de l'erreur $\varepsilon(t)$ est donnée par :

$$\varepsilon(z) = \frac{1}{1 + T(z)} E(z) \text{ Avec } T(z) \text{ est la transformée en } Z \text{ de } [B_0(s)G(s)].$$

On considère que le système est stable donc le théorème de la valeur finale nous donne :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \varepsilon(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \varepsilon(z) \Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} \varepsilon(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{z-1}{z} \right) \left(\frac{1}{1 + T(z)} \right) E(z)$$

On voit bien que l'erreur statique dépend de l'entrée $E(z)$.

La fonction de transfert $G(s)$ est de la forme : $G(s) = \frac{k}{s^c} \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{k}{s^c} G_p(s)$.

Avec : c le nombre d'intégrateurs dans $G(s)$, il nous indique la classe du système.

$T(z)$ peut avoir la forme suivante : $T(z) = (1 - z^{-1})Z \left[\frac{k}{s^{c+1}} G_p(s) \right]$.

Suivant l'entrée $E(z)$ le type de l'erreur statique peut être défini comme suit :

- Si l'entrée est un échelon unité : on parle de l'erreur statique de position.
- Si l'entrée est une rampe : on parle de l'erreur statique de vitesse.
- Si l'entrée est une parabole : on parle de l'erreur statique d'accélération.

La valeur de l'erreur statique peut être résumée dans le tableau suivant :

	$c = 0$	$c = 1$	$c = 2$	$c > 2$
Erreur statique de position ε_p	$\left(\frac{1}{1+k} \right)$	0	0	0
Erreur statique de vitesse ε_v	∞	$\left(\frac{T}{k} \right)$	0	0
Erreur statique d'accélération ε_a	∞	∞	$\left(\frac{T^2}{k} \right)$	0

Avec c : le nombre d'intégrateurs dans $G(z)$.

Exemple Supposant que $G(s) = \frac{k}{s+1}$ et on veut une erreur statique de position inférieur ou égal à 0.05.

$$G(s) = \frac{k}{s+1} \Rightarrow T(z) = (1 - z^{-1}) \left[\frac{k}{s(s+1)} \right] (z)$$

Avec : $\left[\frac{k}{s(s+1)} \right] (z)$ est la transformée en Z de $\left[\frac{k}{s(s+1)} \right]$

Donc :

$$T(z) = k(1 - z^{-1}) \frac{(1 - e^{-1})z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-1}z^{-1})} = k \frac{(1 - e^{-1})}{z - e^{-1}}$$

L'erreur statique est donnée par :

$$\begin{aligned} \varepsilon(z) = \frac{z - e^{-1}}{(z - e^{-1}) + k(1 - e^{-1})} E(z) \Rightarrow \varepsilon_p &= \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{z-1}{z} \right) \frac{(z - e^{-1})}{(z - e^{-1}) + k(1 - e^{-1})} \left(\frac{z}{z-1} \right) \\ &= \frac{(1 - e^{-1})}{(1 - e^{-1}) + k(1 - e^{-1})} \\ &= \frac{1}{1+k} \end{aligned}$$

$$\varepsilon_p \leq 0.05 \Rightarrow \frac{1}{1+k} \leq 0.05$$

Donc k doit être supérieur ou égal à 19.

Chapitre 2

Analyse des systèmes échantillonnés dans l'espace d'état

2.1 Introduction

Dans le domaine continu, l'aspect dynamique des systèmes est décrit par des équations différentielles que l'on suppose dans ce cours des équations linéaires et stationnaires (coefficients constants). Parmi les représentation des systèmes dynamique, on s'intéresse dans cette partie à la représentation d'état qui nous permet d'utiliser les techniques de calcul disponibles en algèbre linéaire, ainsi que des outils de synthèse des lois de commande puissants tel-que le placement de pôles, commande optimale linéaire quadratique, commande linéaire quadratique gaussienne, commande H_∞ , μ -synthèse, ...

Dans cette partie nous allons faire l'étude des systèmes dans l'espace d'état, pour cela nous allons commencer par la mettre en œuvre la représentation d'état à travers un exemple en continu.

Exemple Soit le circuit RLC série représenté par la figure suivante :

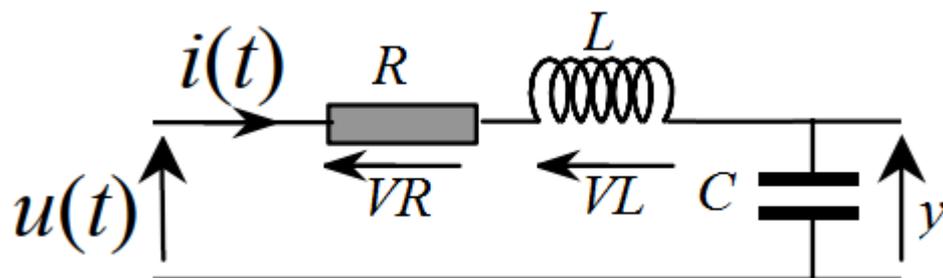


FIGURE 2.1 – Circuit RLC série.

CHAPITRE 2. ANALYSE DES SYSTÈMES ÉCHANTILLONNÉS DANS L'ESPACE D'ÉTAT

Ce système peut être représenté par l'équation différentielle suivante :

$$u(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + y(t) \quad (2.1)$$

Et :

$$y(t) = \frac{1}{C} \int i(t)dt \Rightarrow i(t) = C\frac{dy(t)}{dt}$$

En remplaçant $i(t)$ par son expression dans l'équation (2.1) nous obtenons l'équation différentielle suivante :

$$LC\ddot{y} + RC\dot{y} + y - u = 0$$

On pose :

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{LC}x_1 - \frac{R}{L}x_2 + \frac{1}{LC}u \end{cases}$$

Ces équations peuvent s'écrire comme suite :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} u(t) \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0 U(t) \end{aligned}$$

Cette représentation que l'on appelle représentation d'état du système elle est sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

Avec :

u : Le vecteur d'entrée du système est de dimension $n \times m$, avec n : l'ordre du système et m : le nombre d'entrées ($u \in \mathbb{R}^{n \times m}$).

y : Le vecteur de sortie du système il est de dimension $n \times p$ ($y \in \mathbb{R}^{n \times p}$), avec p : nombre de sorties.

x : Le vecteur d'état est de dimension $n \times 1$ ($x \in \mathbb{R}^n$).

A : Matrice d'état est de dimension $n \times n$ ($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$).

B : Matrice d'entrée est de dimension $n \times m$ ($B \in \mathbb{R}^{n \times m}$).

C : Matrice de sortie est de dimension $p \times n$ ($C \in \mathbb{R}^{p \times n}$).

D : Matrice de couplage est de dimension $p \times m$ ($D \in \mathbb{R}^{p \times m}$).

2.2. DISCRÉTISATION DE L'ÉQUATION D'ÉTAT D'UN SYSTÈME CONTINU

Le modèle d'état peut être représenté par le schéma suivant :

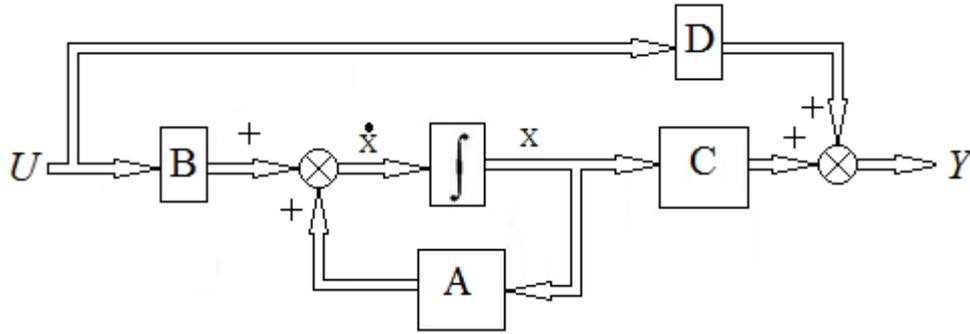


FIGURE 2.2 – Schéma fonctionnel d'un système continu représenté dans l'espace d'état.

2.2 Discrétisation de l'équation d'état d'un système continu

Dans cette partie nous allons voir la discrétisation de l'équation d'état. Pour cela on va tous d'abord résoudre l'équation d'état continu. Prenant l'équation d'état dans le cas général :

$$\dot{x} = Ax + Bu \Rightarrow \dot{x} - Ax = Bu$$

En multipliant cette dernière équation par e^{-At} nous obtenons :

$$e^{-At}[\dot{x} - Ax] = \frac{d}{dt}[e^{-At}x(t)] = e^{-At}Bu(t)$$

L'intégration de cette équation entre 0 et t nous donne :

$$e^{-At}x(t) = x(0) + \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \Rightarrow x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

Donc la solution de l'équation d'état continue est :

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

On passe maintenant à la discrétisation de l'équation d'état

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

L'équation d'état discrète est de la forme suivante :

$$x((k+1)T_e) = G(T_e)x(kT_e) + H(T_e)u(kT_e)$$

Pour trouver les matrices $G(T_e)$ et $H(T_e)$ nous utilisons la solution de l'équation d'état continue en remplaçant t par kT_e .

