

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية  
الشعبية

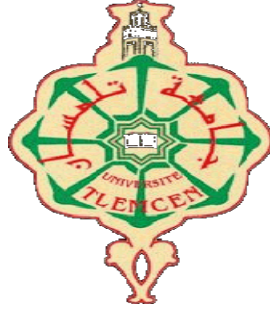
**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**

جامعة أبي بكر بلقايد- تلمسان

Université Aboubakr Belkaïd- Tlemcen -



**ASSERVISSEMENT LINEAIRE CONTINU**

**ZINAI ABDELHADI**

**ANNEE UNIVERSITAIRE 2021 / 2022**

# AVANT PROPOS

Ce cours, destiné aux étudiants de formation du cycle LMD, correspond à la matière faisant partie d'une spécialité agréée au niveau du département de Génie Mécanique.

C'est un cours pédagogique, peut être utilisé dans les domaines des formations LMD relatives aux Sciences et Techniques.

Ce polycopie de cours et d'exercices d'**Asservissement linéaire continu** est un outil permettant aux étudiants de suivre, comprendre et d'assimiler ce cours. En s'appuyant sur la résolution des **exercices**, d'une façon méthodiques et pédagogiques, accompagnés par certains exercices résolus.

Il est destiné ou il est adressé en premier lieu aux étudiants LMD (L3) de Génie la mécanique en énergétique et aux étudiants en construction mécanique, à ceux qui désirent améliorer leur connaissance dans cette matière.

Ce polycopie comporte sept chapitres, le premier chapitre est consacré à la terminologie des systèmes, le deuxième présente l'étude et l'utilité de la transformée de Laplace, le troisième chapitre traite la modélisation d'un système linéaire par une fonction de transfert, le quatrième chapitre caractérise l'étude et l'analyse temporelle d'un système linéaire asservi du premier ordre, le cinquième chapitre traite l'étude et l'analyse temporelle d'un système linéaire asservi du second ordre,

le sixième chapitre donne la représentation graphique du diagramme de BODE et du diagramme Nyquist, le septième chapitre est consacré à l'étude de la stabilité d'un système linéaire continu. Enfin, il est terminé par des exercices avec éléments de correction de chaque chapitre.

Les solutions sont souvent détaillées et permette à l'étudiant de compléter sa compréhension du cours et faire soit même son évaluation.

Ce cours permettra à l'étudiant d'acquérir des connaissances sur la théorie de l'asservissement des systèmes linéaires continus ainsi que sur les méthodes de représentation et d'analyse. A la fin du cours, les étudiants seront capables de modéliser et d'analyser des systèmes des asservissements.

# SOMMAIRE

|  |    |
|--|----|
| Chapitre 1 Terminologies des systèmes .....            | 01 |
| Chapitre 2 Transformée de LAPLACE .....                | 12 |
| Chapitre 3 Fonction de transfert .....                 | 26 |
| Chapitre 4 Système du premier ordre .....              | 43 |
| Chapitre 5 Système du second ordre .....               | 49 |
| Chapitre 6 Représentation graphique de diagramme ..... | 63 |
| Chapitre 7 La stabilité .....                          | 72 |
| Exercices.....   | 85 |

# Chapitre 1 Terminologies des systèmes

## I Définitions

### I.1 Automatique

L'automatique fait partie des sciences de l'ingénieur. Cette discipline traite de la modélisation, de l'analyse, de la commande et de la régulation des systèmes dynamiques.

Elle a pour fondements théoriques les mathématiques, la théorie du signal et l'informatique théorique. L'automatique permet l'automatisation de tâches par des machines fonctionnant sans intervention humaine. On parle alors de système asservi ou régulé.

#### I.2 Asservissement et régulation

##### I.2.1 Asservissement :

Un asservissement est la poursuite par la sortie d'une consigne variable dans le temps continument au cours de temps par exemple une table traçante.

##### I.2.1.1 Exemple

La reproduction des gestes d'un chirurgien par un robot distant.

##### I.2.2 Régulation

La régulation est une compensation ou bien un rejet de l'effet de perturbations variables sur la sortie sachant que la consigne ou la référence est considérée constante par exemple une alimentation stabilisée ; une régulation de vitesse ; de température ...etc.

Alors on dit que dans une régulation, la consigne est constante, le système compense les perturbations.

##### I.2.2.1 Exemple

Le maintien la vitesse d'un véhicule quelles que soient les perturbations (profil de la route, vent, etc.).

## II Définition d'un système

Un système est défini par ses constituants et les interactions qui existent entre eux, l'ensemble représentant une entité individualisée. Par système, on signifie souvent processus.

Un processus peut être de nature quelconque : mécanique, électrique, électromécanique, biologique, chimique, physico-chimique, sociologique, économique, industriel, etc.

Il évolue dans son environnement et peut interagir avec lui.

Il est important de distinguer les grandeurs d'entrée (inputs) et les grandeurs de sortie du système étudié. Ensuite, il importe d'essayer de déterminer les relations qui les relient et de connaître la nature et les modes d'interaction avec l'environnement.

Par grandeur de sortie, on entend la grandeur que l'on souhaite réguler ou asservir. Par grandeur d'entrée, on entend les signaux qui permettent d'agir sur le système, c'est-à-dire qui affectent l'état de sa grandeur de sortie. La grandeur de sortie peut être  $s(t)$  par l'action des grandeurs d'entrées ou sous l'effet de perturbations provenant de l'environnement ou encore sous l'effet de la variation des constituants du système lui-même.

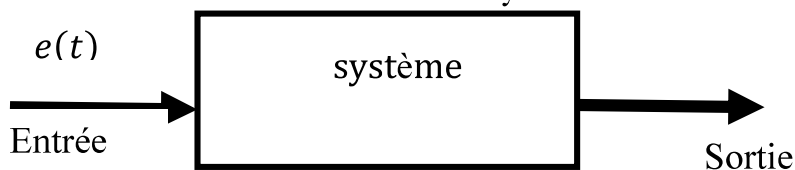


Figure N°1 : Présentation d'un système

Un système est un ensemble d'éléments interagissant entre eux selon un certain nombre de principes ou de règles.  
Le système appliqué à notre cours représente la relation qui existe entre deux ensembles de signaux : les entrées et les sorties.

- **Signaux d'entrée** : Représentent les variables qui affectent le système. Il s'agit souvent du signal de référence (consigne).
- **Signaux de sortie** : Représentent les variables sur lesquelles le système agit. Ce sont les variables dites « affectées » par le système.
- **Variables mesurées** : Il s'agit des variables mesurées (généralement à l'aide de capteurs).
- **Signaux de rétroaction** : Il s'agit des variables mesurées utilisées par la commande.

Souvent, nous considérerons seulement les systèmes mono variables : une entrée, une sortie, une rétroaction.

### III .Terminologie sur la Régulation l'asservissement

Dans l'industrie, il est nécessaire de contrôler d'un certain nombre de grandeurs physique telles que la température, la pression, le niveau, le débit, la vitesse, etc....

La chaîne d'asservissement doit maintenir ces grandeurs à des niveaux prédéterminés.

#### III.1 Régulation

Toute chaîne de régulation comprend trois éléments indispensables :

- 1- L'organe de mesure (transmetteur)
- 2- L'organe de régulation (régulateur)
- 3- L'organe de contrôle (actionneur)

On commence par la mesure des grandeurs à contrôler. L'organe de régulation récupère ces mesures et les compare aux valeurs désirées ou souhaitées, qui sont appelées valeur de consignes. Quand les valeurs de mesures ne concordent pas avec les valeurs de consignes, l'organe de régulation envoie une commande à l'organe de contrôle par exemple (moteur, vérin, vanne etc...), afin que ce dernier agisse sur le système (processus).

L'objectif d'une boucle de régulation est donc de maintenir constant ou invariant la grandeur contrôlée identique à la consigne (inchangable) quelque soient les perturbations.

#### III.2 Asservissement

Dans un asservissement, on retrouve les mêmes organes que dans la boucle de régulation. La grandeur contrôlée doit suivre le plus fidèlement possible la consigne.

##### III.2 .1 exemple d'une structure d'un système asservis

Afin d'établir la structure d'un système asservis, nous présentons des exemples.

### III.2.1.1 Conducteur au volant d'un véhicule

Le conducteur doit suivre la route en se fixant pour objectif de garder une distance d'entre le véhicule et le bord de la route.

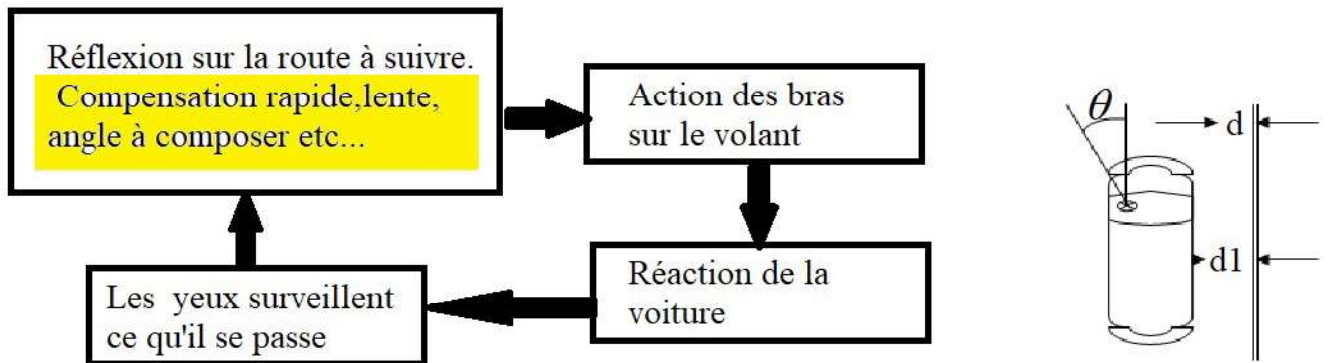


Figure N°2 : Exemple Conduite au volant d'un véhicule

Il observe la route et son environnement et évalue la distance qui séparer son véhicule du bord de la route. A cette position il détermine l'angle et il agit sur le volant pour garder son objectif pendant toute la durée du déplacement.

### III.2.1 2 Réglage de niveau manuellement

L'homme doit maintenir le niveau de liquide au autour de la consigne  $c$ . Pour qu'il assure ce maintien, il mesure le niveau et il compare la mesure obtenue à celle de la consigne  $c$ . Il décide alors de réagir selon l'écart entre la consigne et la mesure, son cerveau joue le rôle d'un régulateur. Une fois le niveau atteint la consigne  $c$ , il ferme la vanne. En de présence de perturbation par exemple un soutirage du liquide ; l'homme intervient et agit pour assurer et garder le niveau a sa valeur désirée ( consigne  $c$ ).

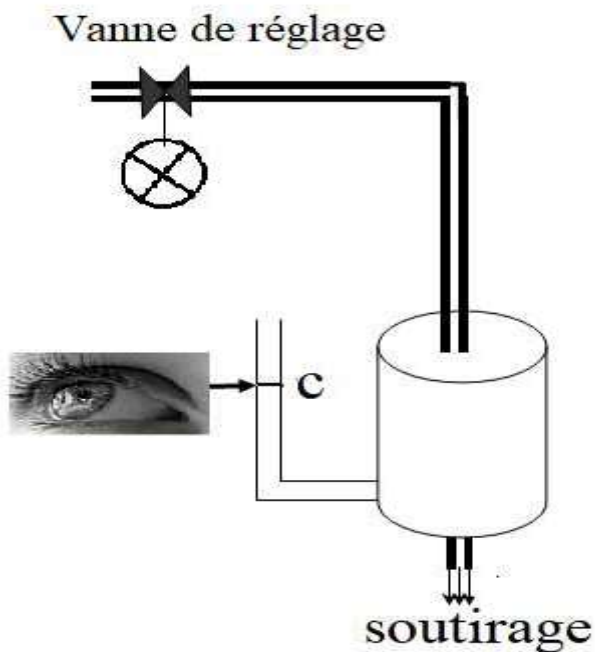


Figure N°3 : Conducteur au volant d'un véhicule

La présentation de ces deux exemples permet de relever différentes fonctions assurées par l'homme ou par des organes. En effet, pour le dernier système on a les fonctions suivantes :

- La fonction de mesure : le niveau est mesuré à l'aide d'un tube dérivateur ;
- La fonction de transmission de l'information : l'information est lue sur le tube et transmise visuellement ;
- La fonction de comparaison : le niveau instantané est comparé avec le niveau désiré; celui-ci étant repéré par le trait R;
- La fonction de régulation : en fonction de l'écart observé entre le niveau atteint et le niveau désiré, il y'a ouverture de la vanne plus ou moins grand;
- La fonction d'action : selon l'écart observé, il y'a action sur la vanne manuelle.

En résumé, une boucle d'asservissement ou de régulation est toujours formée des éléments suivants :

| En général  | Dans l'exemple 2                                  |
|---|---|
| Capteur (Elément primaire de la chaîne de mesure) | Tube transparent                                  |
| Transformation de l'information                   | Transmission visuelle de l'information de mesure  |
| Comparateur                                       | Comparaison réalisée par le cerveau               |
| Régulateur  | Décision et élaboration des ordres par le cerveau |
| Organe de réglage                                 | Vanne manuelle                                    |

### III.3 Présentation d'une structure

On peut présenter la structure de la commande par le schéma fonctionnel suivant :

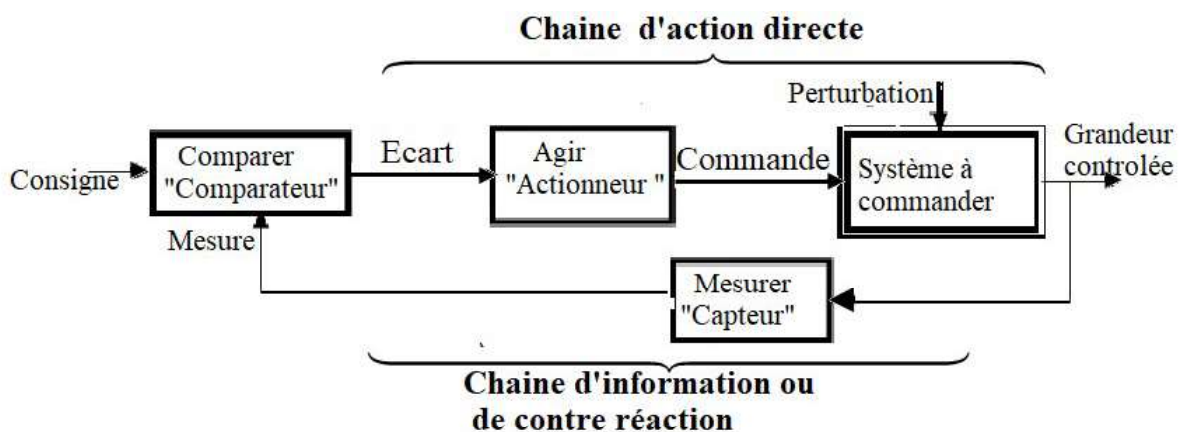


Figure N° 4 : Structure d'un système

Cette organisation fonctionnelle représente la structure de base qu'on trouve dans tous les systèmes asservis ou régulés. Elle fait intervenir deux chaînes : une chaîne d'action directe et une chaîne d'information appelé aussi chaîne de contre réaction ou bien de retour.

Ce type de système est appelé aussi système bouclé ou système de commande en boucle fermée.

### III.3.1 Constituants.

Une chaîne de commande en boucle fermée comprend :

- Un comparateur

Il élabore le signal d'écart entre la consigne et la mesure.

- Un régulateur

Le régulateur est le constituant intelligent dans une boucle de régulation. Le régulateur élabore à partir du signal d'erreur l'ordre de commande pour agir sur l'actionneur.

- Un actionneur

C'est l'organe d'action qui apporte l'énergie au système pour produire l'effet souhaité.

- Un capteur (transmetteur)

Le capteur prélève une information physique sur la grandeur contrôlée et la transforme en un signal compréhensible par le régulateur. La précision et la rapidité sont deux caractéristiques importantes du capteur.

### III.3.2 Informations.

Les principaux signaux dans une chaîne de commande en boucle fermée sont :

- Consigne

La consigne ou référence est la grandeur d'entrée d'une boucle d'asservissement ou de régulation que la grandeur contrôlée doit suivre. Elle doit impérativement être de même nature physique que la mesure pour pouvoir lui être comparée.

- Sortie

La sortie contrôlée représente le phénomène physique qu'il faut contrôler. C'est la raison d'être d'une boucle de contrôle.

- Mesure

Cette grandeur est fournie par la chaîne de retour. C'est l'image de la grandeur contrôlée.

- Perturbation

Une perturbation est tout phénomène physique intervenant sur le système qui modifie l'état de la sortie. Un système régulé doit pouvoir maintenir la sortie à son état désiré et ce, indépendamment, des perturbations.

- Ecart (Erreur)

C'est la différence à chaque instant entre la consigne et la mesure. Cette comparaison ne peut être réalisée que sur des grandeurs de même nature.

- Commande

C'est le signal élaboré par le régulateur pour agir c'est l'organe de réglage.



### III.3.3 Fonctionnement.

L'ordre donné en entrée est comparé avec le signal de la sortie fournie par le capteur. Le signal obtenu en sortie du comparateur va permettre de commander la chaîne d'action composée de deux éléments principaux, le correcteur et l'actionneur.

Le rôle du correcteur est d'adapter le signal d'erreur afin d'obtenir une réponse optimale de l'actionneur. Les critères choisis peuvent être divers mais essentiellement basés sur la précision, la rapidité, et la stabilité.

L'actionneur est chargé de réaliser l'action demandée par l'ordre d'entrée, à partir du signal de sortie du correcteur. C'est en général l'élément qui apporte la puissance pour l'action.