Soit :

$$x(kT_e) = e^{AkT_e}x(0) + e^{A(kT_e)} \int_0^{kT_e} e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau \quad (2.2)$$

Sachant que $u(t) = u(kT_e)$ pour $kT_e \leq t < (k+1)T_e$

$$x((k+1)T_e) = e^{A(k+1)T_e}x(0) + e^{A((k+1)T_e)} \int_0^{(k+1)T_e} e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau \quad (2.3)$$

La multiplication de l'équation (2.2) par e^{AT_e} et la soustraire de l'équation (2.3) on trouve :

$$x((k+1)T_e) = e^{AT_e}x(kT_e) + e^{A((k+1)T_e)} \int_{kT_e}^{(k+1)T_e} e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau$$

Cette dernière équation peut être écrit sous la forme :

$$x((k+1)T_e) = e^{AT_e}x(kT_e) + e^{AT_e} \int_0^{T_e} e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau \quad (2.4)$$

On pose : $\lambda = T_e - t$ l'équation (2.4) devient :

$$x((k+1)T_e) = e^{AT_e}x(kT_e) + \int_0^{T_e} e^{A\lambda} Bu(kT_e) d\lambda$$

Donc les matrices $G(T_e)$ et $H(T_e)$ sont donné par :

$$G(T_e) = e^{AT_e} \text{ et } H(T_e) = \left(\int_0^{T_e} e^{A\lambda} d\lambda \right) B = A^{-1}(e^{AT_e} - I)B$$

2.3 Représentation et résolution de l'équation d'état d'un système discret

L'équation d'état discrète est donnée par :

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

la solution de cette équation est obtenue par récurrence :

Nous avons :

2.3. REPRÉSENTATION ET RÉOLUTION DE L'ÉQUATION D'ÉTAT D'UN SYSTÈME DISCRET

$$\begin{aligned}
 x(1) &= Ax(0) + Bu(0) \\
 x(2) &= Ax(1) + Bu(1) &= A^2x(0) + ABu(0) + Bu(1) \\
 x(3) &= Ax(2) + Bu(2) &= A^3x(0) + A^2Bu(0) + ABu(1) + Bu(2) \\
 \dots & \\
 x(k) &= Ax(k-1) + Bu(k-1) &= A^kx(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1}Bu(i)
 \end{aligned}$$

Donc la solution de l'équation d'état discrète est donnée par :

$$A^kx(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1}Bu(i) \text{ pour } k = 0, 1, 2, \dots$$

Qui peut s'écrire de la forme suivante :

$$x(k) = A^kx(0) + \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{k-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k-1) \\ u(k-2) \\ \dots \\ u(0) \end{bmatrix}$$

avec : $k = 0, 1, 2, \dots$

2.3.1 Observabilité et Commandabilité

Pour l'étude de contrôlabilité et d'observabilité on considère le système représenté par le modèle d'état suivant :

$$\begin{cases}
 x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\
 y(k) &= Cx(k) + Du(k)
 \end{cases}$$

Commandabilité

Parmi les objectifs de la commande dans l'espace d'état est de transférer le système d'un état initial quelconque vers un état désiré. Et cela ne peut être atteint que si le système est commandable.

Une condition nécessaire et suffisante pour que le système soit commandable est que le rang de la matrice de commandabilité égal l'ordre du système, on dit que la matrice de commandabilité est de rang complet et que le système est complètement commandable.

La matrice de commandabilité est donnée par :

$$\varphi = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

Pour que le système soit commandable il faut que :

$$\text{rang}(\varphi) = n$$

Observabilité

L'observabilité d'un système dans l'espace d'état nous permet de reconstruire 1 ou plusieurs états non mesurables.

Pour que le système soit observable il faut que la matrice d'observabilité soit de *rang* complet c'est-à-dire :

$$\text{rang}(\vartheta) = n$$

Avec ϑ est la matrice d'observabilité définie par :

$$\vartheta = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

2.3.2 Différentes formes de la matrice d'évolution

Il existe plusieurs formes pour représenter un système dans l'espace d'état. Selon le but (faire la commande où la synthèse des observateurs).

On peut représenter un système dans l'espace d'état par l'une des formes suivantes :

Formes compagne pour la commande, Formes compagne pour l'observabilité, Formes modales où Formes diagonale.

Dans ce qui suit nous allons présenter en détaille ces différentes formes.

Formes modales ou Formes diagonales

Soit la représentation d'état d'un système échantillonné donné par :

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

On considère que les vecteurs propres de la matrice A sont distincts. Nous définissons la matrice P contenant les vecteurs propres de la matrice A . La forme modale de notre système est donnée par :

$$\begin{cases} x_m(k+1) = P^{-1}APx_m(k) + P^{-1}Bu(k) \\ y_m(k) = Cx_m(k) + Du(k) \end{cases}$$

La nouvelle Matrice d'état $\hat{A} = P^{-1}AP$ elle est diagonale de la forme :

$$\hat{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

2.3. REPRÉSENTATION ET RÉOLUTION DE L'ÉQUATION D'ÉTAT D'UN SYSTÈME DISCRET

Et la nouvelle matrice d'entrée $\hat{B} = P^{-1}B$.

Exemple Soit le système :

$$\begin{cases} x_1(k+1) &= x_1(k) + 4x_2(k) + 2u(k) \\ x_2(k+1) &= 3x_1(k) + 2x_2(k) + 3u(k) \\ y(k) &= x_1(k) \end{cases}$$

Donc les matrices A , B , C et P sont donnée par :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0], P = \begin{bmatrix} -0.8 & -0.7071 \\ 0.6 & -0.7071 \end{bmatrix} \text{ et} \\ P^{-1} = \begin{bmatrix} -0.7143 & 0.7143 \\ -0.6061 & -0.8081 \end{bmatrix}$$

Les matrices \hat{A} et \hat{B} sont données par :

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} 0.7143 \\ -3.6365 \end{bmatrix}$$

Donc la forme modal de ce système est donnée par :

$$\begin{cases} x_1(k+1) &= -2x_1(k) + 0.7143u(k) \\ x_2(k+1) &= 5x_2(k) - 3.6365u(k) \\ y(k) &= x_1(k) \end{cases}$$

Formes compagne pour la commande

Dans cette partie nous allons montrer comment trouver la forme compagne pour la commande

. Il faut d'abord vérifier que le système est commandable.

Soit le système suivant que l'on considère contrôlable :

$$\begin{cases} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

La forme compagne pour la commande consiste à trouver les matrices \hat{A} et \hat{B} en utilisant la matrice de transformation suivante :

$T = \varphi W$, avec φ la matrice de contrôlabilité et :

$$W = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

CHAPITRE 2. ANALYSE DES SYSTÈMES ÉCHANTILLONNÉS DANS L'ESPACE D'ÉTAT

Les coefficients a_i de la matrice W sont obtenus à partir de l'équation caractéristique du système défini par :

$$|zI - A| = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ \alpha_n & \alpha_{n-1} & \dots & \dots & \alpha_1 \end{bmatrix}$$

Avec les α_i des réels non nuls.

$$\hat{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \hat{C} = CT \text{ et } \hat{D} = D$$

Exemple Prenons l'exemple précédent :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Le polynôme caractéristique est :

$$|zI - A| = z^2 - 3z - 10$$

Donc :

$$W = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ et } \varphi = \begin{bmatrix} 2 & 14 \\ 3 & 12 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rang}(\varphi) = 2$$

donc le système est complètement commandable.

$$T = \varphi W = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \hat{C} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \end{bmatrix}$$

Formes compagne pour l'observabilité

Pour un système observable de la forme :

$$\begin{cases} x(k+1) & = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) & = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

2.3. REPRÉSENTATION ET RÉOLUTION DE L'ÉQUATION D'ÉTAT D'UN SYSTÈME DISCRET

On peut passer à la forme compagne pour l'observabilité en utilisant la matrice $Q = W\vartheta$.

Avec : ϑ matrice d'observabilité.

La forme de la matrice d'observabilité est donnée par :

$$\hat{A} = QAQ^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \\ 1 & 0 & \ddots & : & \alpha_{n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \alpha_{n-2} \\ : & \ddots & 1 & 0 & : \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha_1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = Q^{-1}C = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1].$$

$$\hat{B} = BQ, \hat{D} = D.$$

Exemple Prenant l'exemple précédent :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 1], W = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \vartheta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rang}(\vartheta) = 2$$

Donc le système est complètement Observable.

$$Q = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow Q^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Donc :

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \hat{B} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}, \hat{C} = [0 \quad 1]$$

2.3.3 Stabilité et précision d'un système discret

En automatique l'étude de la stabilité joue un rôle très important, pour cela les chercheurs en automatique ont développé des méthodes permettant d'étudier la stabilité dans les différents domaines de l'automatique. Dans cette partie on s'intéresse à la localisation des pôles dans plans complexe.