En cas de phénomènes perturbateurs agissant sur la grandeur de sortie l'obligeant à s'écarter de sa valeur désirée ou souhaitée, le capteur rend compte au régulateur de l'état de la sortie et le processus de correction est déclenché par le régulateur afin de ramener la grandeur de sortie à sa valeur désirée.

### IV Problème de commande

Le problème de commande c'est de Régler les variables manipulées de sorte que les sorties suivent les consignes.

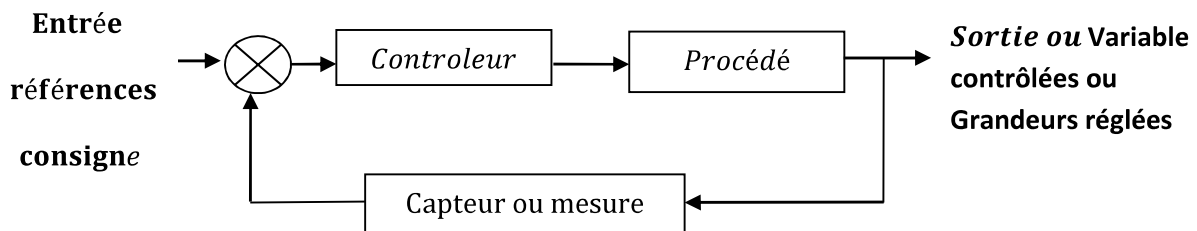


Figure N°5 : Schéma de principe d'un système

Pour contrôler **un système, on a recours à la commande.**

Le contrôleur effectue les calculs, exécute les différents algorithmes mis en place pour commander le système d'intérêt.

Le signal de commande Il s'agit du signal émis par le contrôleur.

### IV Objectifs de l'asservissement

Un système asservis ou automatique est un système capable d'effectuer plusieurs opérations sans intervention d'un opérateur. On peut concevoir et analyser des asservissements en tenant compte de multiples objectifs.

Ces objectifs sont :

- 1 - Garder ou maintenir une bonne stabilité
- 2 - Avoir une très bonne précision
- 3 - Obtenir une réponse rapide (faire poursuivre rapidement une consigne)
- 4 - Concevoir des systèmes de commande relativement simple à mettre en œuvre.

## V Asservissement

Une commande en boucle fermée est souvent représentée par un schéma synoptique dans lequel on fait apparaître les principaux organes du système.

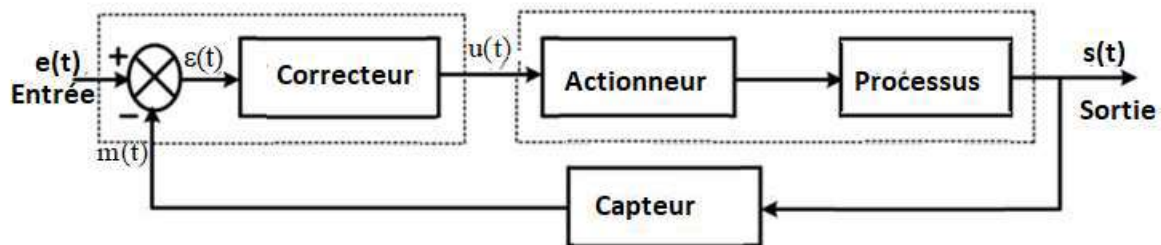


Figure N °6 : Chaîne d'asservissement

$e(t)$  : signal d'entrée

$s(t)$  : signal de sortie

$m(t)$  : signal de la mesure

$\varepsilon(t) = e(t) - m(t)$  : signal d'erreur ou d'écart

$u(t)$  : signal de la grandeur de commande

### V.1 Chaîne d'asservissement

Les éléments constituant une chaîne d'asservissement sont

**Le régulateur :** Il est composé d'un comparateur qui établit à sa sortie en permanence le signal d'erreur  $\varepsilon(t)$ , et d'un correcteur qui élabore à partir du signal d'erreur  $\varepsilon(t)$  la grandeur de commande  $u(t)$ . Le régulateur constitue l'organe intelligent du système asservi.

L'actionneur est un organe physique faisant la fonction d'un amplificateur de puissance il assure la commande du processus. Le capteur se présente dans la chaîne de retour ou bien chaîne de contre réaction est un organe physique. Il assure à sa sortie la conversion de la

grandeur physique en un signal exploitable. il est impératif que le capteur soit fiable, précis et insensible aux perturbations du milieu extérieur.

## V.2 Grandeurs principale d'une Chaîne d'asservissement

### V.2.1 Les grandeurs principales d'information

Entrée consigne : la consigne est l'entrée principale de référence, c'est la grandeur physique réglant du système.

Sortie régulé ou sortie asservie : la sortie régulée représente le phénomène que doit réguler le système. C'est la grandeur physique pour lequel le système est conçu.

Perturbations : les perturbations sont les phénomènes influant ou intervenant sur le système qui change ou modifie l'état de la sortie du système. Un système régulé doit assurer le maintien de la sortie à son niveau indépendamment de la perturbation.

Ecart : il appelé aussi erreur, il présente la différence entre la consigne et la grandeur mesurée de la sortie. Cette erreur peut être réalisée uniquement sur des grandeurs comparables ou bien de même nature.

## V.I Formulation ou modélisation des systèmes

Le but d'établir une formulation mathématique des système physiques est de trouver la relation entre la grandeur physique d'entrée et celle de la grandeur de sortie du système .

Nous écrivons les équation qui régissent le système en appliquant les lois des théories pour chaque système. Afin d'obtenir une relation reliant la sortie du système à son entrée. Cette relation sera établit ou écrites par des équations différentielles liant l'entrée à la sortie.

### V.I.1-Circuit électrique

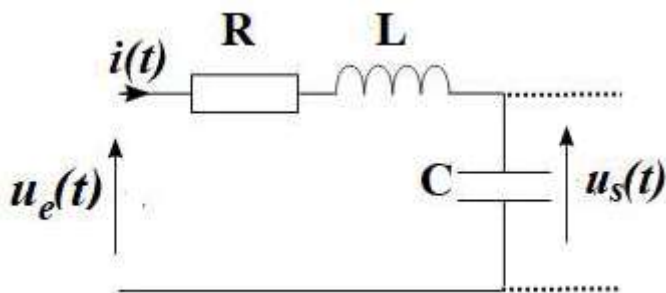


Figure N °7 : Circuit R L C

$u_e(t)$  est la tension d'entrée du circuit, qui représente la tension d'alimentation du circuit

$u_s(t)$  est la tension de sortie du circuit, représente la tension aux bornes du condensateur C.

Appliquant la loi des mailles

$$u_e(t) = R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + u_s(t)$$

Et comme  $i(t) = C \frac{du_s(t)}{dt}$  a

On obtient  $u_e(t) = LC \frac{d^2u_s(t)}{dt^2} + RC \frac{du_s(t)}{dt} + u_s(t)$

### V.I 2- Système mécanique

Une masse peut se déplacer dans une seule direction (ox) .

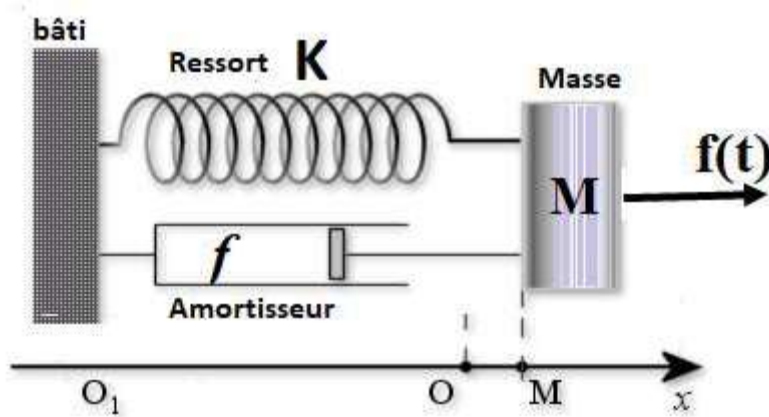


Figure N °8 : Exemple masse ressort

Cette masse est soumise à une force  $f(t)$  dirigée dans la direction (ox). Les forces sont appliquées au centre d'inertie de la masse.

L'application du principe fondamentale de la dynamique permet d'aboutir à l'équation du mouvement.

$$M \frac{d^2x(t)}{dt^2} + f \frac{dx(t)}{dt} + Kx(t) = f(t)$$

### V.I. 4 Bac

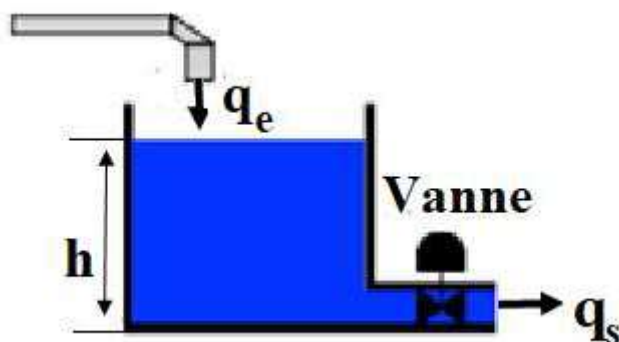


Figure N °9 : Bac d'eau

$$\text{Bilan matière : } A \frac{dh}{dt} = q_e - q_s$$

$$\text{Caractéristique } q_s = \frac{h}{R}$$

$$A \frac{dh}{dt} + \frac{h}{R} = q_e \Leftrightarrow \frac{A}{R} \frac{dh}{dt} + h = \frac{q_e}{R}$$

### V.I. 3- thermique

La cuve chauffée

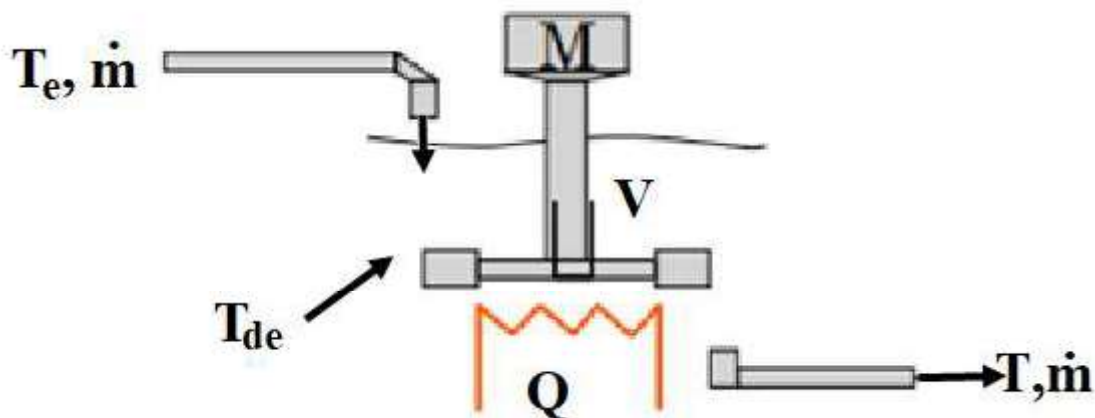


Figure N °10 : Exemple thermique

Hypothèse :  $V = Cste$      $T_{de} = Cste$

Accumulation  $c_p \frac{dT}{dt}$

Entrée -sortie  $\dot{m} c_p (T_e - T)$

Apport  $Q$

Pertes thermique  $h_T S (T - T_{de})$

$$M c_p \frac{dT}{dt} = \dot{m} c_p (T_e - T) + Q - h_T S (T - T_{de})$$

### V.I .5- Bac de récupération

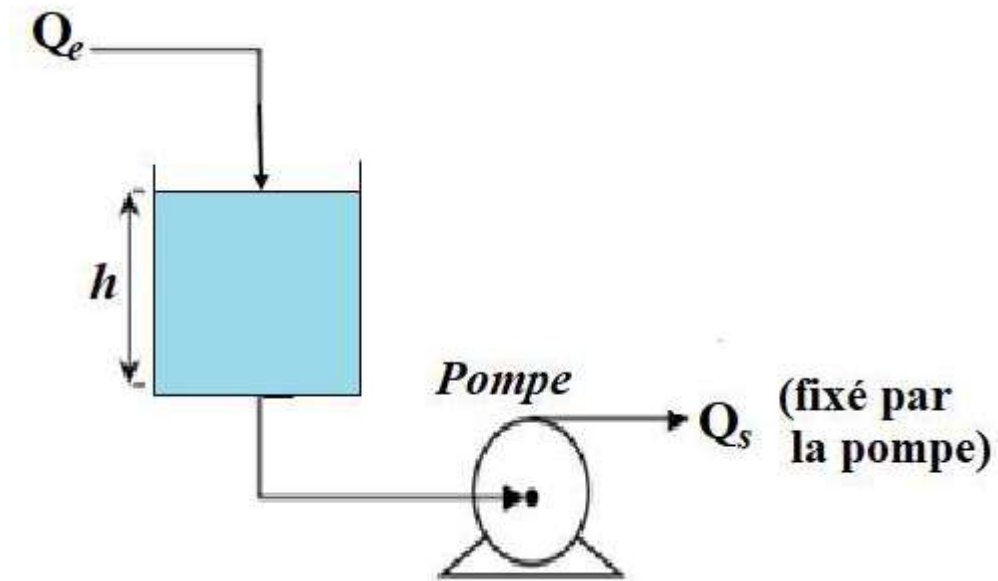


Figure N °11 : Bac de récupération

Bilan de la matière sur la cuve :  $A \frac{dh}{dt} = Q_e - Q_s$

Dans le cas général

$$h(t) = h_0 + \underbrace{\int_0^t \left( \frac{Q_e - Q_s}{A} \right) dx}_{\text{Intégrateur}}$$

La transformation de Laplace est une opération intégrale qui permet de transformer une fonction d'une variable réelle en une fonction d'une variable complexe. Par cette transformation, une équation différentielle linéaire peut être représentée par une équation algébrique. Elle permet aussi de représenter des fonctions particulières (distribution de Heaviside, distribution de Dirac, etc.) de manière très élégante. Ce sont ces possibilités qui rendent la transformation de Laplace intéressante et populaire auprès des ingénieurs. Cette transformation a donné lieu à la technique du calcul opérationnel ou calcul symbolique qui facilite la résolution des équations différentielles linéaires qui représenteront les systèmes que nous allons étudier.

### 3.1- TRANSFORMATION DE LAPLACE

#### 3.1-1-Définition

Soit  $f(t)$  une fonction à valeur réelle ou complexe de la variable réelle  $t$  définie de  $[0, \infty[$  et soit  $P = \alpha + j\beta$ , une variable complexe; l'expression :

$$L(f(t)) = F(P) = \int_0^{\infty} e^{-Pt} f(t) dt \quad (3.1)$$

s'appelle la transformation de Laplace unilatérale.

#### Exemple 1:

$$\text{Si } f(t)=1, \text{ alors : } L(f(t)) = L(1) = \int_0^{\infty} e^{-Pt} \cdot dt = \frac{1}{P} \quad (3.2)$$

Dans cet exemple, l'intégrale converge si et seulement si la partie réelle de  $P > 0$

#### Exemple 2 :

$$\text{Si } f(t)=e^{at} \text{ alors : } L(f(t)) = L(e^{at}) = \int_0^{\infty} e^{at} \cdot e^{-Pt} \cdot dt = \frac{1}{P-a} \quad , \quad (3.3)$$

Il y'a convergence si  $\text{Rel}(P-a) > 0$  ou  $\text{Rel}(P) > \text{Rel}(a)$ .

#### **Transformée Bilatérale :**

On définit aussi une transformation de Laplace sur le domaine  $\mathbb{R}$  des nombres réels:

$$L(f(t)) = F(P) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Pt} f(t) dt \quad (3.4)$$

Cette transformation n'est pas beaucoup utilisée dans le domaine de l'engineering car on considère les signaux qui respectent la causalité et donc qui existent à partir d'un instant  $t_0$ .

### 3.1-5 Transformation de Laplace Inverse

On peut revenir de la transformée de Laplace à la fonction du temps  $f(t)$  par la transformation inverse suivante :

$$f(t) = F^{-1}(P) = \frac{1}{2\pi \cdot j} \int_{x-j\infty}^{x+j\infty} e^{Pt} F(P) dP \quad (3.5)$$

Dans cette expression,  $x$  est un nombre réel quelconque, et  $x \geq a$  pour  $A_1$  et  $a \leq x \leq b$  pour  $A_2$ .

### 3.2-PROPRIETES :

#### a)-Addition

La transformée de Laplace d'une somme de fonctions  $f_1(t)$  et  $f_2(t)$  est égale à la somme de leurs Transformées de Laplace.

$$L(f_1 + f_2) = L(f_1) + L(f_2) \quad (3.6)$$

#### b)- Multiplication par une constante

$$L(cf) = cL(f) \quad (3.7)$$

#### c)- Linéarité

Les propriétés d'addition et de multiplication par une constante lorsqu'elles sont combinées conduisent au fait que la transformée de Laplace est une transformation linéaire :

$$L\left(\sum_{k=1}^n c_k \cdot f_k(t)\right) = \sum_{k=1}^n c_k \cdot L[f_k(t)] \quad (3.8)$$

**Exemple :** Déterminer la transformée de Laplace de la fonction  $f(t) = \cos \omega t$ . Celle-ci est obtenue en utilisant l'expression exponentielle.

$$f(t) = \cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} \quad (3.9)$$

En appliquant la transformée de Laplace et la propriété de linéarité, on a :

$$L(\cos \omega t) = F(s) = L\left(\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\right) = \frac{1}{2} L(e^{j\omega t}) + \frac{1}{2} L(e^{-j\omega t}) = \frac{s}{P^2 + \omega^2} \quad (3.10)$$

#### d)- Dérivées :

La dérivée première est obtenue par :

$$L(f'(t)) = PL(f(t)) - f(0) = PF(s) - f(0) \quad (3.11)$$



La dérivée seconde :

$$\mathbf{L}(f''(t)) = P^2 \mathbf{L}(f(t) - P \cdot f(0) - f'(0)) = P^2 \cdot F(p) + P \cdot f(0) - f'(0) \quad (3.12)$$

La dérivée troisième :

$$\mathbf{L}(f'''(t)) = \mathbf{L} \cdot P^3 (f(t) - s^2 \cdot f(0) - s \cdot f'(0) - f''(0)) \quad (3.13)$$

Généralisation aux dérivées d'ordre n :

Supposons que  $f(t)$ , et ses dérivés  $f^k(t)$ , pour  $k=1,2,\dots,n$  sont continues par morceaux et ont un ordre exponentiel à l'infini. Alors on a:

$$L(f^{(n)}(t)) = P^n L(f) - P^{n-1} f(0) - P^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \quad (3.14)$$

Si on considère les valeurs initiales toutes nulles, on :

$$L(f^{(n)}(t)) = P^n L(f) = P^n \cdot F(P) \quad (3.15)$$

#### e)- Théorème de la valeur initiale

On peut déterminer la valeur de la fonction  $f(t)$  à l'origine si on connaît la limite à l'infini de sa transformée de Laplace.