Théorème Un système est stable si tous ses pôles sont situés à l'intérieur du cercle unité.

Racines de l'équation caractéristique

Les pôles du système sont les racines de l'équation caractéristique. Les pôles d'un système représenté par les équations d'état sont les valeurs propres de la matrice A . Les valeurs propres de la matrice A sont donné par :

$$|\lambda I - A| = 0$$

Avec I matrice identité de dimension $n \times n$.

Exemple Reprenant le même exemple précédent :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 1]$$

Les pôles de ce système sont donnés par :

$$\begin{aligned} |zI - A| = 0 &\Rightarrow \left| \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \right| = 0 \\ &\Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 4 \\ 3 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{31}}{2} \end{aligned}$$

Donc le système n'est pas stable.

Modes commandables

Si un système n'est pas complètement commandable c'est-à-dire : $\text{rang}(\varphi) = r < n$ cela signifie qu'il existe r modes commandables est $n - r$ modes non commandables.

Modes observables

Si un système n'est pas complètement observable c'est-à-dire $\text{rang}(\vartheta) = r < n$ cela signifié qu'il existe r modes observables est $n - r$ modes non observables.

2.3. REPRÉSENTATION ET RÉOLUTION DE L'ÉQUATION D'ÉTAT D'UN SYSTÈME DISCRET

Exemple Soit un système représenté dans l'espace d'état par :

$$\begin{cases} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

Avec :

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 1 \quad 1].$$
$$\varphi = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 & -0.25 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rang}(\varphi) = 2$$

Donc nous avons deux modes commandable sont $z = -0.5$ et $z = 1$, ainsi qu'un seul mode non commandable qui est $z = 0.5$.

$$\vartheta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0.25 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rang}(\vartheta) = 2$$

Donc nous avons deux modes observables sont $z = 1$ et $z = 0.5$, ainsi qu'un seul mode non observable qui est $z = -0.5$.

Chapitre 3

Synthèse d'un contrôleur

Dans le chapitre précédent nous avons vu deux concepts fondamentaux de commande des systèmes : la contrôlabilité et l'observabilité. Ces deux concepts jouent un rôle très important dans la commande optimale des systèmes multi-variables.

Dans ce chapitre nous allons voir dans la première partie, comment synthétiser une loi de commande par retour d'état ainsi que la synthèse d'un observateur d'état ou estimateur d'état. La deuxième partie est consacrée à la synthèse des lois de commande pour les systèmes numériques, tel que le régulateur *PID* numérique et le contrôleur *RST*.

3.1 Placement de pôles par retour d'état et par retour de sortie

3.1.1 Placement de pôles par retour d'état

Dans cette partie, nous allons présenter une méthode de régulation dans l'espace d'état appelée méthode de placement de pôles.

Pour pouvoir appliquer cette méthode le système doit être complètement commandable ou les modes non commandable sont stables. Dans ce cas les pôles de système en boucle fermée peuvent être librement choisis.

Soit un système représenté dans l'espace d'état par les équations suivantes :

$$\begin{cases} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

La première étape de cette méthode consiste à déterminer les pôles désirés de la boucle fermée. Ces pôles sont choisis afin de satisfaire un cahier des charges désiré. On considère que les pôles désirés sont $z_1 = \mu_1, z_2 = \mu_2, \dots, z_n = \mu_n$. La deuxième

3.1. PLACEMENT DE PÔLES PAR RETOUR D'ÉTAT ET PAR RETOUR DE SORTIE

étape consiste à trouver la matrice des gains du retour d'état permettant de placer les pôles en boucle fermée aux endroit imposé par le cahier des charges, pour cela on considère l'entrée $u(k) = -Kx(k) + Gv$ Le gain G a pour but d'ajuster la sortie y afin d'avoir en régime permanent un écart nul entre la sortie y et l'entrée v .

Le système corrigé devient :

$$\begin{cases} x(k+1) &= Ax(k) + B[-Kx(k) + Gv] \\ y(k) &= Cx(k) + D[-Kx(k) + Gv] \end{cases}$$

Donc le système devient :

$$\begin{cases} x(k+1) &= [A - BK]x(k) + BGv \\ y(k) &= Cx(k) + D[-Kx(k) + Gv] \end{cases}$$

Avec : K La matrice de gain du retour d'état est de dimension $m \times n$ ($K \in \mathbb{R}^{m \times n}$).
Ce nouveau système peut être représenté par le schéma bloc suivant :

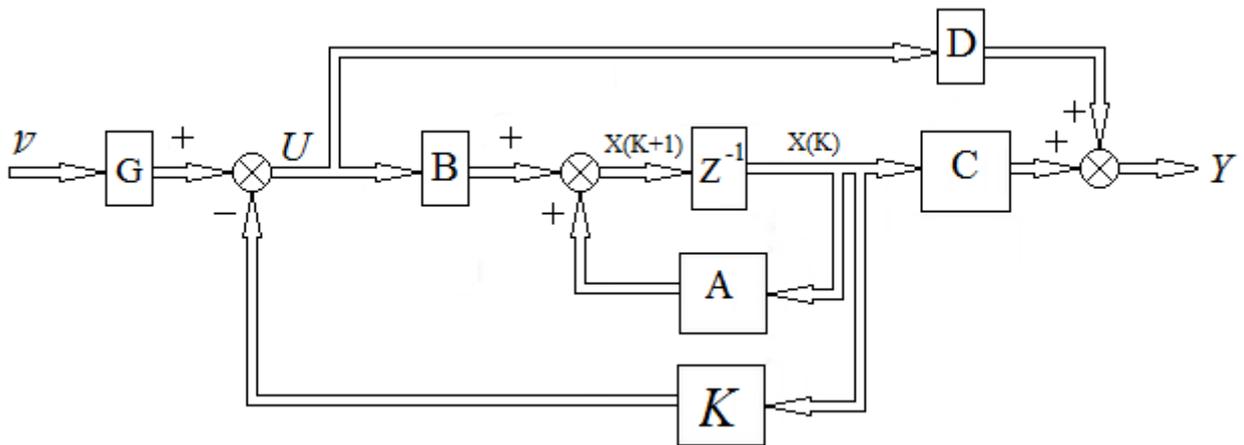


FIGURE 3.1 – Schéma fonctionnel d'un système discret corrigé par la méthode de placement de pôles.

Les pôles de ce nouveau système sont les valeurs propres de la nouvelle matrice d'état :

$$A_1 = [A - BK]$$

Le gain G peut être calculer de la manière suivante :

$$v = y = Cx(k) + D[-Kx(k) + Gv] \Rightarrow v = y = (C - DK)x(k) + DGv$$

L'équation d'état nous donne :

$$[(BK - A)]x(k) = BGv \Rightarrow x(k) = (BK - A)^{-1}BGv$$

En remplaçant $x(k)$ dans la première équation nous obtenant :

$$v = y = [(C - DK)(BK - A)^{-1}B + D]Gv \Rightarrow G = [(C - DK)(BK - A)^{-1}B + D]^{-1}$$

On constate que G est le gain statique du système.

Exemple On considère le système représenté par :

$$\begin{cases} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

Avec : $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Puis qu'il s'agit de la commande par retour d'état, nous ne sommes pas intéressés à la matrice de sortie et la matrice de couplage.

Les pôles de ce système sont les valeurs propres de la matrice A .

Donc :

$$|ZI - A| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} z & -1 \\ 0.16 & z + 1 \end{vmatrix} = z^2 + z + 0.16 = 0$$

Ce qui nous donne les pôles : $Z_1 = -0.8$ et $Z_2 = -0.2$ Nous souhaitant placer les pôles en : $Z_{1,2} = 0.5 \pm 0.5j$ ce qui nous donne l'équation d'état désiré suivante :

$$Z^2 - Z + 0.5 = 0$$

Le système est du deuxième ordre avec une seule entrée donc la matrice de gain est de dimension (1×2) une ligne et deux colonnes donc $K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$.

Avant de synthétiser la loi de commande par retour d'état, nous commençons par tester la commandabilité du système.

La matrice de commandabilité est donnée par :

$$\varphi = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rang}(\varphi) = 2$$

Donc le système est complètement commandable donc nous pouvons synthétiser une loi de commande par retour d'état permettant de placer les pôles en :

$$Z = 0.5 \pm 0.5j.$$

La nouvelle matrice d'état est :

3.1. PLACEMENT DE PÔLES PAR RETOUR D'ÉTAT ET PAR RETOUR DE SORTIE

$$A_1 = [A - BK] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(K_1 + 0.16) & -(K_2 + 1) \end{bmatrix}$$

La nouvelle équation d'état est donnée par :

$$|ZI - [A - BK]| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} z & -1 \\ (K_1 + 0.16) & z + (K_2 + 1) \end{vmatrix} = 0$$

Ce qui nous donne : $Z^2 + (K_2 + 1)Z + (K_1 + 0.16) = 0$.

Par identification avec le polynôme désiré nous obtenant :

$$K_1 = 0.34 \text{ et } K_2 = -2$$

la dernière étape est de trouver G permettant d'annuler l'écart entre l'entrée et la sortie.

$$G = (C(BK - A)^{-1}B)^{-1} = 0.5$$

Les réponses du système avant et après régulation sont données par les figures suivantes : "

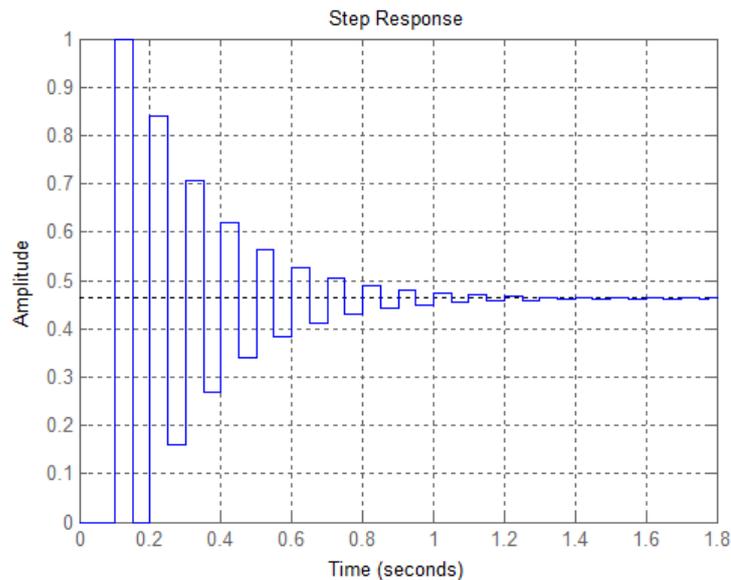


FIGURE 3.2 – Réponse du système avant régulation.

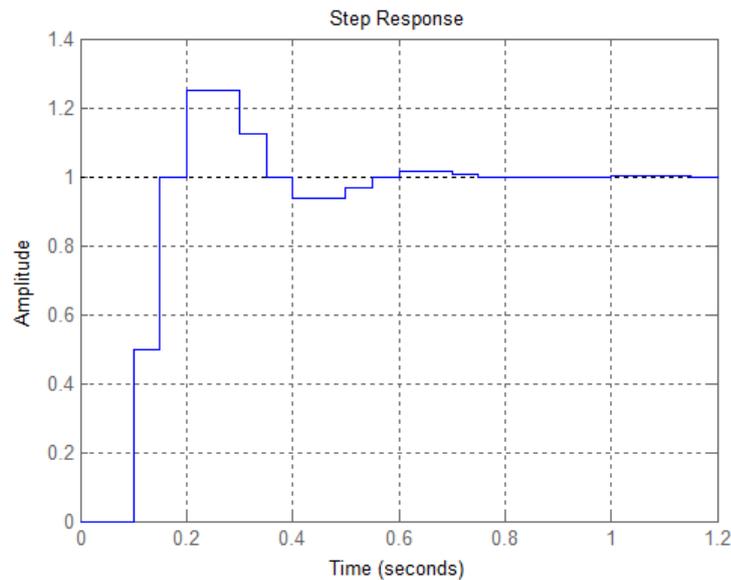


FIGURE 3.3 – Réponse du système après régulation.

On constate que nous avons obtenu une réponse indicielle meilleure par rapport au système non corrigé, ainsi qu'une erreur statique très réduite et cela grâce au gain G .

3.1.2 Synthèse de lois de commande simples

Nous avons vu que la commande par retour d'état est une méthode très simple à implémenter. Cependant si le système n'est pas complètement commandable et les modes non commandables ne sont pas stables, cette méthode ne sera pas utilisable. Dans ce cas, nous pouvons faire appel aux autres méthodes. Dans cette partie nous allons présenter une commande qui nous permet de stabiliser les pôles commandables dans un système non complètement commandable.

Cette méthode est appelée la commande modale.

Soit un système représenté dans l'espace d'état comme suite :

$$\begin{cases} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

La forme modale de ce système est donnée par :

$$\begin{cases} x(k+1) &= \hat{A}x(k) + \hat{B}u(k) \\ y(k) &= \hat{C}x(k) + \hat{D}u(k) \end{cases}$$

3.1. PLACEMENT DE PÔLES PAR RETOUR D'ÉTAT ET PAR RETOUR DE SORTIE

Considérant que ce système contient p pôles commandable est $(n - p)$ pôles non commandable.

L'équation d'état de ce système peut s'écrire de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} K_p(k+1) \\ K_{n-p}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_p & 0 \\ 0 & \hat{A}_{n-p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_p(k) \\ K_{n-p}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_p \\ \hat{B}_{n-p} \end{bmatrix} u(k)$$

Où :

\hat{A}_p : sous matrice $(p \times p)$ Nord-ouest de \hat{A} .

\hat{A}_{n-p} : sous matrice $(n - p) \times (n - p)$ Sud-est de \hat{A} .

\hat{B}_p : Sous-matrice contenant les p première lignes de \hat{B} .

\hat{B}_{n-p} : Sous-matrice contenant les $(n - p)$ dernière lignes de \hat{B} .

Il devient :

$$\begin{cases} x_p(k+1) & = \hat{A}_p x_p(k) + \hat{B}_p u(k) \\ x_{n-p}(k+1) & = \hat{A}_{n-p} x_{n-p}(k) + \hat{B}_{n-p} u(k) \end{cases}$$

La commande modale consiste a remplacé les p premières pôles (z_1, z_2, \dots, z_p) par les pôles désirés $(z_{k1}, z_{k2}, \dots, z_{kp})$ et le système reste diagonal. Donc chaque *mod* est régulé de façon autonome. L'objectif est d'avoir un système bouclé, a comme équation d'état :

$$x_p(k+1) = \hat{A}_{kp} x_p(k) \quad (3.1)$$

Avec :

$$\hat{A}_{kp} = \begin{bmatrix} z_{k1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & z_{kp} \end{bmatrix}$$

L'équation 3.1 nous donne :

$$\hat{A}_p x_p(k) + \hat{B}_p u(k) = \hat{A}_{kp} x_p(k) \Rightarrow u(k) = -\hat{B}_p^{-1}(\hat{A}_p - \hat{A}_{kp})x_p(k)$$

Pour cela la matrice \hat{B}_p doit être carré. Est le système devient :

$$\begin{cases} x_p(k+1) & = \hat{A}_{kp} x_p(k) \\ x_{n-p}(k+1) & = -\hat{B}_{n-p} \hat{B}_p^{-1}(\hat{A}_p - \hat{A}_{kp})x_p(k) + \hat{A}_{n-p} x_{n-p}(k) \end{cases}$$

Donc les pôles commandable peuvent être placer librement.

Exemple Soit le système représenté par les équations d'états suivantes :

$$\begin{cases} x(k+1) &= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= [1 \quad 1] x(k) \end{cases}$$

Nous souhaitons placer les pôles en : $z = \frac{1}{2}$ et $z = -\frac{1}{3}$.

Tous d'abord on doit vérifier si le système est commandable :

$$\varphi = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rang}(\varphi) = 1$$

Donc le système n'est pas complètement commandable.

Les pôles de ce système sont :

$$|zI - A| = 0 \Rightarrow z_1 = 2 \text{ et } z_2 = 1/2$$

On constate que le pôle z_1 n'est pas stable mais il est commandable.

Afin de satisfaire le cahier de charge, nous synthétisons une loi de commande modale permettant de stabiliser ce pôle.

Les valeurs propres sont les pôles du système, nous calculons la matrice P des vecteurs propres donnée par :

$$A \times P = P \times D \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

La forme modale du système est donnée par :

$$\hat{A} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ et } \hat{B} = P^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nous pouvons librement placer les pôles commandés, pour cela nous proposons la matrice des gains $K = [K_1 \quad K_2]$ puisque le deuxième pôle n'est pas commandable nous choisissons $K_2 = 0$.

L'équation caractéristique donnée par :

$$\lambda^2 + \left(2K_1 - \frac{5}{2}\right)\lambda + 1 - K_1 = 0$$

Par identification avec le polynôme caractéristique désiré donné par :

3.1. PLACEMENT DE PÔLES PAR RETOUR D'ÉTAT ET PAR RETOUR DE SORTIE

$$\lambda^2 - \frac{1}{6}\lambda - \frac{1}{6} = 0$$

Nous obtenons le gain $K_1 = \frac{7}{6}$.

Donc afin de stabiliser le pôle instable nous ajoutons un retour de l'état commandable avec un gain $K_1 = \frac{7}{6}$.

Le système corrigé peut être donné par le modèle obtenu dans le dernier paragraphe :

$$\begin{cases} x_p(k+1) &= \hat{A}_{kp}x_p(k) \\ x_{n-p}(k+1) &= -\hat{B}_{n-p}\hat{B}_p^{-1}(\hat{A}_p - \hat{A}_{kp})x_p(k) + \hat{A}_{n-p}x_{n-p}(k) \end{cases}$$

Avec :

$$\hat{A}_{kp} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}, \hat{A}_{n-p} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \hat{B}_p = 2, \hat{B}_{n-p} = 0.$$

Ce système non corrigé sous forme modal est représenté par le schéma bloc donné par la figure 3.4.