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s) \quad (3.16)$$

#### f)- Théorème de la valeur finale

On peut déterminer la valeur de la fonction  $f(t)$  à l'infini si on connaît la limite pour  $p \rightarrow 0$  de sa transformée de Laplace.

$$f(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p F(p) \quad (3.17)$$

#### g) – retard ou délai ou règle de translation en t

si  $L(f) = F(P)$  alors

$$L(f(t-T)) = e^{-PT} F(P). \quad (3.18)$$

$e^{-PT}$  est appelé facteur de retard.

#### h)-règle de translation complexe en p

$$L(e^{-at} f(t)) = F(P + a) \quad (3.19)$$

$$\text{Exemple : } L(e^{-at} \cdot \cos \omega t) = \frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2} \quad (3.20)$$

### i)-produit de deux fonctions

$$L[f_1(t) \cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(w) F_2(w) dw \quad (3.21)$$

### j)-produit de convolution

$$L^{-1}[F_1(p) \cdot F_2(p)] = \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t f_2(\tau) \cdot f_1(t-\tau) d\tau \quad (3.22)$$

**k)** -Soit  $f(t)$  une fonction continue par morceaux sur  $[0, A]$  (pour tout  $A > 0$ ) et a un ordre exponentiel à l'infini. Alors, on a:  $L(t^n f(t)) = (-1)^n F^{(n)}(P)$

Où  $F^{(n)}$  est la dérivée d'ordre  $n$  de la fonction  $F$ .

**l)** Soit  $f(t)$  une fonction continue par morceaux sur  $[0, A]$  (pour tout  $A > 0$ ) et a un ordre exponentiel à l'infini. Supposons que la limite  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t}$ , est finie. Alors, on a :

$$L\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_s^\infty L(f(\tau)) d\tau \quad (3.23)$$

### m)-Règle de similitude (Changement d'échelle) :

$$\text{Soit } g(t) = f(at) \quad (a > 0), \text{ alors } L(f(at)) = \frac{1}{a} F\left(\frac{P}{a}\right) \quad (3.24)$$

## 3.3- FONCTIONS PARTICULIERES

Dans l'étude des systèmes et des équations différentielles qui servent à les décrire, on utilise une famille particulière de fonctions, les **fonctions singulières** qui sont des fonctions de fonctions **ou Distributions**. Pour bien comprendre ces fonctions singulières, il faut les étudier dans le cadre de la théorie des distributions qui est une théorie qui généralise la théorie des fonctions.

Les Distributions qu'on utilise plus fréquemment sont la distribution échelon unité (distribution de Heaviside). La distribution impulsion unité (Distribution de Dirac) et la distribution pente unité (ou l'échelon de vitesse).

### 3.3.1 Echelon unité (Distribution d'Heaviside)

Cette fonction respecte le principe de causalité, c'est-à-dire qu'elle est nulle pour les temps négatifs. En effet, l'ensemble des paramètres est supposé être au repos dans les temps négatifs.

Cette fonction présente un signal qui passe de la valeur nulle à la valeur 1 très rapidement et qui reste ensuite constamment égal à 1.

Elle notée  $\mu(t)$  ou bien  $1.\mu(t)$

$$\mu(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

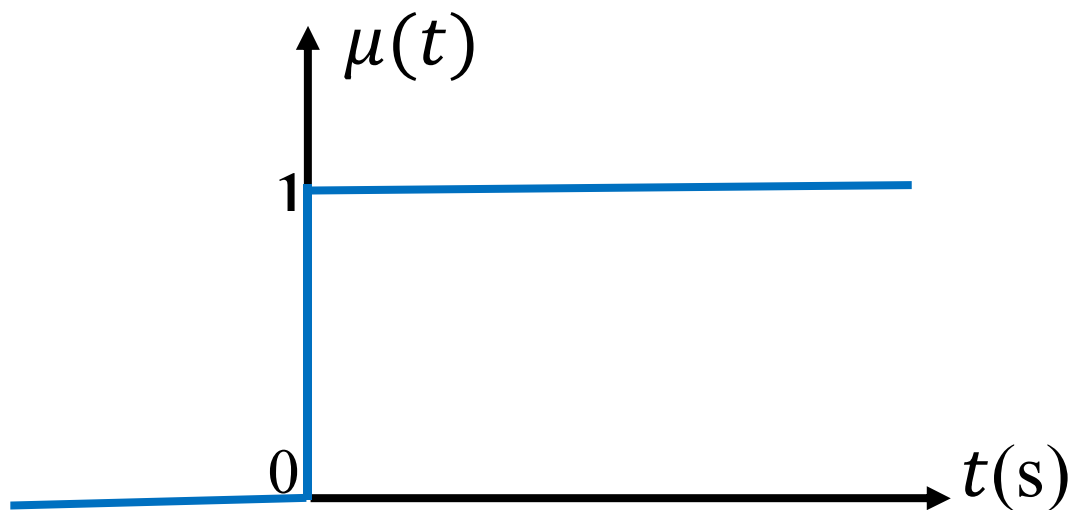


Figure N01 signale de l'échelon unité

La transformée de Laplace de l'échelon unité

$$\mathbf{L}[1.\mu(t)] = \int_0^{\infty} 1.\mu(t) \cdot e^{-Pt} dt = \frac{1}{p} \quad (3.26)$$

### 3.3.2 Echelon de vitesse ( Rampe unité)

Il est noté  $t.\mu(t)$  et définit

$$t.\mu(t) = \begin{cases} t & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

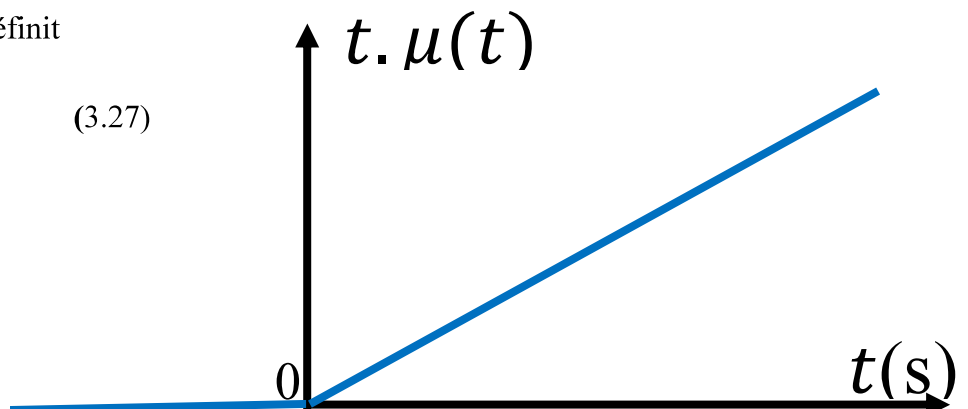


Figure N02 Signale de l'échelon de vitesse

La transformée de Laplace de l'échelon de vitesse

$$\mathbf{L}[t \cdot \mu(t)] = \int_0^{\infty} t \cdot \mu(t) \cdot e^{-p} dt = \frac{1}{p^2} \qquad \mathbf{L}[\mu(t)] = \frac{1}{p} \qquad (3.28)$$

### 3.3.3 L'impulsion unité (Distribution de Dirac)

On peut définir l'impulsion unité  $\delta(t)$  comme une fonction nulle partout sur  $\mathbb{R}$  sauf en un seul point  $t_0$  où elle prend une valeur infinie.

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty & \text{si } t = t_0 \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \qquad (3.29)$$

La Distribution de Dirac peut être approchée par le signal de la Figure N04, si on fait tendre  $\varepsilon$  vers 0,  $\delta_1$  ne tend pas vers une limite au sens des fonctions, mais au sens des distributions car  $\delta_1(t)$  n'est pas dérivable aux deux points de discontinuités. Cette limite est  $\delta(t)$ , qui est appelée la distribution de Dirac.

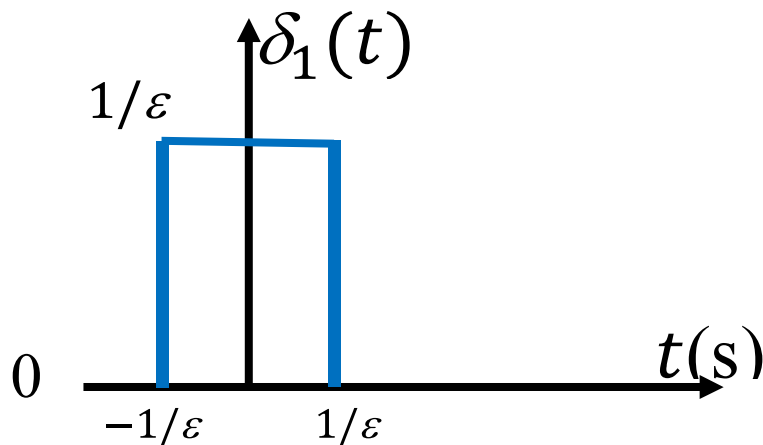


Figure N04 Signale approchée

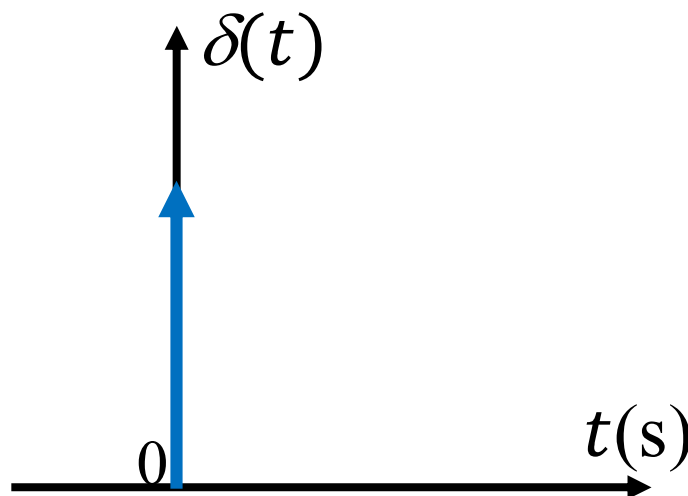


Figure N05 Signale de l'impulsion unité

La distribution de Dirac peut être obtenue comme la dérivée de la distribution de Heaviside.

La transformée de Laplace de la Distribution de Dirac est égale à l'unité:

$$\mathbf{L}[\delta(t)] = F(P) = 1 \quad (3.30)$$

On l'obtient par les opérations suivantes :

$$L(\delta(t)) = F(P) = \int_0^{\infty} e^{-Pt} \cdot \frac{1}{\varepsilon} dt = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} e^{-Pt} dt = \left[ \frac{e^{-Pt}}{-P} \right]_0^{\varepsilon} =$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[ \frac{e^{-s\varepsilon}}{-s} + \frac{1}{s} \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-P\varepsilon}}{P\varepsilon} = 1 \quad (3.31)$$

Donc la transformée de Laplace de la distribution de Dirac vaut l'unité:  $\mathbf{L}[\delta(t)] = 1$  (3.32)

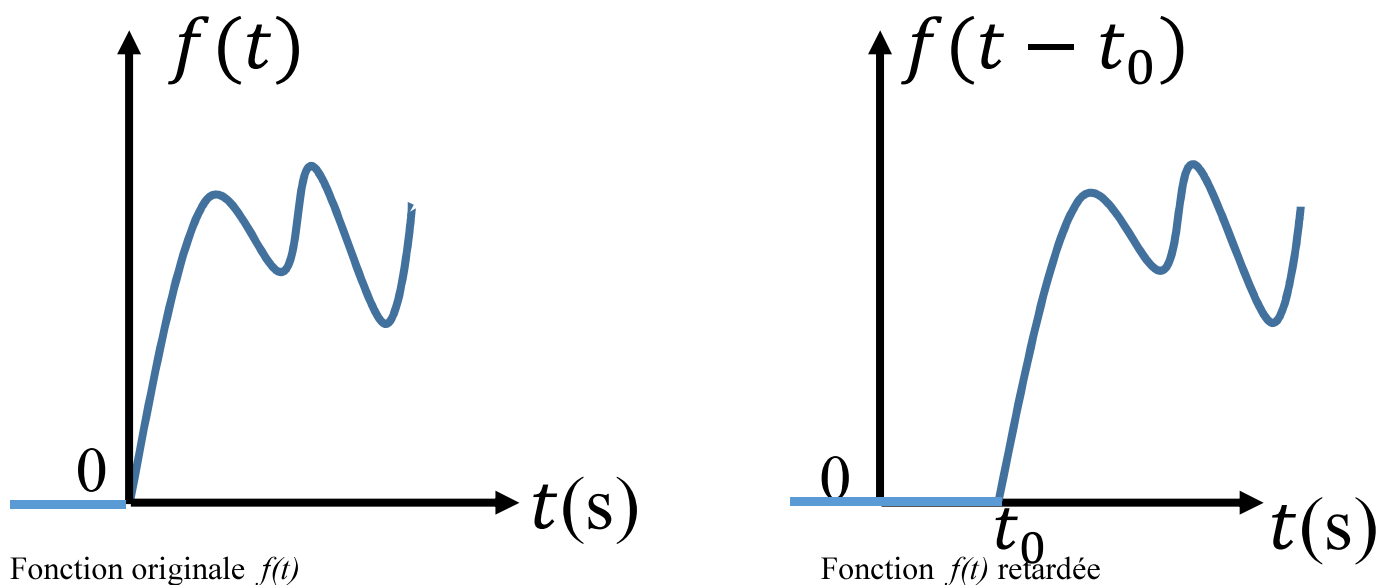
### 3.3.4 Fonctions retardées

#### 3.3.4.1 Définition

Soit une fonction  $f(t)$  définie dans  $\mathbb{R}^+$  tel que  $f(t) = \begin{cases} \text{definit} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$  (3.33)

Alors sa fonction retardée notée  $f(t - t_0)$  est définie comme suit

$$f(t - t_0) = \begin{cases} \text{definit} & \text{si } t > t_0 \\ 0 & \text{si } t < t_0 \end{cases} \quad (3.34)$$



**Figure N06** Représentation d'un signal retardé

La transformée de Laplace d'une fonction est

$$\mathbf{L}[f(t)] = F(P) \quad (3.35)$$

La transformée de Laplace d'une fonction retardée

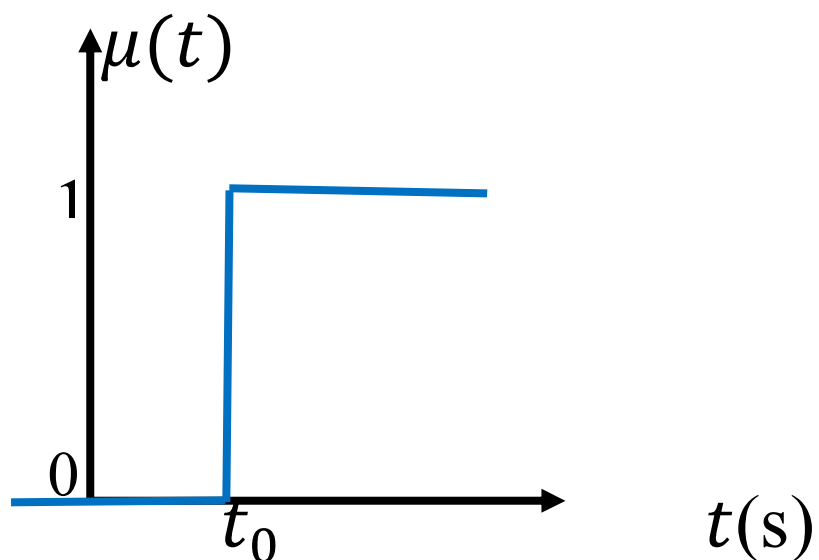
$$\mathbf{L}[f(t - t_0)] = F(P) \cdot e^{-Pt_0}$$

$e^{-Pt_0}$  est appelée opérateur de retard

La transformée de Laplace d'une fonction retardée est le produit de la transformée de la de la fonction originale par le facteur de retard  $e^{-Pt_0}$  ou  $t_0$  est le temps de retard.