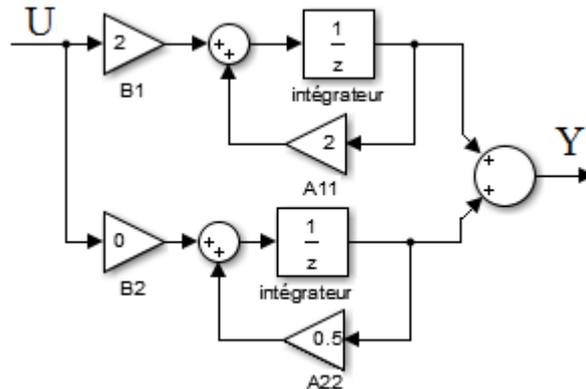


FIGURE 3.4 – schéma bloc du système sous forme modale Avant régulation.

La réponse indicielle du système non corrigé est donnée par la figure 3.5, cette réponse indique que le système est bien instable et cela à cause du pôle instable $z = 2$.

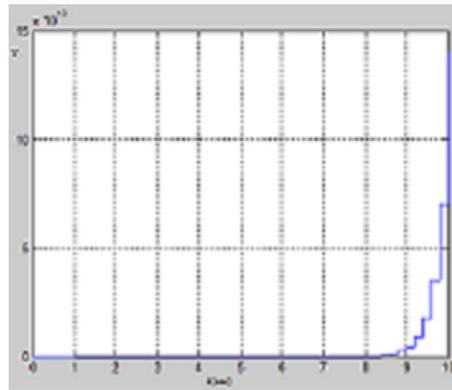


FIGURE 3.5 – Réponse indicielle du système non corrigé.

La figure 3.6 représente le schéma bloc du système corrigé par une commande modale.

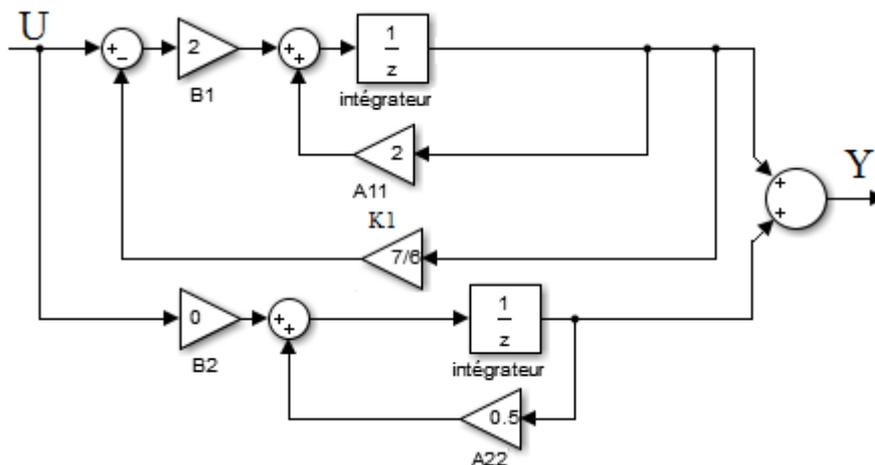


FIGURE 3.6 – Schéma bloc du système corrigé par une commande modale.

La figure 3.7 représente la réponse indicielle du système corrigé par une commande modal. De cette réponse on constate que le système est bien stable et cela peut être justifier par la stabilisation du pôle $z_1 = 2$.

3.1. PLACEMENT DE PÔLES PAR RETOUR D'ÉTAT ET PAR RETOUR DE SORTIE

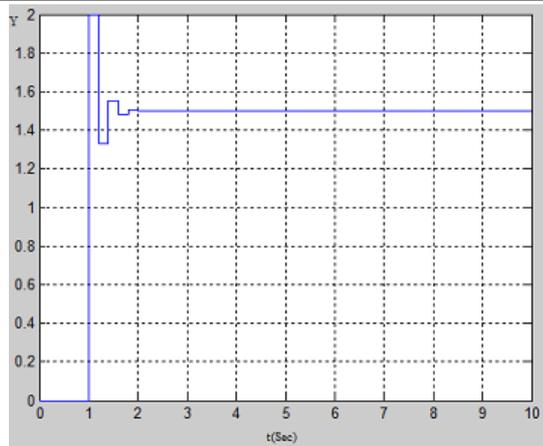


FIGURE 3.7 – Réponse indicielle du système corrigé par une commande modale.

3.1.3 Observateur d'état

Dans le paragraphe précédent nous avons présenté une méthode de régulation basée sur le placement de pôles, cette méthode utilise le bouclage de toutes les variables d'état.

Cependant, dans la pratique, c'est très rare d'avoir la possibilité de pouvoir mesurer toutes les variables d'état. Dans ce cas il est nécessaire de reconstruire (ou estimer) les états non mesurables. Cette estimation de l'état non mesurable est connue en automatique par la synthèse d'observateur.

Pour pouvoir synthétiser un observateur il faut s'assurer d'abord que le système est observable.

On considère le système représenté dans l'espace d'état par les équations suivante :

$$\begin{cases} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{cases}$$

Et que ce système soit observable c'est-à-dire :

$$\text{rang} \left(\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \right) = n.$$

L'idée de base de l'observateur que nous allons synthétiser qui s'agit d'un observateur de LUENBERGER est d'ajouter au système a commandé un autre système alimenté par les grandeurs $u(k)$ et $y(k)$ et qui est capable de délivrer en sortie une valeur approché $\hat{x}(k)$ de l'état $x(k)$.

Le système avec l'observateur de LUENBERGER peut être représenté par la figure

suivante :

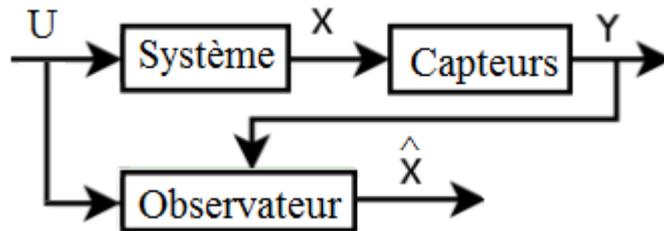


FIGURE 3.8 – Schéma bloc d'un système avec l'observateur.

La représentation d'état de l'observateur est donnée par :

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + L[y(k) - C\hat{x}(k)] \\ y(k) = C\hat{x}(k) \end{cases}$$

Où : L est la matrice de gain de l'observateur.

Le but de l'observateur est de trouver l'état reconstruit tel que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{x}(k) = x(k).$$

Soit :

$$e(k) = x(k) - \hat{x}(k) \Rightarrow e(k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1)$$

Donc :

$$\begin{aligned} e(k+1) &= Ax(k) + BU(k) - A\hat{x}(k) - Bu(k) - LC[x(k) - \hat{x}(k)] \\ e(k+1) &= (A - LC)e(k) \end{aligned}$$

La condition pour avoir : $\lim_{k \Rightarrow \infty} e(k) = 0$ est $|zI - (A - LC)| = 0$ a des pôles stables.

Exemple Soit le système représenté par :

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$$

Avec :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -0.16 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.1. PLACEMENT DE PÔLES PAR RETOUR D'ÉTAT ET PAR RETOUR DE SORTIE

Nous souhaitons synthétiser un observateur permettant de placer les pôles en : $z_1 = 0.5 + 0.5j$ et $z_2 = 0.5 - 0.5j$.

Pour cela on doit vérifier si le système est observable.

$$\vartheta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rang}(\vartheta) = 2$$

Donc le système est complètement observable.

$$|zI - (A - LC)| = 0 \Rightarrow \left| \begin{bmatrix} 0.5 + 0.5j & 0 \\ 0 & 0.5 - 0.5j \end{bmatrix} \right| = 0$$

Ce qui nous donne la matrice de gains suivante :

$$B = \begin{bmatrix} 0.34 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Cas états du système inaccessibles

Dans le cas où le système contient des états mesurables, il est inutile de reconstruire tous les états du système. Il nous suffit d'estimer que les états non mesurables.

Dans ce cas nous synthétisons un observateur d'ordre $(n - l)$ dite observateur d'ordre réduit qui nous permet d'estimer les $(n - l)$ états.

Soit un système représenté dans l'espace d'état par les équations suivantes :

$$\begin{cases} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{cases}$$

Cela nous permet de partitionner les matrices A, B, C et le vecteur d'état x comme suite :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Le modèle d'état devient :

$$\begin{cases} x_1(k+1) &= A_{11}x_1(k) + A_{12}x_2(k) + B_1u(k) \\ x_2(k+1) &= A_{21}x_1(k) + A_{22}x_2(k) + B_2u(k) \\ y(k) &= x_1(k) \end{cases}$$

D'après ces équations, les l première composantes de l'état sont directement mesurable dont nous n'avons pas besoin de les estimer.