3.3.4.2 Echelon d'unité retardé notée  $\mu(t - t_0)$  ou bien  $1 \cdot \mu(t - t_0)$  (3.36)

Il est défini  $\mu(t - t_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > t_0 \\ 0 & \text{si } t < t_0 \end{cases}$ . (3.37)



**Figure N06** signale de l'échelon unité retardée

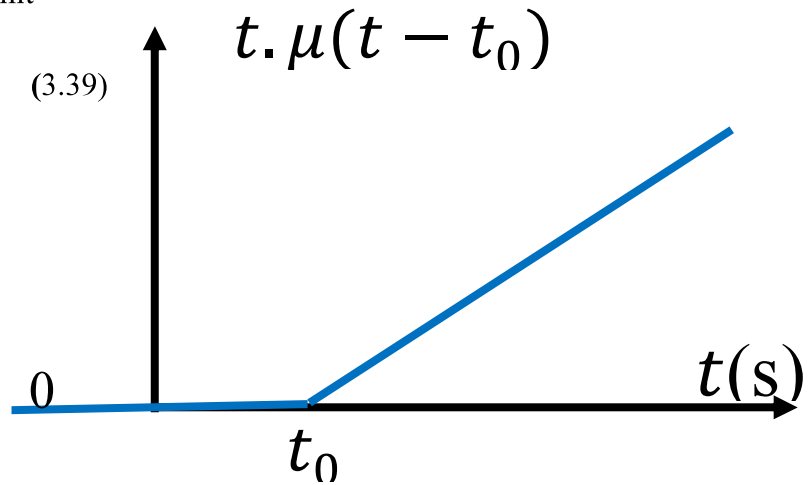
La transformée de Laplace de l'échelon unité retardée

$$\mathbf{L}[1 \cdot \mu(t - t_0)] = \int_0^{\infty} 1 \cdot \mu(t - t_0) \cdot e^{-Pt} dt = \frac{1}{P} \cdot e^{-Pt_0} \quad (3.38)$$

### 3.3.4.3 Echelon de vitesse retardé ( Rampe unité retardée)

Il est noté  $t.\mu(t - t_0)$  et définit

$$t.\mu(t - t_0) = \begin{cases} t & \text{si } t > t_0 \\ 0 & \text{si } t < t_0 \end{cases} \quad (3.39)$$



**Figure N02** Signale de l'échelon de vitesse

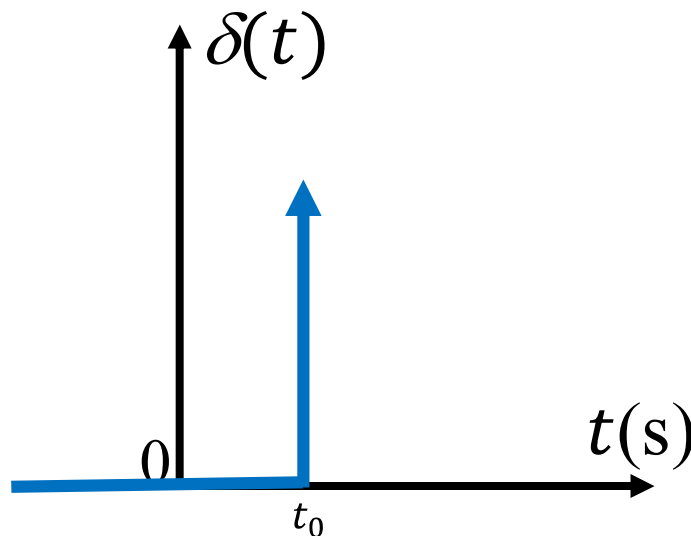
La transformée de Laplace de l'échelon de vitesse retardé

$$\mathbf{L}[t.\mu(t - t_0)] = \int_0^{\infty} t.\mu(t - t_0) \cdot e^{-Pt} dt = \frac{1}{p^2} e^{-Pt_0} \quad \mathbf{L}[t.\mu(t - t_0)] = \frac{1}{p^2} e^{-Pt_0} \quad (3.40)$$

### 4.4 L'impulsion unité retardé (Distribution de Dirac retardé)

On peut définir l'impulsion unité retardé  $\delta(t)$  comme une fonction nulle partout sur  $\mathbb{R}$  sauf en un seul point  $t_0$  où elle prend une valeur infinie.

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty & \text{si } t = t_0 \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad (3.41)$$



**Figure N05** Signale de l'impulsion unité

La distribution de Dirac peut être obtenue comme la dérivée de la distribution de Heaviside.

La transformée de Laplace de la Distribution de Dirac est égale à l'unité:

$$\mathbf{L}[\delta(t)] = F(P) = 1e^{-Pt_0} \quad (3.42)$$

### 3.4 -TABLEAU DE QUELQUES TRANSFORMEES DE LAPLACE

Le tableau suivant donne les transformées de Laplace de quelques fonctions.

| $f(p)$                      | $f(t) \quad 0 \leq t$                          |
|-----------------------------|--|
| 1                           | $u(t)$ imputation unité à $t=0$                |
| $\frac{1}{p}$               | 1 ou $\mu(t)$ échelle ou<br>unité à $t=0$      |
| $\frac{1}{p^2}$             | $t \cdot \mu(t)$                               |
| $\frac{1}{p^n}$             | $\frac{1}{(n-1)!} \cdot t^{n-1}$               |
| $\frac{1}{p} e^{-at}$       | $\mu(t-a)$                                     |
| $\frac{1}{p} (1 - e^{-at})$ | $\mu(t) - \mu(t-a)$                            |
| $\frac{1}{p+a}$             | $e^{-at}$                                      |
| $\frac{1}{(p+a)^n}$         | $\frac{1}{(n-1)!} \cdot t^{n-1} \cdot e^{-at}$ |
| $\frac{1}{p(p+a)}$          | $\frac{1}{a} (1 - e^{-at})$                    |
| $\frac{1}{(p+a)(p+b)}$      | $\frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt})$            |



### 3.5 Détermination de la fonction inverse de Laplace

#### 3.5.1 Exemple : Trouver la transformée inverse de $X(P)$

$$X(P) = \frac{1}{P(P+k)}$$

Solution

Nous allons décomposer en élément simple  $X(P)$ .

$$X(P) = \frac{1}{P(P+k)}$$

Les éléments simples sont les monômes de la forme  $(P - P_i)$  où  $(P_i)$  est un pôle de  $X(P)$  (est une valeur qui annule le dénominateur)

Les pôles (les racines du dénominateur) de  $X(P)$  sont  $P = 0$ ,  $P = -k$  alors  $X(P) = \frac{\alpha}{P} + \frac{\beta}{P+k}$

On réduit au même dénominateur ce qui nous donne :  $X(P) = \frac{\alpha(P+k) + \beta P}{P(P+k)} = \frac{P(\alpha+\beta) + \alpha k}{P(P+k)}$

Par identification on a  $\alpha + \beta = 0$  et  $\alpha k = 1$  alors  $\alpha = -\frac{1}{k}$  et  $\alpha = -\beta = \frac{1}{k}$

Soit  $X(P)$

$$X(P) = \frac{1}{k} \left( \frac{1}{P} - \frac{1}{P+k} \right)$$

On regarde dans la table, l'original de chaque terme et on établit le résultat

$$x(t) = \frac{1}{k} (1 - e^{-kt}).$$

#### 3.5.2 Rappel sur la décomposition en éléments simple des fonctions

##### 3.5.2.1 Pôles simple

La fonction  $F(P) = \frac{N(P)}{\prod_{i=1}^n (P - P_i)}$  s'écrit : ou le numérateur prend une forme quelconque.

La décomposition en élément simple s'écrit alors

$$\frac{N(P)}{\prod_{i=1}^n (P - P_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{(P - P_i)}$$

On obtient la valeur de chaque  $\alpha_k$  en multipliant la relation par  $(P - P_k)$  et en donnant à  $P$  la valeur de  $P_k$ . Le terme  $(P - P_k)$  disparaît dans la partie gauche au numérateur et au dénominateur.

Quand  $P = P_k$  à droite ne reste qu'un seul terme.

$$\frac{N(P_k)}{\prod_{i=1, i \neq k}^n (P_k - P_i)} = \alpha_k$$

Exemple :

$$F(P) = \frac{N(P)}{(P - P_1)(P - P_2)(P - P_3)}$$

Cette fonction se décompose de la manière suivante

$$F(P) = \frac{\alpha_1}{(P - P_1)} + \frac{\alpha_2}{(P - P_2)} + \frac{\alpha_3}{(P - P_3)}$$

Multiplions par  $(P - P_1)$  et de donnant à P ma valeur de  $P_1$

$$\alpha_1 + \frac{\alpha_2(P - P_1)}{(P - P_2)} + \frac{\alpha_3(P - P_1)}{(P - P_3)} = \frac{N(P)}{(P - P_2)(P - P_3)}$$

Pour  $P = P_1$

$$\alpha_1 + \frac{\alpha_2(P_1 - P_1)}{(P_1 - P_2)} + \frac{\alpha_3(P_1 - P_1)}{(P_1 - P_3)} = \frac{N(P_1)}{(P_1 - P_2)(P_1 - P_3)}$$

Il vient que

$$\alpha_1 = \frac{N(P_1)}{(P_1 - P_2)(P_1 - P_3)}$$

On établit de la même manière les valeurs de  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$

### 3.5.2.2 Pôles d'ordre multiple

La fonction s'écrit  $F(P) = \frac{N(P)}{\prod_{i=1}^n (P - P_i)^k}$

Pour faciliter la présentation supposons que la fonction se réduise à ,2 pôles l'un simple le second d'ordre 3.

$$\frac{N(P)}{(P - P_2)(P - P_2)^3} = \frac{\alpha_1}{(P - P_1)} + \frac{\alpha_2}{(P - P_2)^3} + \frac{\alpha_3}{(P - P_2)^2} + \frac{\alpha_4}{(P - P_2)}$$

La valeur de  $\alpha_1$  est obtenue comme dans le cas d'un pôle simple. Pour la suite, multiplions l'équation par  $(P - P_2)^3$

$$\frac{N(P)}{(P - P_1)} = \frac{\alpha_1 (P - P_2)^3}{(P - P_1)} + \alpha_2 + \alpha_3 (P - P_2) + \alpha_4 (P - P_2)^2$$

La valeur de  $\alpha_2$  est obtenue en donnant à  $P$  la valeur de  $P_2$  soit

$$\alpha_2 = \frac{N(P_2)}{(P_2 - P_1)}$$

Dérivons maintenant l'expression suivante

$$\frac{N(P)}{(P - P_1)} = \frac{\alpha_1 (P - P_2)^3}{(P - P_1)} + \alpha_2 + \alpha_3 (P - P_2) + \alpha_4 (P - P_2)^2$$

Relativement à  $P$  :

$$\frac{N'(P)(P - P_1) - N(P)}{(P - P_1)^2} = \frac{3\alpha_1 (P - P_2)^3}{(P - P_1)} + 0 + \alpha_3 (P - P_2) + \alpha_4 (P - P_2)^2$$

En donnant à  $P$  la valeur  $P_2$ , on déduit  $\alpha_3$ , en dérivant une seconde fois la même expression, on en déduit la valeur de  $\alpha_4$ .

### 3.5.2.3 Pôles complexes conjugués

Considérons l'exemple suivant

$$F(P) = \frac{1}{(P + 1)(P^2 + 2P + 10)}$$

La fonction se décompose ainsi :

$$F(P) = \frac{\alpha_1}{(P + 1)} + \frac{\alpha_2 P + \alpha_3}{(P^2 + 2P + 10)}$$

### 3.5.2.4 Application

Exemple d'une fonction ayant des Pôles réels

$$\text{Soit } F(P) = \frac{P+2}{P^2+15P+50}$$

Cherchons les pôles de F(P) on trouve  $P_1 = -5$  et  $P_2 = -10$  alors la fonction s'écrit sous la forme suivante

$$F(P) = \frac{P+2}{P^2+15P+50} = \frac{P+2}{(P+5)(P+10)}$$

Sa décomposition en fractions simple est donc

$$\begin{aligned} F(P) &= \frac{\alpha_1}{(P+5)} + \frac{\alpha_2}{(P+10)} \\ F(P) &= \frac{\alpha_1(P+10) + \alpha_2(P+5)}{(P+5)(P+10)} = \frac{10\alpha_1 + \alpha_1P + 5\alpha_2 + \alpha_2P}{(P+5)(P+10)} \\ F(P) &= \frac{(10\alpha_1 + 5\alpha_2) + (\alpha_1 + \alpha_2)P}{(P+5)(P+10)} \end{aligned}$$

Alors par identification à

$$F(P) = \frac{P+2}{(P+5)(P+10)}$$

On a le système à résoudre suivant :

$$\begin{cases} 10\alpha_1 + 5\alpha_2 = 2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 10\alpha_1 + 5\alpha_2 = 2 \\ \alpha_1 = 1 - \alpha_2 \end{cases} \quad 10(1 - \alpha_2) + 5\alpha_2 = 2$$

$$-5\alpha_2 = -8 \quad \alpha_2 = \frac{8}{5}$$

$$\alpha_1 = 1 - \alpha_2 \quad \alpha_1 = 1 - \frac{8}{5} \quad \alpha_1 = -\frac{3}{5}$$

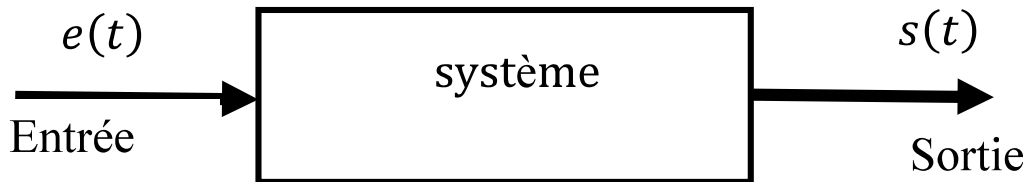
$$F(P) = \frac{\frac{-3}{5}}{(P+5)} + \frac{\frac{8}{5}}{(P+10)}$$

On écrit notre fonction en somme de fraction d'élément simple

$$F(P) = \frac{8}{5(P+10)} - \frac{3}{5(P+5)}$$

4.1 Définition

Un système est représenté par son schéma bloc ou son schéma fonctionnel



Ce système asservi est décrit par une équation différentielle linéaire, à coefficients constants de la forme suivante :

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + a_1 \frac{d s(t)}{dt} + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b \frac{d^2 e(t)}{dt^2} + b_1 \frac{d e(t)}{dt} + b_0 e(t) \quad (4.1)$$

Nous allons exprimer la sortie en fonction de l'entrée sans résoudre l'équation différentielle, alors nous passons dans le domaine de Laplace.

Nous appliquant la transformation de Laplace à l'équation différentielle du système.

Utilisons le théorème de dérivation, avec toutes les conditions initiales nulles, nous obtenons :

$$a_n P^n S(P) + a_{n-1} P^{n-1} S(P) + \dots + a_2 P^2 S(P) + a_1 P S(P) + a_0 S(P) = b_m P^m S(P) + b_{m-1} P^{m-1} E(P) + \dots + b_2 P^2 S(P) + b_1 P S(P) + b_0 E(P) \quad (4.2)$$

$$S(P)(a_n P^n + a_{n-1} P^{n-1} + \dots + a_2 P^2 + a_1 P + a_0) = E(P)(b_m P^m + b_{m-1} P^{m-1} + \dots + b_2 P^2 + b_1 P + b_0) \quad (4.3)$$

ce qui donne :

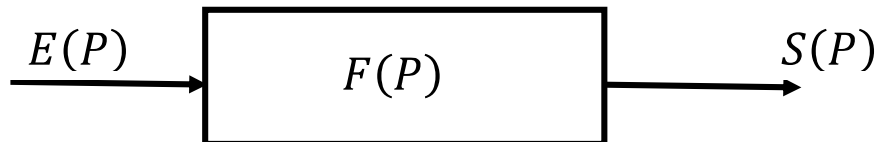
$$\frac{S(P)}{E(P)} = \frac{b_m P^m + b_{m-1} P^{m-1} + \dots + b_2 P^2 + b_1 P + b_0}{a_n P^n + a_{n-1} P^{n-1} + \dots + a_2 P^2 + a_1 P + a_0} \quad (4.4)$$

$F(P)$  est appelée la fonction de transfert ou transmittance du système.

La fonction de transfert représente le rapport de la transformée de la sortie  $S(P)$  sur la transformée de l'entrée  $E(P)$ .

$$F(P) = \frac{S(P)}{E(P)} \quad (4.5)$$

La représentation du système dans le domaine de Laplace est



#### 4.2 Forme canonique

La fonction de transfert est définie :

$$F(P) = \frac{b_m P^m + b_{m-1} P^{m-1} + \dots + b_2 P^2 + b_1 P + b_0}{a_n P^n + a_{n-1} P^{n-1} + \dots + a_2 P^2 + a_1 P + a_0} \quad (4.6)$$

Dans le cas des systèmes physiques, le degré du dénominateur est supérieur au degré du numérateur  $n > m$ .

Il est toujours possible de mettre la fonction de transfert sous la forme dite canonique avec

$$F(P) = \frac{N(P)}{D(P)} = K \cdot \frac{N(P)}{P^\alpha D_1(P)} = \frac{b_m P^m + b_{m-1} P^{m-1} + \dots + b_2 P^2 + b_1 P + 1}{P^\alpha (a_n P^n + a_{n-1} P^{n-1} + \dots + a_2 P^2 + a_1 P + 1)} \quad (4.7)$$

avec

$N(P)$  : un polynôme en  $P$  avec  $N(0) = 1$

$D_1(P)$  : un polynôme en  $P$  avec  $D_1(0) = 1$

$K$  : le gain statique de la fonction de transfert

$\alpha$  : la classe de la fonction de transfert

#### 1.3 Pôles et zéros d'une fonction de transfert

Les zéros sont les racines du numérateur  $N(P)$

Les pôles sont les racines de dénominateur  $D(P)$

#### 4.2.1 Exemple

Pour les fonctions suivantes  $F_1(P) = \frac{2P-1}{P+3}$  et  $F_2(P) = \frac{2}{P^2-1}$

|       |   |  |
|-------|---|--|
|       | $F_1(P) = \frac{2P-1}{P+3}$                   | $F_2(P) = \frac{2}{P^2-1}$   |
| Pôles | La fonction a un pôle ( $P_1$ )<br>$P_1 = -3$ | La fonction a deux pôles ( $P_1$ et $P_2$ )<br>$P_1 = -1$ $P_2 = +1$ |

### 4.3. Détermination de fonction de transfert

#### 4.3.1 Circuit électrique

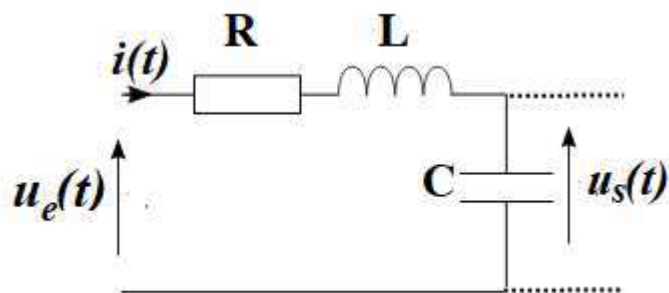


Figure N°1 : Circuit électrique

$u_e(t)$  est la tension d'entrée du circuit, qui représente la tension d'alimentation du circuit

$u_s(t)$  est la tension de sortie du circuit, qui représente la tension aux bornes du condensateurs C.

Appliquant la loi des mailles

$$u_e(t) = R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + u_s(t) \quad (4.9)$$

$$\text{Et comme } i(t) = C \frac{du_s(t)}{dt} \quad (4.10)$$

$$\text{On obtient } u_e(t) = LC \frac{d^2u_s(t)}{dt^2} + RC \frac{du_s(t)}{dt} + u_s(t) \quad (4.11)$$

En prenant la transformée de Laplace de cette expression

$$L\{u_e(t)\} = L\left\{LC \frac{d^2u_s(t)}{dt^2} + RC \frac{du_s(t)}{dt} + u_s(t)\right\} \quad (4.12)$$

$$L\{u_e(t)\} = L\left\{LC \frac{d^2u_s(t)}{dt^2}\right\} + L\left\{RC \frac{du_s(t)}{dt}\right\} + L\{u_s(t)\} \quad (4.13)$$

$$L\{u_e(t)\} = LC \cdot L\left\{\frac{d^2u_s(t)}{dt^2}\right\} + RC \cdot L\left\{\frac{du_s(t)}{dt}\right\} + L\{u_s(t)\} \quad (4.14)$$

$$L\{u_e(t)\} = U_e(P) \quad (4.15)$$

$$L\{u_s(t)\} = U_s(P) \quad (4.16)$$

$$L\left\{\frac{d^2u_s(t)}{dt^2}\right\} = P^2U_s(P) + Pu_s(0) + u_s(0) \quad (4.17)$$

$$L\left\{\frac{du_s(t)}{dt}\right\} = PU_s(P) + u_s(0) \quad (4.18)$$

(Considérant des conditions initiales nulles), il vient :

$$L\{u_e(t)\} = U_e(P) \quad (4.19)$$

$$L\{u_s(t)\} = U_s(P) \quad (4.20)$$

$$L\left\{\frac{d^2u_s(t)}{dt^2}\right\} = P^2U_s(P) \quad (4.21)$$

$$L\left\{\frac{du_s(t)}{dt}\right\} = PU_s(P) \quad (4.22)$$

$$L\{u_e(t)\} = LC.L\left\{\frac{d^2u_s(t)}{dt^2}\right\} + RC.L\left\{\frac{du_s(t)}{dt}\right\} + L\{u_s(t)\} \quad (4.23)$$

$$U_e(P) = LC.P^2U_s(P) + RC.PU_s(P) + U_s(P)$$

$$U_e(P) = U_s(P) (LC.P^2 + RC.P + 1) \quad (4.24)$$

La fonction de transfert est

$$\frac{U_e(P)}{U_s(P)} = \frac{1}{(LC.P^2 + RC.P + 1)} \quad (4.24)$$

#### 4.3.2 Exemple mécanique

Le système consiste en une masse M reliée à un bâti immobile par l'intermédiaire d'un ressort de raideur K et d'un amortisseur de coefficient d'amortissement f.

Le ressort et l'amortissement sont montés en parallèle (voir figure)

La masse peut se déplacer dans une seule direction (ox).

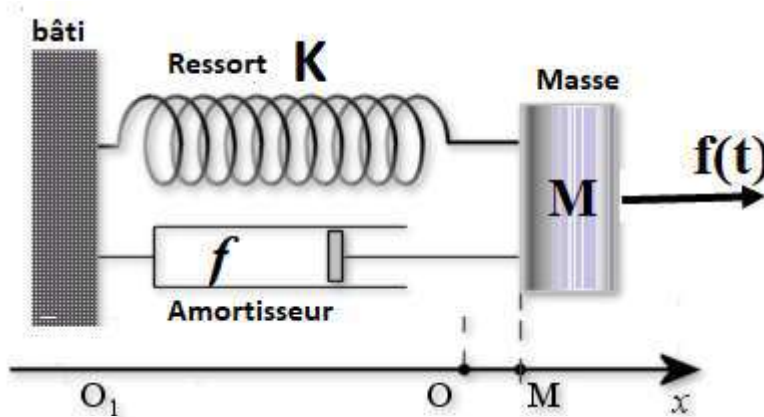


Figure N°2 : Exemple mécanique (masse- ressort)

la masse est soumise à une force f(t) dirigée dans la direction (ox). On suppose les forces appliquées au centre d'inertie de la masse.

L'application du principe fondamentale de la dynamique permet d'aboutir à l'équation du mouvement.

$$M \frac{d^2x(t)}{dt^2} + f \frac{dx(t)}{dt} + Kx(t) = f(t) \quad (4.25)$$

En appliquant la transformée de Laplace à l'équation précédente, et en choisissant la position x(t) de la masse comme sortie.

$$L\left[M \frac{d^2x(t)}{dt^2} + f \frac{dx(t)}{dt} + Kx(t)\right] = L[f(t)] \quad (4.26)$$

$$L\left[M \frac{d^2x(t)}{dt^2}\right] + L\left[f \frac{dx(t)}{dt}\right] + L[Kx(t)] = L[f(t)] \quad (4.27)$$

$$M.L\left[\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right] + f.L\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] + K.L[x(t)] = L[f(t)] \quad (4.28)$$



Les conditions sont nulles , on trouve :

$$M.P^2X(P) + f.PX(P) + K.X(P) = F(P) \quad (4.29)$$

$$D'où \quad X(P) (M.P^2 + f.P + K) = F(P) \quad (4.30)$$

On obtient la fonction de transfert comme le rapport de X (P) sur F (P)

$$\frac{X(P)}{F(P)} = \frac{1}{M.P^2 + f.P + K} \quad (4.31)$$

### 4.3.3 Moteur à courant continu

Le schéma électrique d'un moteur à courant continue simple est

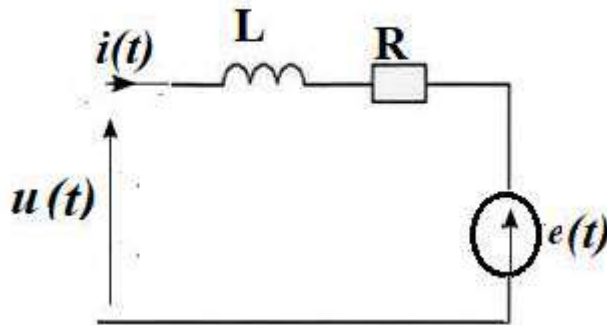


Figure N°3 : circuit équivalent simple d'un moteur électrique

Il est gérée par des équation suivantes :

$$\text{Équation électrique de l'induit} \quad u(t) = R.i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t) \quad (4.32)$$

$$\text{Équation du couple} \quad C_m = K.i(t) \quad (4.33)$$

$$\text{Équation mécanique de l'arbre moteur} \quad C_m - f.\omega(t) = J.\frac{d\omega(t)}{dt} \quad (4.34)$$

$$\text{la force contre électromotrice du moteur (Fém.)} \quad e(t) = K_e . \omega(t) \quad (4.35)$$

Appliquant la transformée de Laplace aux équations précédente on obtient

$$L[u(t)] = L \left[ R.i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t) \right] \quad (4.36)$$

$$U(P) = R.I(P) + L P.I(P) + E(P) \quad (4.37)$$

$$U(P) - E(P) = I(P)(R + LP) \quad (4.38)$$

$$\frac{I(P)}{U(P)-E(P)} = \frac{1}{(R+LP)} \quad (4.39)$$

$$L[C_m] = L[K \cdot i(t)] \quad C_m(P) = K \cdot I(P) \quad K = \frac{C_m(P)}{I(P)} \quad (4.40)$$

$$L[C_m - f \cdot \omega(t)] = L\left[J \cdot \frac{d\omega(t)}{dt}\right] \quad C_m(P) - f \cdot \Omega(P) = J \cdot P \cdot \Omega(P) \quad (4.41)$$

$$C_m(P) = f \cdot \Omega(P) + J \cdot P \cdot \Omega(P). \quad C_m(P) = \Omega(P) (f + J \cdot P)$$

$$\frac{\Omega(P)}{C_m(P)} = \frac{1}{(f + J \cdot P)} \quad (4.42)$$

$$L[e(t)] = L[K_e \cdot \omega(t)] \quad E(P) = K_e \cdot \Omega(P) \quad K_e = \frac{E(P)}{\Omega(P)}. \quad (4.43)$$

Schéma fonctionnel est représenté avec toute la fonction de transfert de tout l'élément du

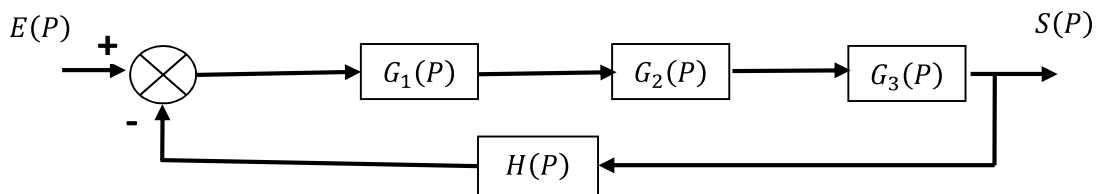


Figure N°4 : schéma bloc ou fonctionnel

$$\text{L'entrée} \quad E(P) = U(P) \quad (4.44)$$

$$\text{La sortie} \quad S(P) = \Omega(P) \quad (4.45)$$

$$G_1(P) = \frac{I(P)}{U(P) - E(P)} = \frac{1}{R + LP} \quad (4.46)$$

$$G_2(P) = K_i = \frac{C_m(P)}{I(P)} \quad (4.47)$$

$$G_3(P) = \frac{\Omega(P)}{C_m(P)} = \frac{1}{f + J \cdot P} \quad (4.48)$$

$$H(P) = K_e = \frac{E(P)}{\Omega(P)}. \quad (4.49)$$

Le schéma fonctionnel global sera présenté et composé par les fonctions de transfert de chaque élément qui le constitué.

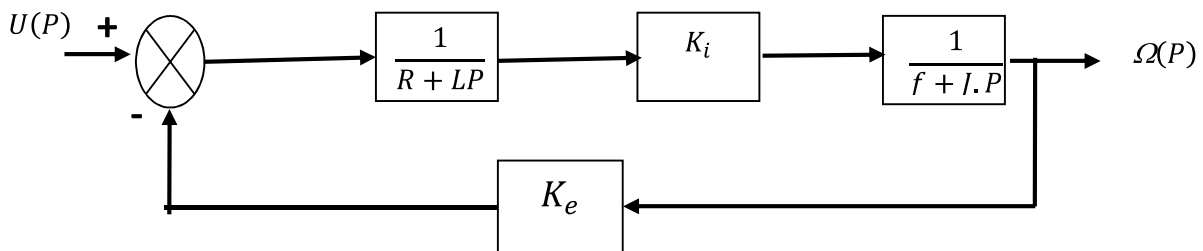
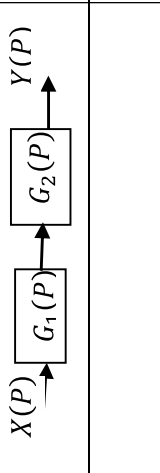
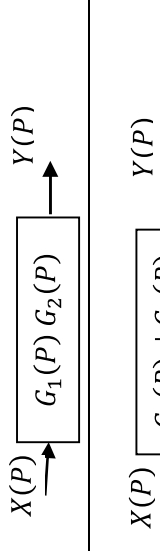
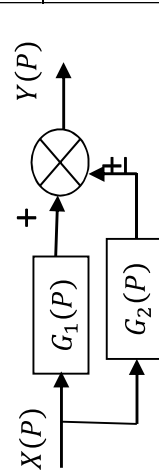
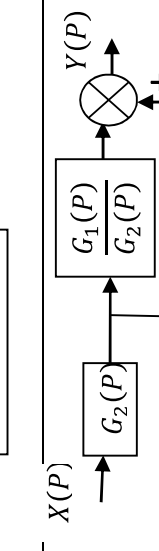
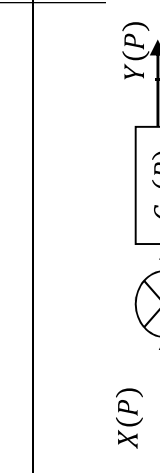
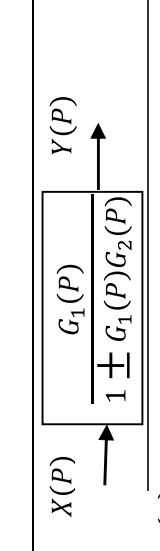
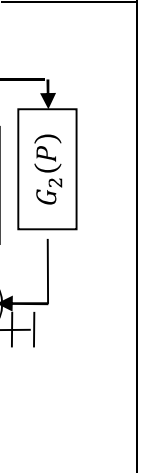
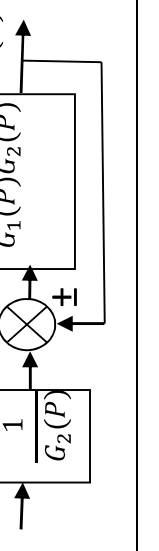