Le schéma bloc de l'observateur d'état dans ce cas est donné par :

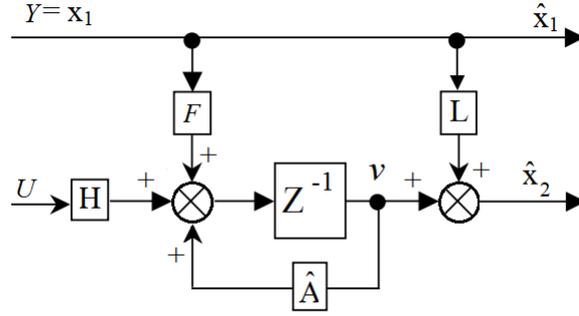


FIGURE 3.9 – Schéma bloc d'un observateur réduit.

Nous pouvons déduire les équations représentant ce système comme suite :

$$\begin{cases} \hat{x}_1(k) = x_1(k) = y(k) \\ \hat{x}_2(k) = v(k) + Ly(k) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_1(k) = x_1(k) - \hat{x}_1(k) = 0 \\ e_2(k) = x_2(k) - \hat{x}_2(k) \end{cases}$$

$$v(k+1) = \hat{A}v(k) + Fx_1(k) + Hu(k)$$

La deuxième équation nous donne :

$$\begin{cases} e_2(k+1) = x_2(k+1) - \hat{x}_2(k+1) \\ v(k) = \hat{x}_2(k) - Ly(k) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_2(k+1) = x_2(k+1) - v(k+1) - Ly(k+1) \\ \hat{x}_2(k) = v(k) + Ly(k) \end{cases}$$

Ce qui nous donne l'équation de l'erreur suivante :

$$e_2(k+1) = \alpha x_1(k) + \beta x_2(k) + \hat{A}e_2(k) + \gamma u(k)$$

Avec :

$$\begin{cases} \alpha = A_{21} - LA_{11} + \hat{A}L - F \\ \beta = A_{22} - LA_{12} + \hat{A} \\ \gamma = B_2 - LB_1 + H \end{cases}$$

Afin d'éliminer les termes $x_1(K)$, $x_2(K)$, $u(K)$ de l'équation d'erreur il faut que :

$$\begin{cases} \hat{A} = A_{22} - LA_{12} \\ F = A_{21} - LA_{11} + \hat{A}L \\ H = B_2 - LB_1 \end{cases}$$

Cela nous conduit à avoir l'équation de l'erreur suivante :

$$e_2(k+1) = \hat{A}e_2(k)$$

En fin la matrice de gain L nous permet de placer les pôles ($A_{22} - LA_{12}$) à l'intérieur du cercle unité.

3.1. PLACEMENT DE PÔLES PAR RETOUR D'ÉTAT ET PAR RETOUR DE SORTIE

Exemple On considère le système représenté par le modèle d'états suivant :

$$\begin{cases} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{cases}$$

Avec :

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.16 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0]$$

Ce qui nous donne :

$$A_{11} = 0.5, A_{12} = 0.16, A_{21} = 1, A_{22} = -0.5. \\ B_1 = 0, B_2 = 1$$

Nous souhaitons avoir un pôle double on $Z = -0.8$ donc : $L = 1.8750$

Par conséquent :

$$\begin{cases} \hat{A} &= -0.8 \\ F &= -1.4375 \\ H &= 1 \end{cases}$$

D'où l'équation de l'observateur d'ordre 1 est :

$$\begin{cases} v(k+1) &= -0.8v(k) - 1.4375y(k) + u(k) \\ \hat{x}_2(k) &= v(k) + 1.8750y(k) \end{cases}$$

Les courbes représentant $\hat{x}_2(K)$ et $x_2(K)$ en fonction du temps sont données par les figures 3.10 et 3.11 respectivement.

D'après ces figures (3.10 et 3.11) nous constatons que l'état estimé tend vers l'état réel ce qui nous donne une erreur d'estimation Nulle.

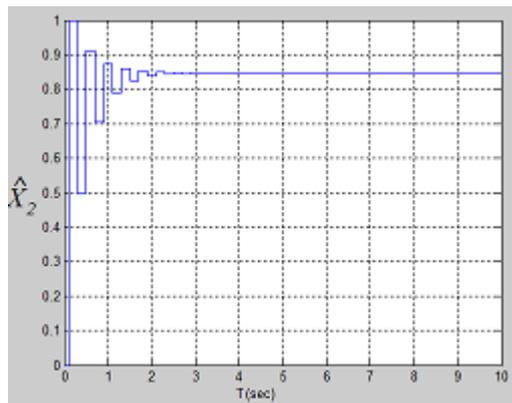


FIGURE 3.10 – L'état \hat{x}_2 en fonction du temps.

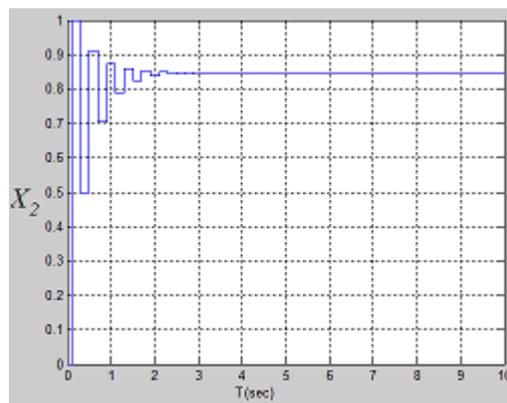


FIGURE 3.11 – L'état x_2 réel en fonction du temps.

3.1.4 Commande par retour d'état observé

Dans cette partie nous allons synthétiser une loi de commande par retour d'état estimé. Cette technique de commande peut être schématiser par la figure suivante :

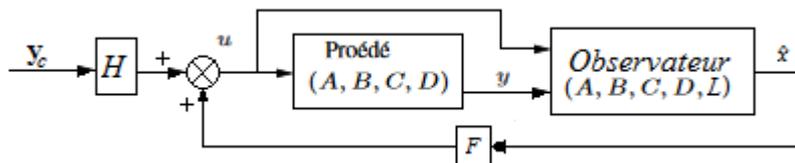


FIGURE 3.12 – Schéma bloc de la commande par retour d'état estimé.

On considère que la matrice D est nulle, dans ce cas le système peut être régi par les équations d'états suivantes :

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \\ \hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + L[\hat{y}(k) - y(k)] \\ \hat{y}(k) = C\hat{x}(k) \\ u(k) = K\hat{x}(k) + Hy_c(k) \end{cases}$$

Où $y_c(k)$ est une entrée consigne.

On considère le vecteur d'état :

$$x = \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}$$

3.1. PLACEMENT DE PÔLES PAR RETOUR D'ÉTAT ET PAR RETOUR DE SORTIE

avec : $e = x - \hat{x}$.

le modèle d'état global devient :

$$\begin{cases} \xi(k+1) &= (A + BF)\xi(k) + BF e(k) + BHY_c(k) \\ e(k+1) &= (A + LC)e(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{cases}$$

Les pôles du système sont les valeurs propres de la matrice $(A + BF)$ union les valeurs propres de la matrice $(A + LC)$ et c'est le principe de séparation.

Exemple Soit le système représenté par le modèle d'état suivant :

$$\begin{cases} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{cases}$$

Avec :

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.16 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0]$$

Les pôles de ce système sont : $z_1 = 0.6$ et $z_2 = -1.1$

On voit bien que le pôle z_2 est instable. Pour stabiliser ce système nous devons synthétiser une loi de commande par retour d'état afin de placer le pôle instable en $z_2 = 0.4$. Pour cela on doit vérifier si le système est commandable.

$$\varphi = [B \quad AB] = \varphi = \begin{bmatrix} 0 & -0.16 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rang}(\varphi) = 2$$

Donc le système est complètement commandable.

La matrice de gain $K = [0.9375 \quad -1.5]$ nous permet de placer le pôle z_2 en $z_2 = 0.4$.

Maintenant nous synthétisons un observateur réduit permettant de placer le pôle en $z = -0.8$ pour cela les gains de l'observateur sont :

$$\begin{cases} \hat{A} &= -0.8 \\ F &= 2.625 \\ H &= 1 \\ L &= -1.25 \end{cases}$$

Avec ces gains nous avons pu reconstruire l'état X_2 , les courbes ci-dessous nous montre que l'état estimé et l'état réel son identique.

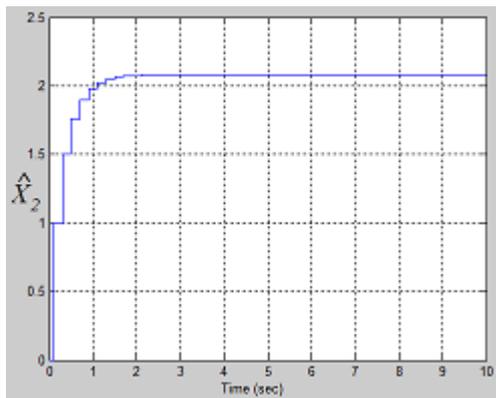


FIGURE 3.13 – l'état estimé $\hat{X}_2(k)$ obtenu par un observateur réduit en fonction du temps .