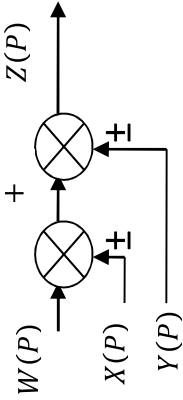
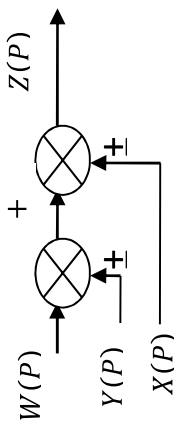
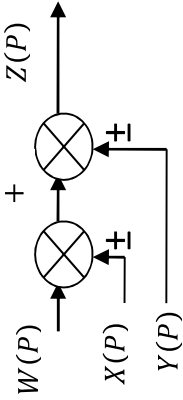
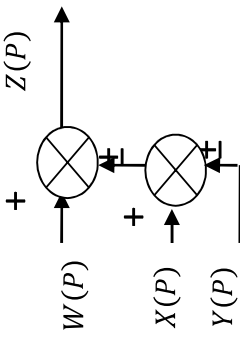
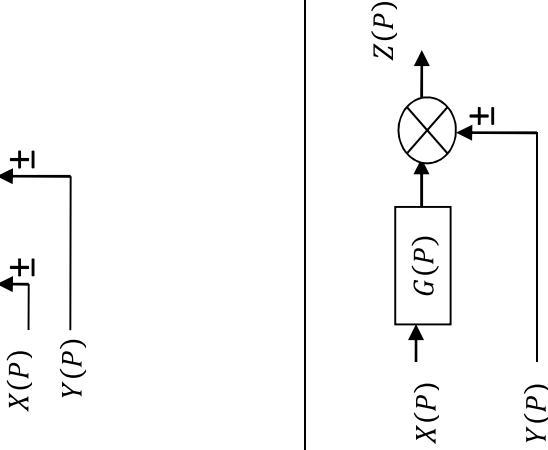
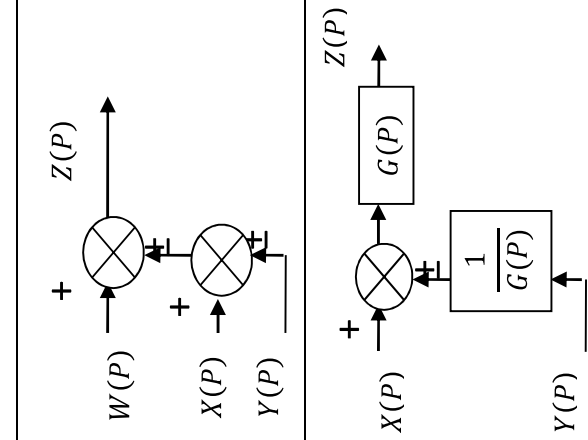
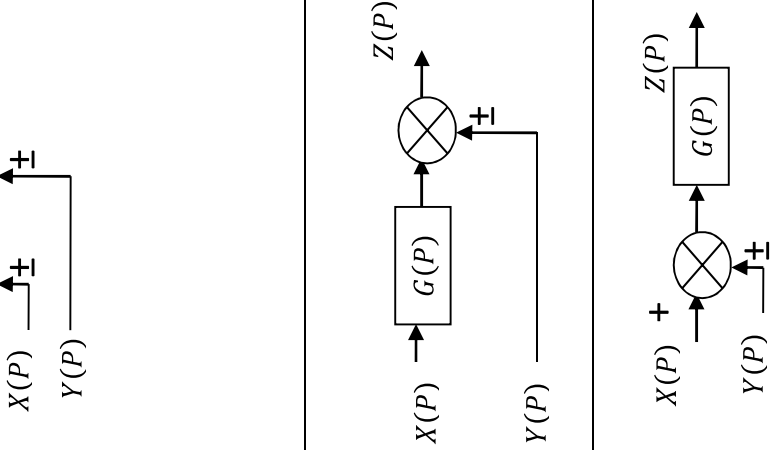
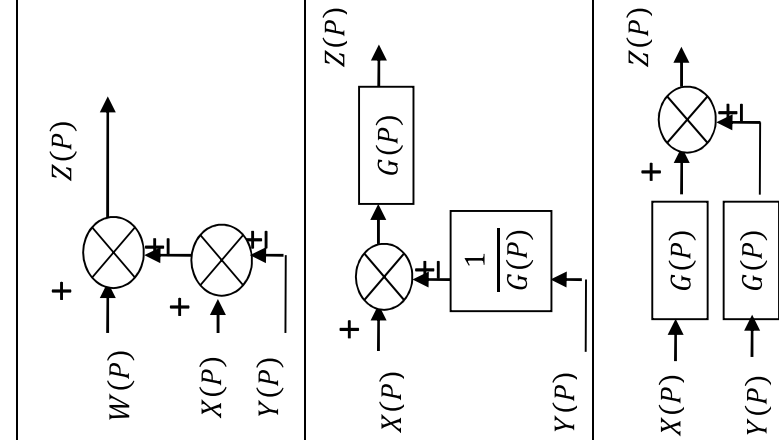
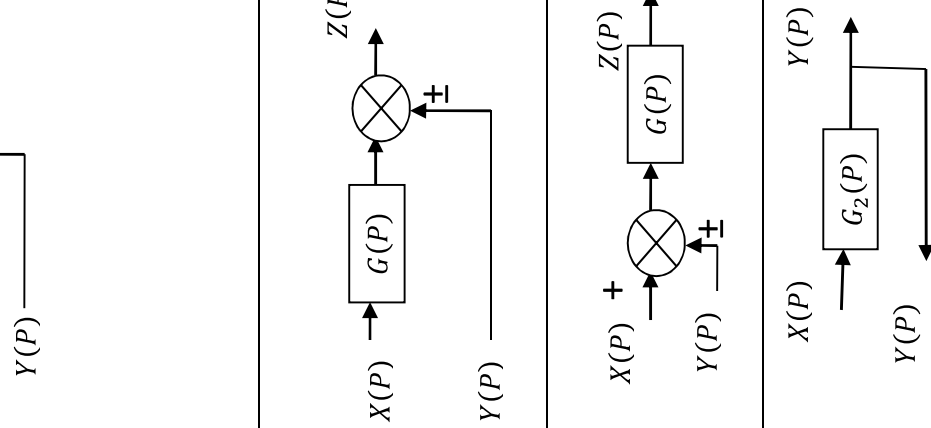
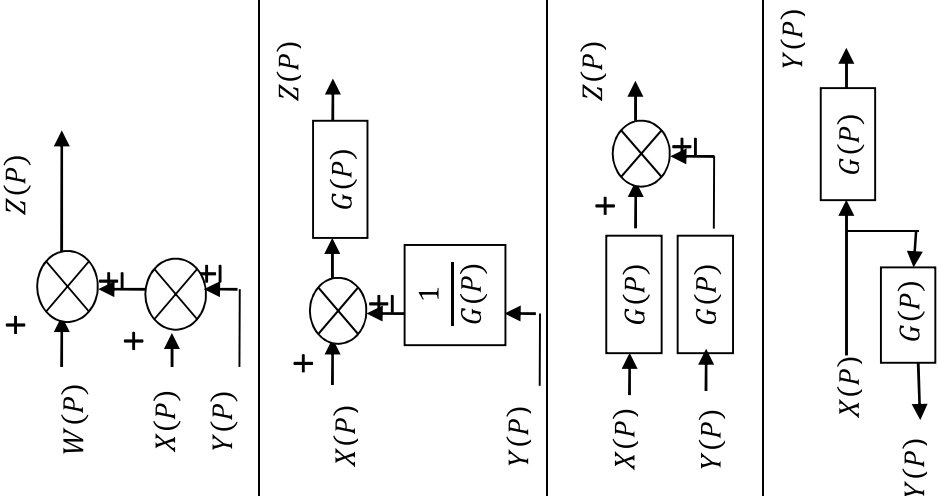


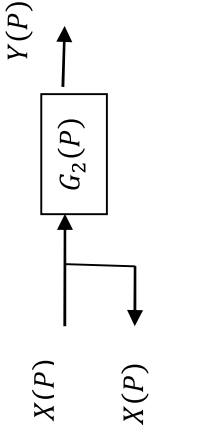
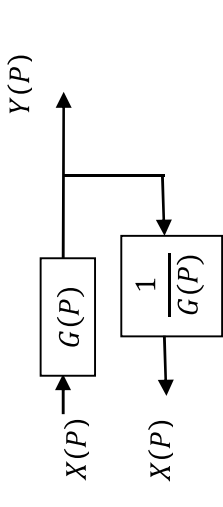
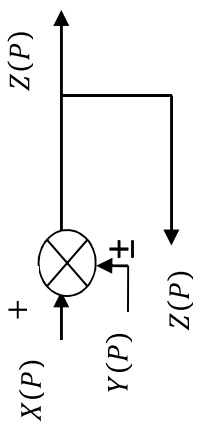
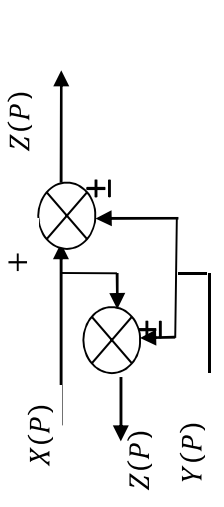
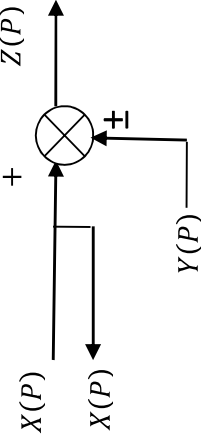
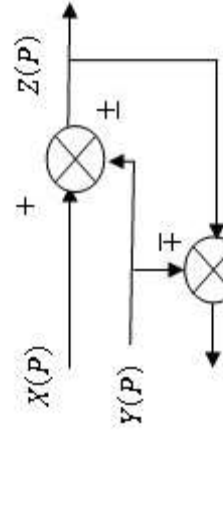
Figure N°3 : Schéma fonctionnel avec les fonctions de transfert de chaque élément

## 4.4 Réduction des schémas fonctionnels

### 4.4.1 Transformation des schémas fonctionnels

| Transformation   | Equation                             | Schéma fonctionnel   | Schéma fonctionnel équivalent   |
|--|--------------------------------------|--|---|
| 1<br>Association des éléments en cascade   | $Y(P) = G_1(P)G_2(P)X(P)$            |    |    |
| 2<br>Association des éléments en parallèle, ou suppression d'une boucle d'action | $Y(P) = G_1(P)X(P) \pm G_2(P)X(P)$   |    |    |
| 3<br>Retrait d'un élément d'une chaîne d'action                                  | $Y(P) = G_1(P)X(P) \pm G_2(P)X(P)$   |   |   |
| 4<br>Elimination d'une boucle de retour  | $Y(P) = G_1(P)(X(P) \pm G_2(P)Y(P))$ |  |  |
| 5<br>Retrait d'un élément d'une boucle de retour                                 | $Y(P) = G_1(P)(X(P) \pm G_2(P)Y(P))$ |  |  |

|    |  |                                 |   |  |
|----|--|---------------------------------|---|--|
| 6a | Redispotion des comparateurs                               | $Z(P) = W(P) \pm X(P) \pm Y(P)$ |   |   |
| 6b | Redispotion des comparateurs                               | $Z(P) = W(P) \pm X(P) \pm Y(P)$ |   |   |
| 7  | Déplacement d'un comparateur en amont d'un élément         | $Z(P) = G(P)X(P) \pm Y(P)$      |   |   |
| 8  | Déplacement d'un comparateur en aval d'un élément          | $Z(P) = G(P)(X(P) \pm Y(P))$    |  |  |
| 9  | Déplacement d'un point de dérivation en amont d'un élément | $Y(P) = G(P)X(P)$               |  |  |

|    |  |                        |  |   |
|----|--|------------------------|--|---|
| 10 | Déplacement d'un point de dérivation en aval d'un élément  | $Y(P) = G(P)X(P)$      |  |  |
| 11 | Déplacement d'un point de dérivation en amont d'un capteur | $Z(P) = X(P) \pm Y(P)$ |  |  |
| 12 | Déplacement d'un point de dérivation en aval d'un capteur  | $Y(P) = X(P) \pm Y(P)$ |  |  |

#### 4.4.2 Réduction des schémas fonctionnels compliqués.

On peut employer les étapes générales suivantes comme démarche fondamentale dans la réduction de schémas fonctionnels compliqués. Chaque étape se rapporte aux transformations particulières du tableau.

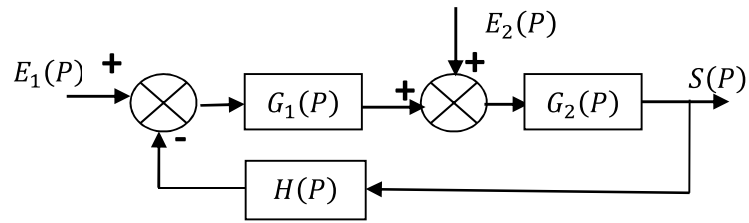
|  |   |
|--|---|
| Etape 1  | Associer tous les éléments en série en se servant de la transformation 1  |
| Etape 2  | Associer tous les éléments en parallèle en utilisant la transformation 2  |
| Etape 3  | Eliminer toutes les boucles de retour non principales en utilisant la transformation 4  |
| Etape 4  | Faire passer les comparateurs à gauche, et les points de dérivation à droite de la boucle principale, en utilisant les transformations 7, 10, 12. |
| Etape 5  | Répéter les étapes 1 à 4 jusqu'à l'obtention de la forme canonique pour un signal d'entrée particulier.   |
| Etape 6  | Répéter les étapes 1 à 5 pour chaque signal d'entrée, ainsi qu'il est spécifié.   |
| Les autres transformations (3, 5, 6, 8, 9, 11) sont parfois utiles, et on pourra les utiliser avec l'expérience. |   |

#### 4.4.3 Système asservi linéaire avec des signaux d'entrée multiples.

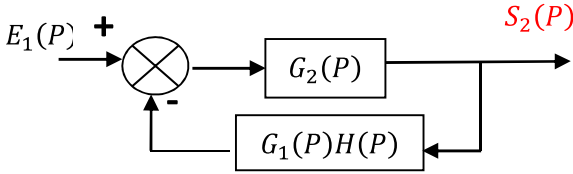
Pour trouver la réponse d'un tel système asservi, on utilise la méthode suivante :

|         |  |
|---------|--|
| Etape 1 | Annuler tous les signaux d'entrée sauf un seul   |
| Etape 2 | Chercher le schéma fonctionnel à l'aide des transformations  |
| Etape 3 | Calculer la réponse produite par le signal choisi agissant seul  |
| Etape 4 | Répéter les étapes 1 à 3 pour chaque des signaux d'entrée restants   |
| Etape 5 | Ajouter algébriquement toutes réponses (grandeurs de sortie) calculées dans les étapes 1 à 4. cette somme représente la grandeur de sortie totale obtenue quand tous les signaux d'entrée agissent ensemble. |

4.4.3.1 Exemple : pour le système suivant, déterminé  $S(P)$



|         |   |
|---------|---|
| Exemple |   |
| Etape 1 | <p>L'entrée <math>E_2(P)</math> est annulée,<br/>alors le schéma fonctionnel donné devient :</p>                              |
| Etape 2 | <p>Alors</p> $S_1(P) = \frac{G_1(P)G_2(P)}{1+H(P)G_1(P)G_2(P)} E_1(P)$  |
| Etape 3 | <p>Répétant l'étape 1, alors Annuler <math>E_1(P)</math> (<math>E_1(P) = 0</math>), le schéma fonctionnel donné devient :</p> |

|         |  |
|---------|--|
|         |  <p>Alors <math>S_2(P) = \frac{G_2(P)}{1+H(P)G_1(P)G_2(P)} E_2(P)</math></p>   |
| Etape 4 | <p>La réponse totale est : <math>S(P) = S_1(P) + S_2(P)</math></p> $S(P) = \frac{G_1(P)G_2(P)}{1 + H(P)G_1(P)G_2(P)} E_1(P) + \frac{G_2(P)}{1 + H(P)G_1(P)G_2(P)} E_2(P)$ <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> <math display="block">S(P) = \frac{G_1(P)G_2(P)E_1(P) + G_2(P)E_2(P)}{1 + H(P)G_1(P)G_2(P)}</math> </div> |

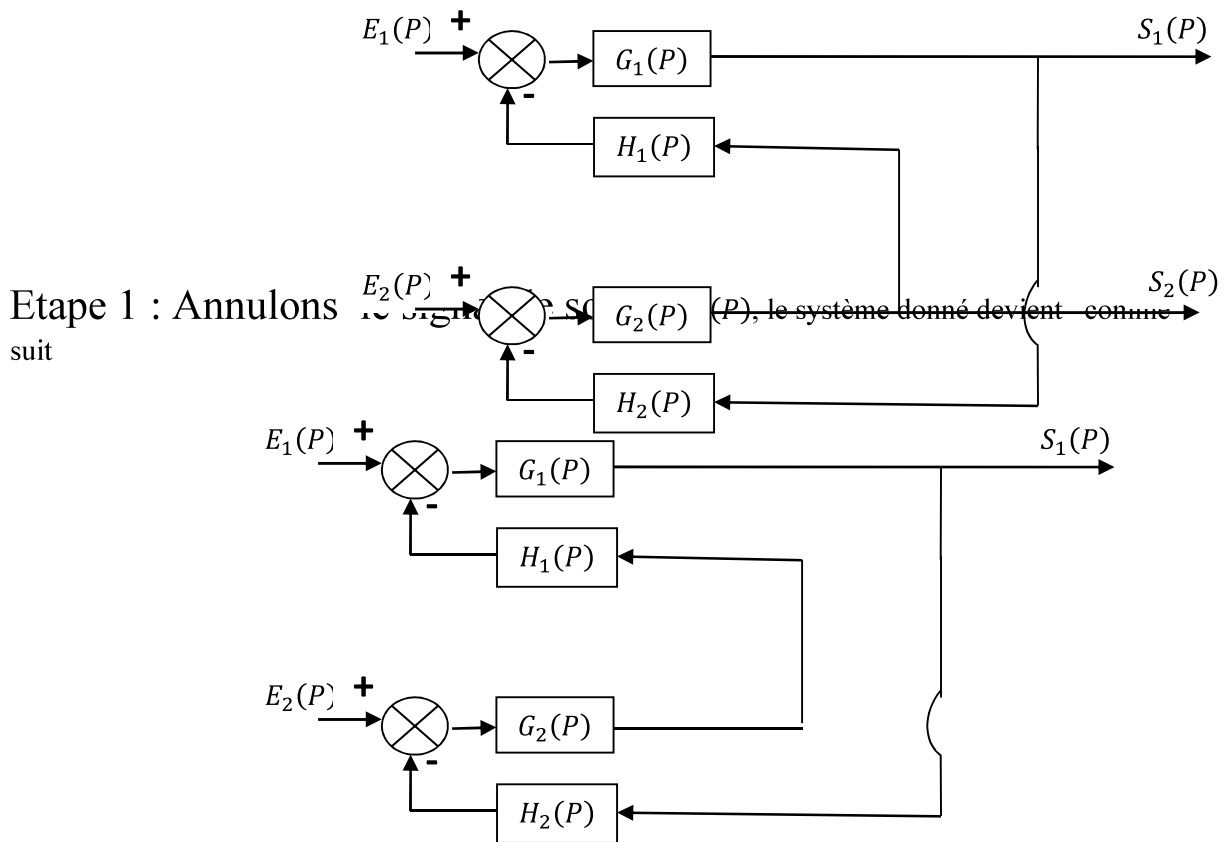
#### 4.4.4 Système asservi linéaire avec des signaux d'entrée et de sortie multiples.