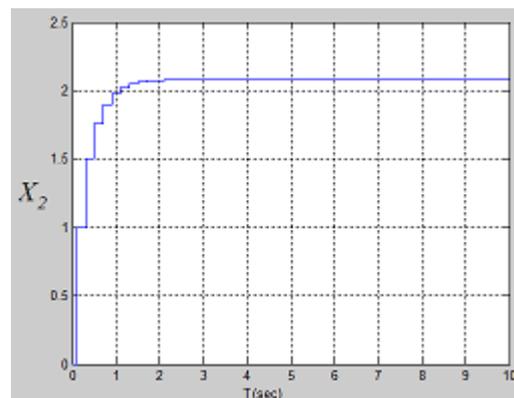


FIGURE 3.14 – L'état réel $X_2(k)$ en fonction du système du temps.

3.2 Autres méthodes de synthèse

3.2.1 Contrôleur PID numérique (structure à 1 degré de liberté)

Un système asservi contenant un régulateur PID peut être représenté par le schéma bloc de la figure suivante :

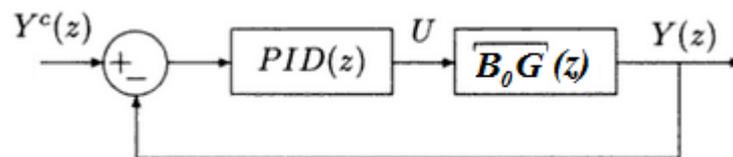


FIGURE 3.15 – schéma bloc d'un système asservi contenant un régulateur PID.

En continu le signal de commande u peut être élaboré en fonction du signal d'erreur $\varepsilon = y_c - y$.

En appliquant la formule suivante :

$$u = k_p \left(\varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau + T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + U_0 \right)$$

La discrétisation de cette dernière équation nous donne :

$$u_n = k_p \left(\varepsilon_n + \frac{T_e}{T_i} \sum_{i=0}^n \varepsilon_i + \frac{T_d}{T_e} (\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}) \right) \quad (3.2)$$

3.2. AUTRES MÉTHODES DE SYNTHÈSE

L'échantillon qui précède U_n est donné par :

$$u_{n-1} = k_p \left(\varepsilon_{n-1} + \frac{T_e}{T_i} \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon_i + \frac{T_d}{T_e} (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_{n-2}) \right) \quad (3.3)$$

Soit :

$$\Delta u = u_n - u_{(n-1)} = k_p \left((\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}) + \frac{T_e}{T_i} \varepsilon_n - \frac{T_d}{T_e} (\varepsilon_n + 2\varepsilon_{n-1} + \varepsilon_{n-2}) \right) \quad (3.4)$$

La fonction de transfert du régulateur *PID* numérique est la transformée en Z de l'équation 3.2, on trouve donc :

$$R(z) = k_p \left(1 + \frac{T_e}{T_i} \frac{z}{z-1} + \frac{T_d}{T_e} \frac{z-1}{z} \right) \quad (3.5)$$

Cette transmittance peut s'écrire comme suit :

$$R(z) = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{z(z-1)}$$

Avec :

$$\begin{aligned} b_0 &= k_p \left(1 + \frac{T_e}{T_i} + \frac{T_d}{T_e} \right) \\ b_1 &= -k_p \left(1 + 2 \frac{T_d}{T_e} \right) \\ b_2 &= k_p \frac{T_d}{T_e} \end{aligned}$$

Les constantes de régulateur *PID* numérique peuvent être données en fonction de b_0, b_1, b_2 .

On aura donc :

$$\begin{aligned} k_p &= -(b_1 + 2b_2) \\ T_i &= -T_e \frac{b_1 + 2b_2}{b_0 + b_1 + b_2} \\ T_d &= -T_e \frac{b_2}{b_1 + 2b_2} \end{aligned}$$

Afin d'éviter les termes dérivateurs sur la consigne, nous adoptons l'équation suivante :

$$\Delta u = k_p \left((\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}) + \frac{T_e}{T_i} \varepsilon_n + \frac{T_d}{T_e} (2y_{n-1} - y_n - y_{n+2}) \right) \quad (3.6)$$

Et cela peut être représenté par le schéma bloc suivant :

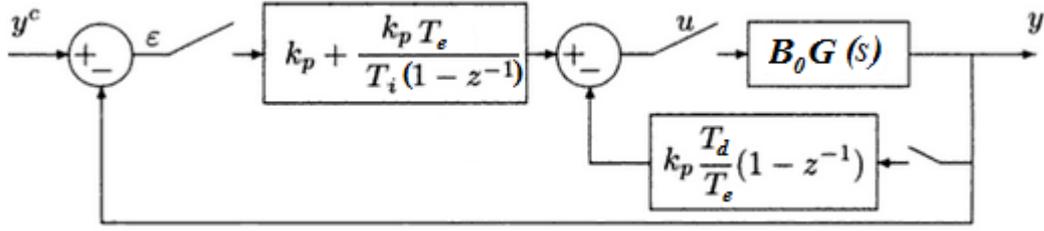


FIGURE 3.16 – Schéma bloc de régulation à l'aide d'un régulateur PID.

Remarque Si $y_c = y = \text{constante}$, les expressions 3.3 et 3.6 de ΔU sont identique.

3.2.2 Cas du régulateur PID filtré

Dans le cas où le système doit se comporter comme un deuxième ordre, la partie réel et la partie imaginaire des pôles sont : $r = \xi\omega_0$, $C = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$.

Et les pôles sont :

$$z_1 = -2e^{-rT_e} \cos(T_e C), \quad z_2 = e^{-2rT_e}$$

Dans ce cas le régulateur *PID* filtré est défini par la fonction de transfert suivante :

$$R(z) = r_0 \frac{z^2 + \frac{r_1}{r_0}z + \frac{r_2}{r_0}}{(z-1)(z+s_1)} = \frac{z(r_0 b_1 z + r_0 b_2)}{z^2 + (s_1 - 1)z - s_1}$$

Les paramètres du régulateur *PID* filtré sont :

$$b_0 = \frac{1 + z_1 + z_2}{b_1 + b_2}, \quad r_1 = a_1 r_0, \quad r_2 = a_2 r_0 \quad \text{et} \quad s_1 = b_2 r_0 - z_2.$$

Avec : a_1 , a_2 , b_0 , b_2 sont les coefficients du processus du deuxième ordre désiré donné par :

$$H(z) = \frac{b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2}$$

Exemple Soit le système de la figure 3.16

avec :

$$[B_0 G](z) = \frac{0.398z + 0.3152}{z^2 + 1.4253z + 0.4966}$$

Le but est d'assurer un comportement d'un système du second ordre avec une fréquence propre $\omega_0 = 0.06 \text{ rad/sec}$ et de coefficient d'amortissement $\xi = 0.9$

Nous nous synthétisons un régulateur *PID* filtré.

Le dénominateur de la boucle fermée est :

$$D(z) = z^2 - 1.125z + 0.339$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} r &= \xi\omega_0 = 0.054 \\ C &= \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} = 0.026 \\ z_1 &= -1.125 \\ z_2 &= 0.339 \end{aligned}$$

Nous utilisons les résultats précédant pour avoir les coefficients suivants :

$$\begin{aligned} r_0 &= 0.299 \\ r_1 &= -0.427 \\ r_2 &= 0.1488 \\ s_1 &= -0.2451 \end{aligned}$$

Donc la fonction de transfert du régulateur est :

$$R(z) = \frac{0.229z^2 - 0.4271z + 0.1488}{(z - 1)(z - 0.245)}$$

La réponse indicielle du système bouclé est donnée par la figure suivante :

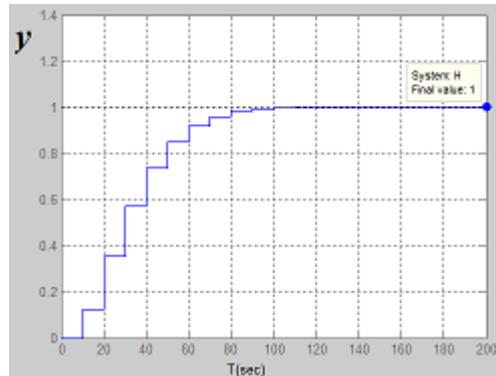


FIGURE 3.17 – Réponse indicielle d’un système corrigé par un régulateur PID filtré.

3.2.3 Contrôleur RST (structure à 2 degrés de liberté)

La commande RST est une commande qui a pour entrées la consigne u et la sortie mesuré y , et comme sortie la grandeur de commande e . Cette commande peut être représenté par le schéma bloc suivant :

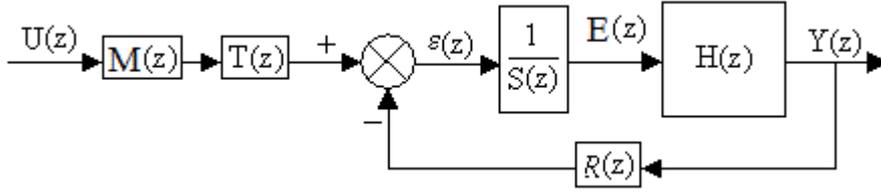


FIGURE 3.18 – Schéma-bloc de la commande RST.