Pour trouver les différentes réponses d'un système asservi ayant des signaux d'entrée et de sortie multiples, on utilise la méthode suivante :

|         |  |
|---------|--|
| Etape 1 | Annuler tous les signaux de sortie sauf un seul  |
| Etape 2 | Chercher le schéma fonctionnel à l'aide des transformations en appliquant les étapes des signaux d'entrée multiples.   |
| Etape 3 | Répéter les étapes 1 à 2 pour chaque signal de sortie restants.  |
| Etape 4 | Représenter toutes réponses (grandeurs de sorties) quand les signaux d'entrée agissent ensemble calculées dans les étape 3 . Chaque réponse représente une grandeur de sortie. |

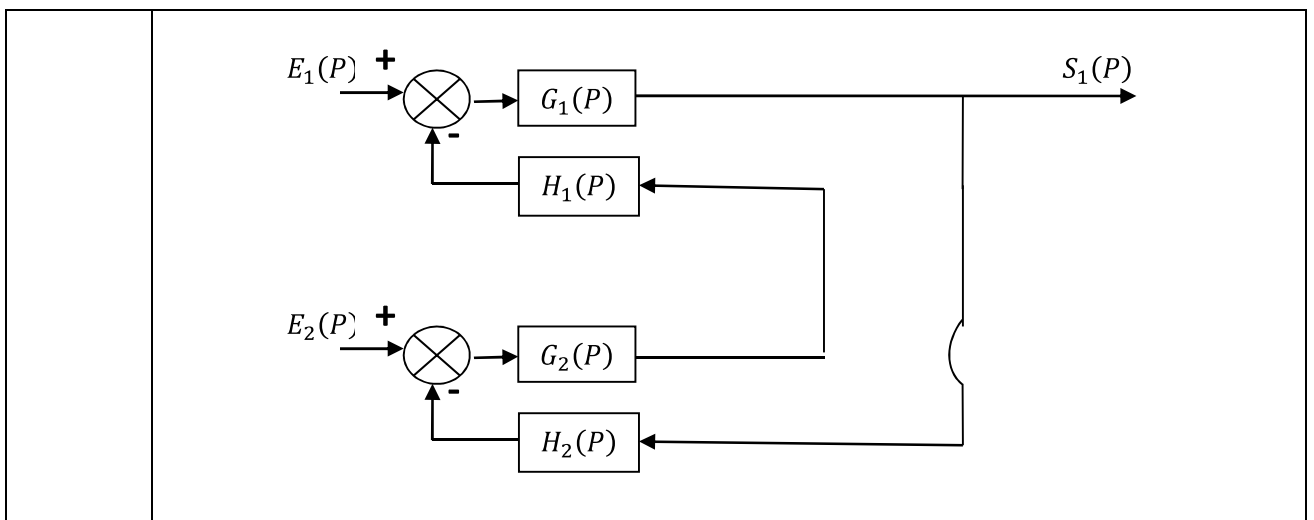


4.4.4.1 Exemple deux signaux d'entrée avec deux sortie .



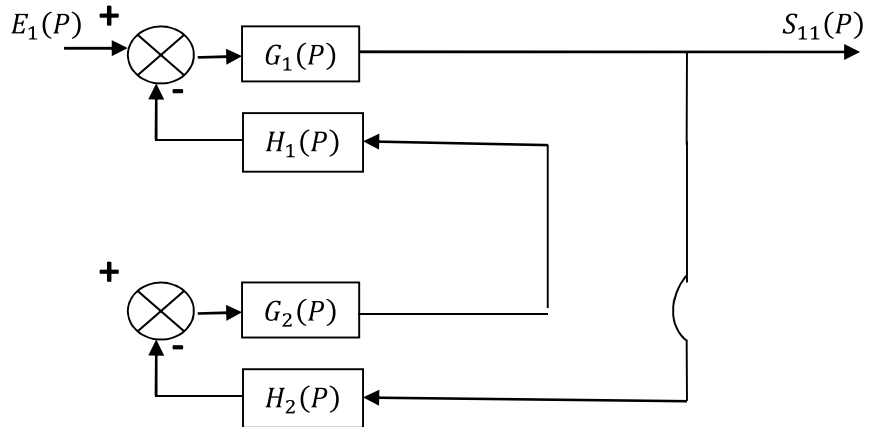
Nous avons un système à deux entrées et une seule sortie, appliquons les étapes de système asservi linéaire avec des signaux d'entrée multiples.

Etape 2 : Chercher le schéma fonctionnel à l'aide des transformations en appliquant les étapes des signaux d'entrée multiples

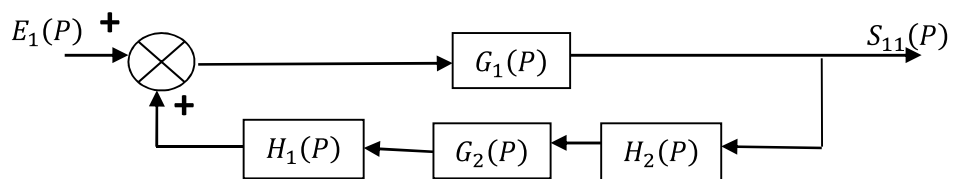
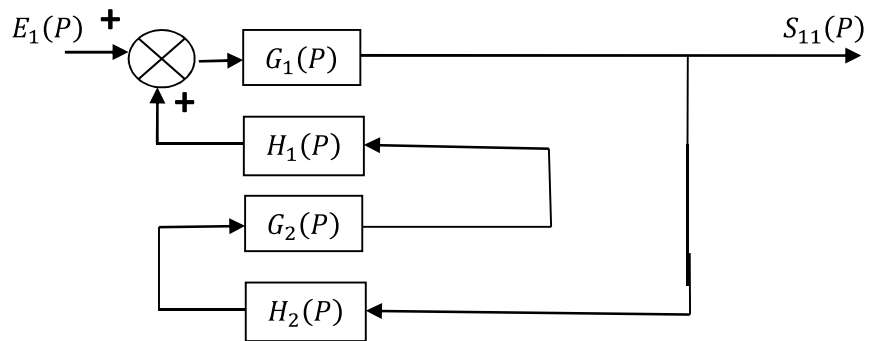


Etape 1

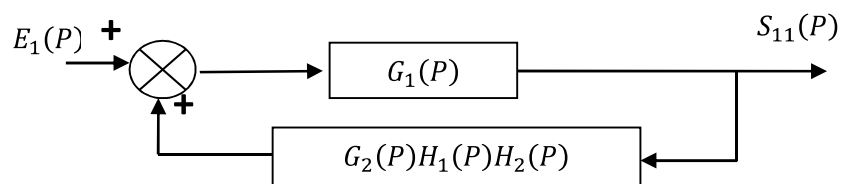
L'entrée  $E_2(P)$  est annulée, alors le schéma fonctionnel donné devient :



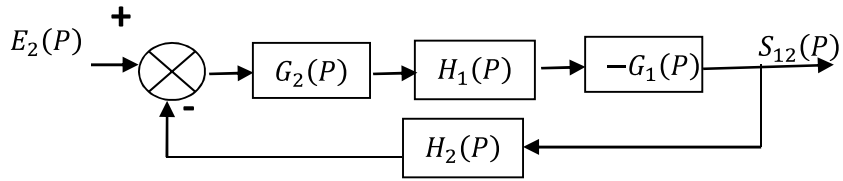
Nous remarquons que le signe moins à l'entrée du comparateur doit se déplacer jusqu'à l'entrée du comparateur suivant de la chaîne d où nous obtenons le schéma fonctionnelle suivantes



Etape 2

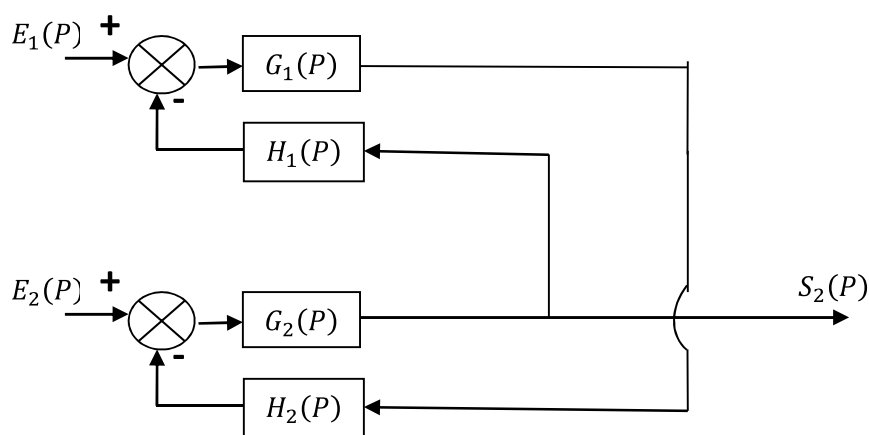


Alors 
$$S_{11}(P) = \frac{G_1(P)}{1 - G_1(P)G_2(P)H_1(P)H_2(P)} E_1(P)$$

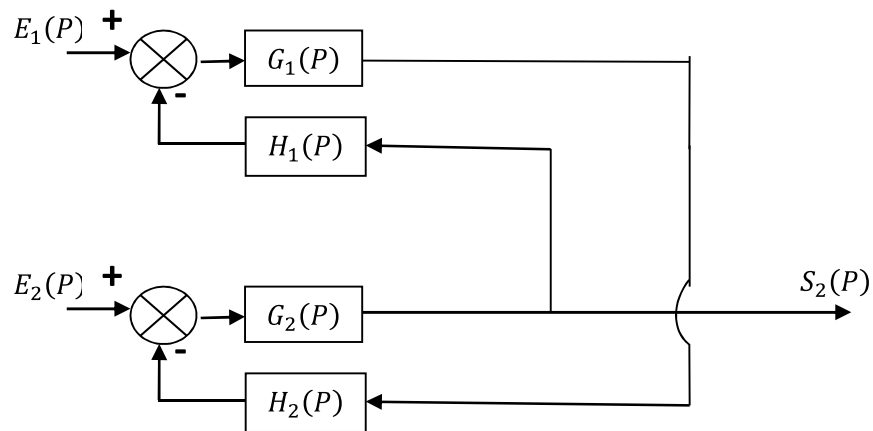
|                |   |
|----------------|---|
| <p>Etape 3</p> | <p>Répétant l'étape 1 , alors Annuler <math>E_1(P)(E_1(P) = 0)</math> , le schéma fonctionnel donné devient :</p>  <p>Alors <math display="block">S_{12}(P) = \frac{-G_1(P)G_2(P)H_1(P)}{1-G_1(P)G_2(P)H_1(P)H_2(P)} E_2(P)</math></p>  |
| <p>Etape 4</p> | <p>La réponse totale est : <math>S_1(P) = S_{11}(P) + S_{12}(P)</math></p> $S_1(P) = \frac{G_1(P)}{1 - G_1(P)G_2(P)H_1(P)H_2(P)} E_1(P) + \frac{-G_1(P)G_2(P)H_1(P)}{1 - G_1(P)G_2(P)H_1(P)H_2(P)} E_2(P)$ <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> <math display="block">S_1(P) = \frac{G_1(P)E_1(P) - G_1(P)G_2(P)H_1(P)E_2(P)}{1 - G_1(P)G_2(P)H_1(P)H_2(P)}</math> </div> |

Etape 3 : Répétons les étapes 1 à 2 pour le signal de sortie restants  $S_2(P)$ .

Etape 1 : Annulons le signal de sortie  $S_1(P)$ , le système donné devient comme suit



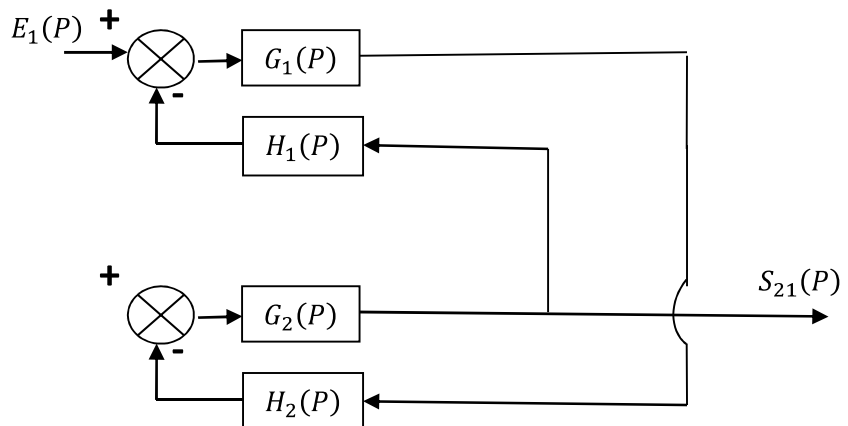
Etape 2 : Chercher le schéma fonctionnel à l'aide des transformations en appliquant les étapes des signaux d'entrée multiples



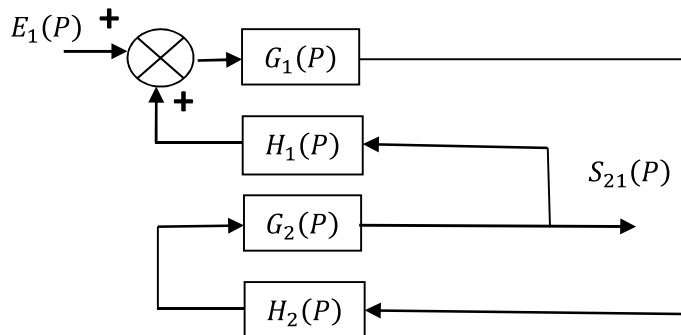
Etape 1

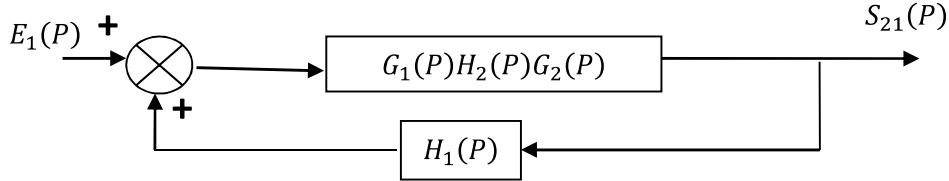
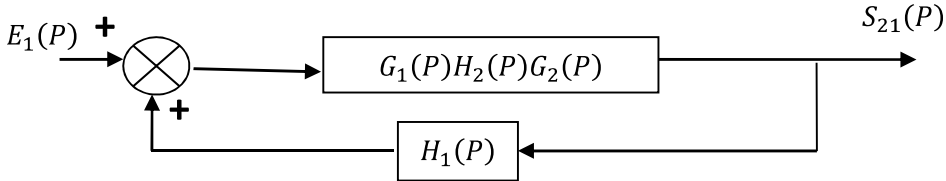
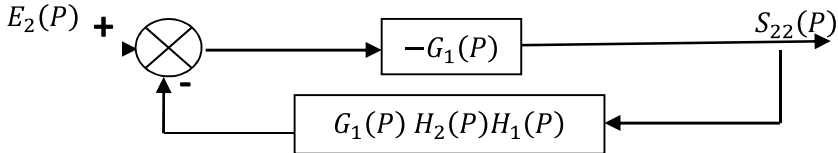
L'entrée  $E_2(P)$  est annulée ,

alors le schéma fonctionnel donné devient :



Nous remarquons que le signe moins à l'entrée du comparateur doit se déplacer jusqu'au comparateur suivant de la chaîne de retour à la sortie de  $H_1(P)$  d où nous obtenons le schéma fonctionnel suivant



|         |   |
|---------|---|
|         |   |
| Etape 2 |  <p>Alors <math>S_{21}(P) = \frac{G_1(P)G_2(P)H_2(P)}{1-G_1(P)G_2(P)H_1(P)H_2(P)} E_1(P)</math></p>   |
| Etape 3 | <p>Répétant l'étape 1 , alors Annuler <math>E_1(P) (E_1(P) = 0)</math> , le schéma fonctionnel donné devient :</p>  <p>Alors <math>S_{22}(P) = \frac{-G_1(P)}{1-G_1(P)G_2(P)H_1(P)H_2(P)} E_2(P)</math></p>   |
| Etape 4 | <p>La réponse totale est : <math>S_2(P) = S_{21}(P) + S_{22}(P)</math></p> $S_2(P) = \frac{-G_1(P)}{1-G_1(P)G_2(P)H_1(P)H_2(P)} E_2(P) + \frac{G_1(P)G_2(P)H_2(P)}{1-G_1(P)G_2(P)H_1(P)H_2(P)} E_1(P)$ <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> <math display="block">S_1(P) = \frac{G_1(P)G_2(P)H_1(P)E_1(P) - G_1(P)E_2(P)}{1-G_1(P)G_2(P)H_1(P)H_2(P)}</math> </div> |

**4.1 Définition**

Un système du premier ordre est décrit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants du premier ordre :

$$a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 x(t) \tag{4.1}$$

avec les coefficients  $a_1, a_0$  et  $b_0$  des constantes

**4.1.1 Fonction de transfert**

En appliquant à l'équation (1) la transformée de Laplace ,

$$L \left\{ a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) \right\} = L \{ b_0 x(t) \} \tag{4.2}$$

$$L \left\{ a_1 \frac{dy(t)}{dt} \right\} + L \{ a_0 y(t) \} = L \{ b_0 x(t) \} \tag{4.3}$$

$a_1 \cdot L \left\{ \frac{dy(t)}{dt} \right\} + a_0 \cdot L \{ y(t) \} = b_0 \cdot L \{ x(t) \}$  on obtient

$a_1 \cdot (P Y(P) - y(0^+)) + a_0 \cdot Y(P) = b_0 \cdot X(P)$  avec (condition initial nulle)  $y(0^+) = 0$  alors

$(a_1 \cdot P + a_0) Y(P) = b_0 \cdot X(P)$  d'où  $\frac{S(P)}{E(P)} = \frac{b_0}{a_1 \cdot P + a_0}$  est la fonction du transfert du système donne par l'équation (1)

La fonction du transfert d'un système du premier ordre s'écrit sous la forme standard suivante :  $F(P) = \frac{K}{1 + \tau \cdot P}$

avec  $K$  : gain statique du système et  $\tau$  : constante du temps du système.