Avec :

$$\begin{aligned} R(z) &= r_0 + r_1 z^{(-1)} + r_2 z^{(-2)} + r_3 z^{(-3)} + \dots + r_{nr} z^{-nr} \\ S(z) &= s_0 + s_1 z^{(-1)} + s_2 z^{(-2)} + s_3 z^{(-3)} + \dots + s_{ns} z^{-ns} \\ T(z) &= t_0 + t_1 z^{(-1)} + t_2 z^{(-2)} + t_3 z^{(-3)} + \dots + t_{nt} z^{-nt} \end{aligned}$$

Les fonctions $R(z)$, $S(z)$, $T(z)$ sont des polynômes en z de l'équation de *BEZOUT* donnée par :

$$P(z^{-1}) = A(z^{-1})S(z^{-1}) + z^{-d}B(z^{-1})R(z^{-1})$$

Théorème *L'équation de BEZOUT a une unique solution ssi :*

1. $n_p \leq n_A + n_B + d - 1$
2. $n_s = n_B + d - 1$
3. $n_r = n_A - 1$

$M(z)$ une fonction de transfert permettant de fixer la dynamique en asservissement.

La fonction de transfert $M(z)$ est donnée par :

$$M(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{N_0 + N_1 z^{-1} + N_2 z^{-2} + \dots + N_m z^{-m}}{D_0 + D_1 z^{-1} + D_2 z^{-2} + \dots + D_n z^{-n}}$$

Le signal de commande $E(z)$ est donné par :

$$E(z) = \frac{T(z)}{S(z)} M(z) U(z) - \frac{R(z)}{S(z)} Y(z)$$

Si nous retirons $M(z)$ et nous posons $T(z) = R(z)$ nous retrouvant la structure de la commande classique donnée par :

$$E(z) = \frac{R(z)}{S(z)} (U(z) - Y(z)) = \frac{R(z)}{S(z)} \varepsilon(z)$$

Donc la commande classique est un cas particulier de la commande RST.

3.2. AUTRES MÉTHODES DE SYNTHÈSE

Exemple Nous souhaitons synthétiser une loi de commande RST pour commander le courant d'induit d'un moteur à courant continu représenté par la figure suivante :

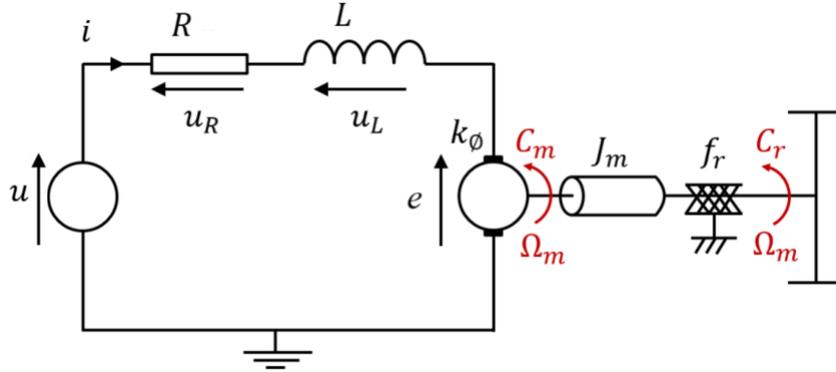


FIGURE 3.19 – Moteur à courant continu.

Pour simplifier le calcul des paramètres du régulateur nous considérons l'hypothèse suivante :

La variation de la vitesse de rotation est très faible par rapport à l'évolution du courant induit.

Dans ce cas : $\dot{e} \approx 0 \Rightarrow E(s) = 0$.

En appliquant la loi des mailles nous obtenons :

$$H(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = \frac{1}{R} \frac{1}{1 + \frac{L}{R}s}$$

Nous choisissons les paramètres du moteur comme suite :

$$R = 6\Omega \text{ et } L = 240mH$$

En aura :

$$H(s) = \frac{0.1667}{1 + 0.04s}$$

Pour discrétiser le système nous prenons la période d'échantillonnage $T_e = 1ms$, la fonction de transfert discrète du système est :

$$H(z) = (1 - z^{-1})TZ\left[\frac{0.1667}{s(1 + 0.04s)}\right] = \frac{0.0041}{z - 0.975}$$

Cette fonction de transfert est de la forme :

$$H(z) = \frac{b_1}{1 + a_1 z^{-1}}$$

Avec :

$$\begin{cases} a_1 = -0.975 \\ b_1 = 0.041 \end{cases}$$

La réponse indicielle du système est donnée par la figure 3.20

Avec le régulateur synthétisé nous essayons de simplifier le numérateur du processus, donc l'équation de Bezout peut être formulé de la façon suivante :

$$P(z) = (1 + a_1 z^{-1}) \frac{S(z)}{B(z)} z^{-1} + z^{-d} z^{-1} R(z)$$

Le degré de $P(z)$ est égale à 1.

donc :

$$d = 0 \text{ et } \frac{S(z)}{B(z)} z^{-1} = 1 \Rightarrow S(z) = \frac{B(z)}{z^{-1}} = b_1$$

Nous proposons un pôle $z_1 = 0.8$, qui nous permet de faire un rejet de perturbation très rapide. Avec ce pôle les polynômes du régulateur RST sont :

$$\begin{cases} R(z) = r_0 = \frac{z_1 - a_1}{b_1} = 42.6002 \\ S(z) = 1 \\ T(z) = 243.013 - 194.41 z^{-1} \end{cases}$$

La réponse indicielle du système corrigé avec régulateur RST est donnée par la figure 3.21

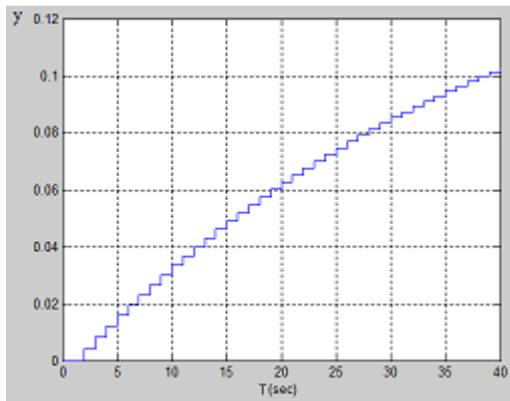


FIGURE 3.20 – Réponse indicielle du système.

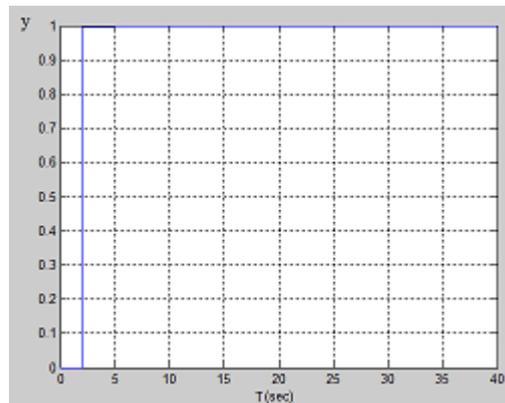


FIGURE 3.21 – Réponse indicielle d'un système avec régulateur RST.

Nous constatons que le système corrigé par le régulateur RST à une erreur statique nulle ainsi que le système est devenu plus rapide.

Bibliographie

- [1] Yves Granjon, Automatique systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'état Cours et exercices corrigés, 2eme édition, Dunod, Paris, 2001, 2010
- [2] Roland Longchamp, Commande numérique de systèmes dynamiques, cours d'automatique, 2eme édition, 2006
- [3] Katsuhiko Ogata, Discrete-time control systems, second edition, 1995.
- [4] Dimitri Peaucelle, Systèmes a temps discret Commande numérique des procédés, Toulouse 7 Avril 2003.
- [5] P. Borne et al, Analyse et régulation des processus industriels. Tome 2 – Régulation Numérique, Edition Technip 1993.
- [6] Jean-Marie Retif, Synthèse d'une commande robuste, correcteurs échantillonnés, commandes par PID, par modèle interne et Polynomiale RST, ellipses 2011.
- [7] S. Tliba, M. Jungers, Y. Chitour, Commande des processus Asservissements Numériques Notes de cours, 2005
- [8] Adnane Cherif, Systèmes Linéaires Asservis échantillonnés, 2009
- [9] S. Tliba, M. Jungers, Y. Chitour, Commande Des Processus, Asservissements Numériques, Notes de cours, Paris-Sud 2005.
- [10] Benoît Bergeon , Représentations d'état des systèmes linéaires à temps discret, Université de Bordeaux, 2013-2014.
- [11] Eric OSTERTAG, Commande et estimation multivariables, 2006.