Les deux paramètres du système sont déterminé par identification tel que :

$$\frac{b_0}{a_1 \cdot P + a_0} = \frac{b_0}{a_0 \cdot \left(1 + \frac{a_1 P}{a_0}\right)} = \frac{\frac{b_0}{a_0}}{1 + \frac{a_1 P}{a_0}} \text{ alors } \boxed{K = \frac{b_0}{a_0} \text{ et } \tau = \frac{a_1}{a_0}} \tag{4.4}$$

Alors on déduit la fonction de transfert sous sa forme canonique et le schéma bloc du système du premier ordre :

$$\boxed{F(P) = \frac{K}{1 + \tau \cdot P}} \tag{4.5}$$

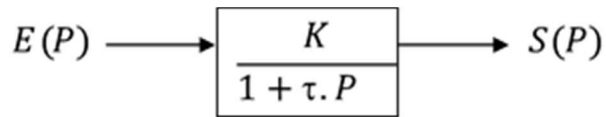
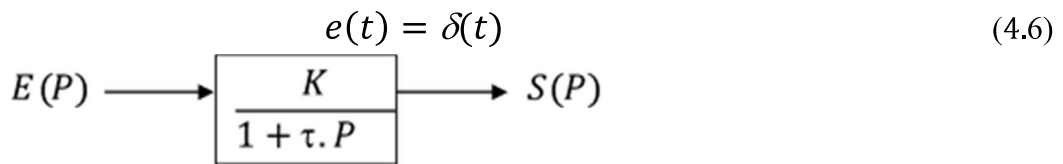


Figure N°01 : Schéma bloc du système du premier ordre

## 4.2 Analyse temporelle

### 4.2.1 Réponse impulsionnelle (à l'impulsion de Dirac)

On se propose d'étudier la réponse temporelle de la sortie  $s(t)$  pour une entrée de type impulsion unitaire (l'impulsion de Dirac)



$$(4.6)$$

Figure N° 02 : système du premier ordre

Puis que  $e(t) = \delta(t)$  alors  $E(P) = 1$  donc la transformée de réponse est la fonction de transfert du système  $S(P) = \frac{K}{1+\tau.P}$  sa transformée inverse est

$$s(t) = \frac{K}{\tau} e^{-t/\tau} \quad (4.7)$$

#### 4.2.1.1 Caractéristiques de la réponse $s(t)$

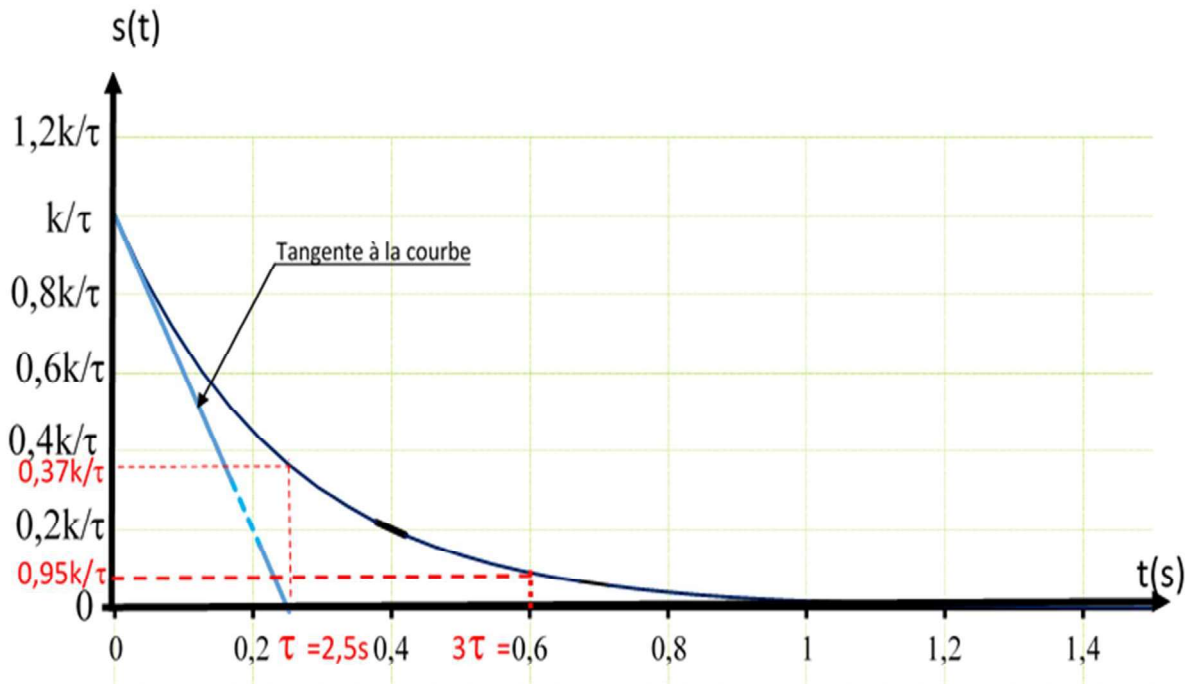
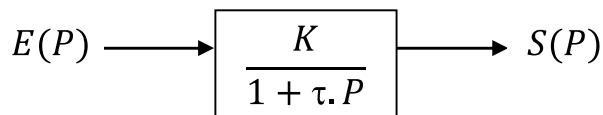


Figure N°3 : Réponse indicielle du premier ordre

**Remarque :** Compte tenu de la discontinuité de l'impulsion de Dirac, le théorème de la valeur initiale n'est pas applicable.

#### 4.2.2 Réponse indicielle

On se propose d'étudier la réponse temporelle de la sortie  $s(t)$  pour une entrée de type échelon  $e(t) = 1 \cdot \mu(t)$



Puis que  $e(t) = 1 \cdot \mu(t)$  alors  $E(P) = \frac{1}{P}$  donc la transformée de réponse du système est:  $S(P) = \frac{K}{1 + \tau \cdot P} \cdot \frac{1}{P}$  (4.8)

Pour déterminer la réponse temporelle indicielle, il faut décomposer  $S(p)$  en fractions simples.  $S(p)$  comporte deux pôles  $P_1 = 0$  et  $P_2 = -\frac{1}{\tau}$

$$S(P) = \frac{\beta}{P} + \frac{\alpha}{1 + \tau \cdot P} \quad (4.9)$$

Par identification, on trouve :

$$S(P) = \frac{K}{P} - \frac{K\tau}{1 + \tau \cdot P}$$

sa transformée inverse d'après le tableau est

$$s(t) = K(1 \cdot \mu(t) - e^{-t/\tau} \cdot \mu(t)) = K(1 - e^{-t/\tau}) \cdot \mu(t) \quad (4.10)$$

##### 4.2.2.1 Étude et caractéristiques de la réponse indicielle $s(t)$

**Remarque :** on prend  $e(t) = E_0 \cdot \mu(t)$  échelon unitaire d'amplitude  $E_0$

L'étude de cette fonction ne pose aucun problème particulier mais nous allons utiliser les outils de la transformation de Laplace pour les retrouver.

**Asymptote finale :** À partir du théorème de la valeur finale, nous allons vérifier que la réponse possède une asymptote horizontale. Le théorème de la valeur finale s'écrit :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (s(t)) = \lim_{P \rightarrow 0} (P \cdot S(P)) = \lim_{P \rightarrow 0} \left( P \cdot \frac{K}{1 + \tau \cdot P} \cdot \frac{E_0}{P} \right) \quad (4.12)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (s(t)) = K E_0 \quad (4.13)$$

La sortie  $s(t)$  tend asymptotiquement vers une valeur finie  $K E_0$  lorsque  $t \rightarrow \infty$

Valeur initiale : le théorème de la valeur initiale appliqué à  $s(t)$  permet d'obtenir la valeur à l'instant  $t = 0$  de la sortie

$$\lim_{t \rightarrow 0} (s(t)) = \lim_{P \rightarrow \infty} (P \cdot S(P)) = \lim_{P \rightarrow \infty} \left( P \cdot \frac{K}{1 + \tau \cdot P} \cdot \frac{E_0}{P} \right) \quad (4.14)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} (s(t)) = 0 \quad (4.15)$$

Tangente à l'origine : Pour déterminer la tangente à l'origine, il faut déterminer la dérivée de  $s(t)$  pour  $t = 0$ . On peut utiliser le théorème de la valeur initiale appliquée à la dérivée pour obtenir cette valeur.

En appliquant le théorème de la valeur initiale à  $s'(t) = \frac{ds(t)}{dt}$



$$\lim_{t \rightarrow 0} (s'(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{ds(t)}{dt} \right) = \lim_{P \rightarrow \infty} (P \cdot \{P \cdot S(P) - s(o)\})$$

avec la condition initiale  $s(o) = 0$  alors

$$\lim_{P \rightarrow \infty} (P^2 \cdot S(P)) = \lim_{P \rightarrow \infty} \left( P^2 \frac{K}{1 + \tau \cdot P} \cdot \frac{E_0}{P} \right) \quad (4.16)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} (s'(t)) = \frac{KE_0}{\tau} \quad (4.17)$$

La pente à l'origine est non nulle est égale à  $\frac{KE_0}{\tau} = \frac{s_\infty}{\tau}$

On constate que la tangente à l'origine coupe l'asymptote horizontale ( $KE_0$ ) au bout du temps  $\tau$ .

#### 4.2.2.2 Temps de réponse

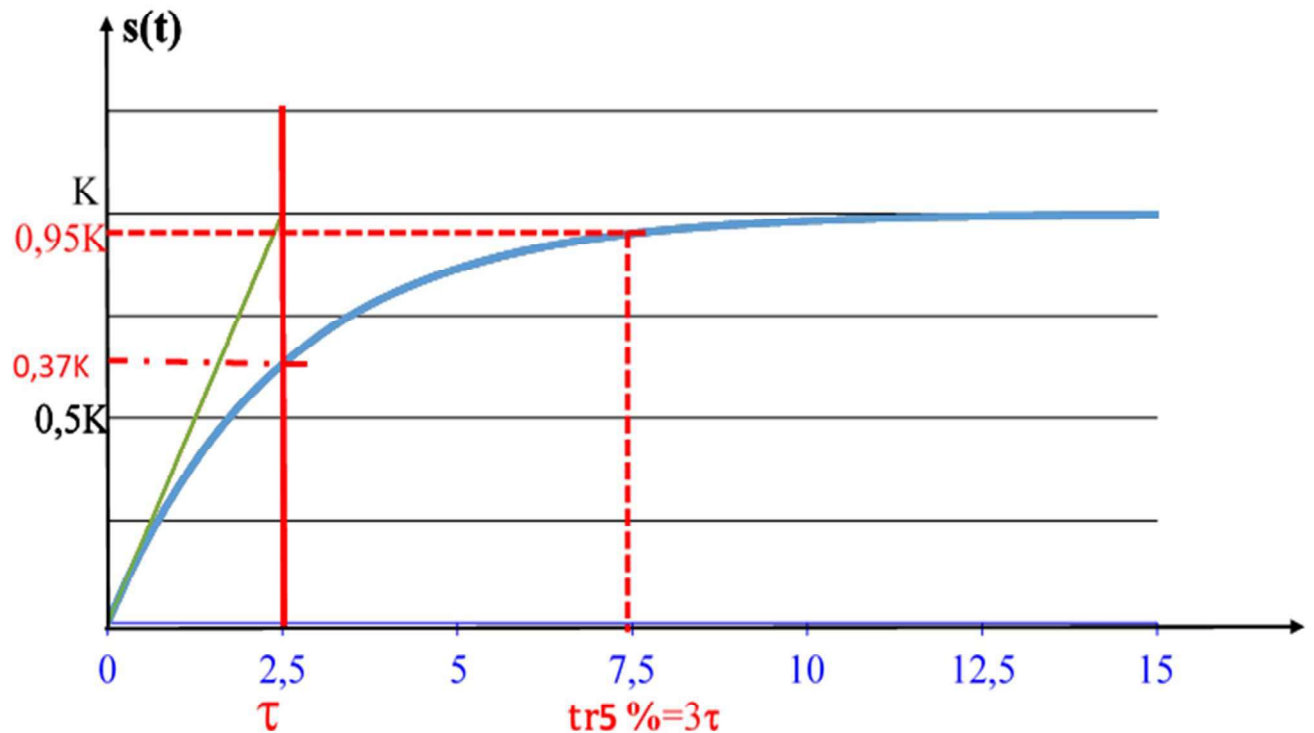
On appelle temps de réponse à 5% ( $T_{5\%}$ ), le temps mis pour que la sortie atteigne la valeur

finale à  $\pm 5\%$  près soit  $\frac{s(\infty) - s(T_{5\%})}{s(\infty)} = 0,05$

$$\frac{KE_0 - KE_0(1 - e^{-T_{5\%}/\tau})}{KE_0} = 0,05 \quad (4.18)$$

$e^{-T_{5\%}/\tau} = 0,05$  on déduit  $t_{r5\%} = 3\tau$

on note que le temps de réponse ne dépend pas de l'entrée ni du gain statique mais uniquement de la constante de temps  $\tau$ , plus la constante de temps est importante, plus le temps de réponse est important



**Figure N°4** : Temps de réponse de la réponse indicielle du premier ordre

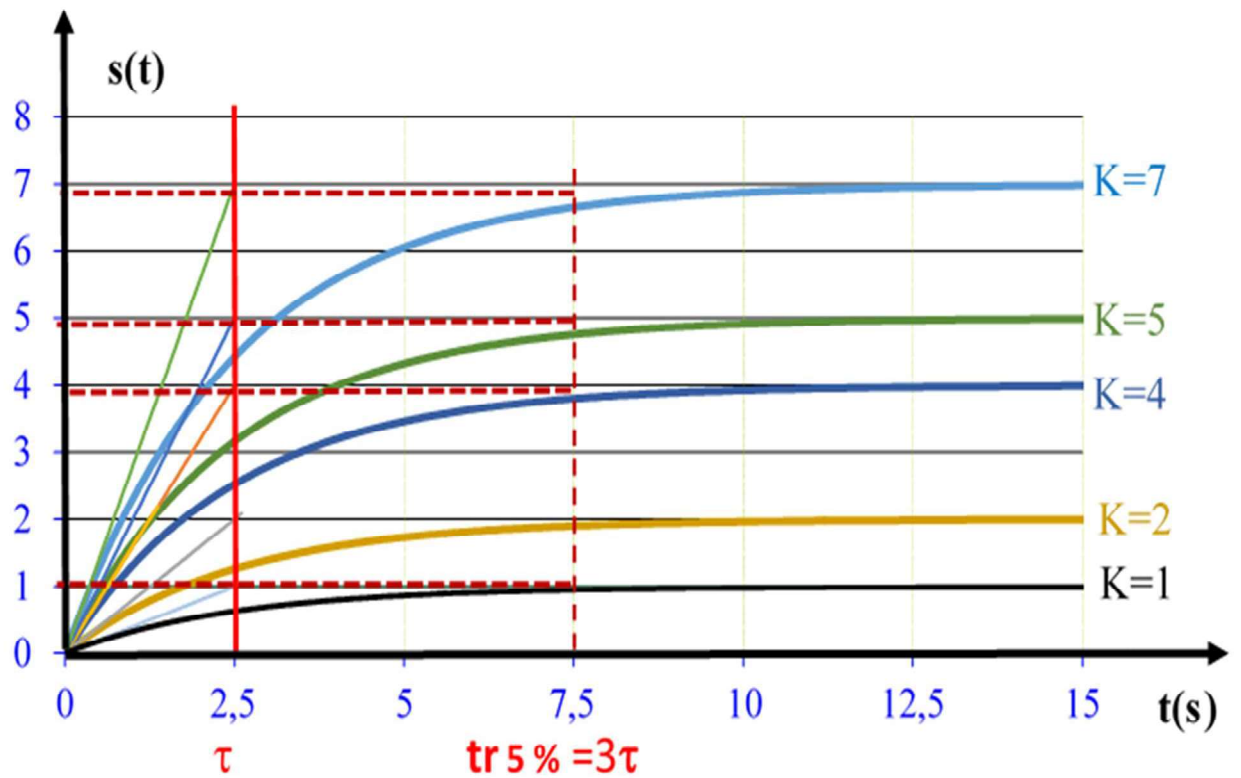
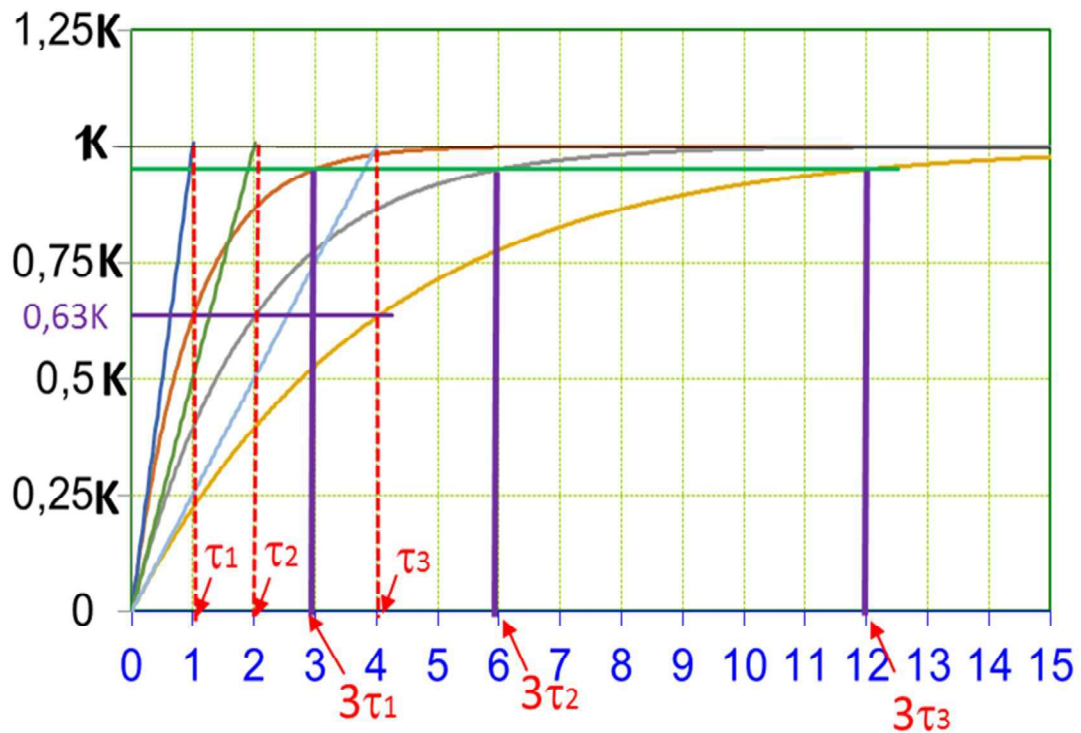


Figure N°5 : Réponse indicielle du premier ordre pour différentes valeurs de gain statique K



**Figure N°6** : Réponse indicielle du premier ordre pour différentes valeurs de constante de temps  $\tau$

#### 4.2.3 Réponse de vitesse

L'entrée est un échelon de vitesse ou une rampe  $e(t) = t \cdot \mu(t)$

alors  $E(P) = \frac{1}{P^2}$  on déduit la transformée de la réponse de vitesse est :

$$S(P) = \frac{K}{1+\tau \cdot P} \cdot \frac{1}{P^2} \quad (4.19)$$

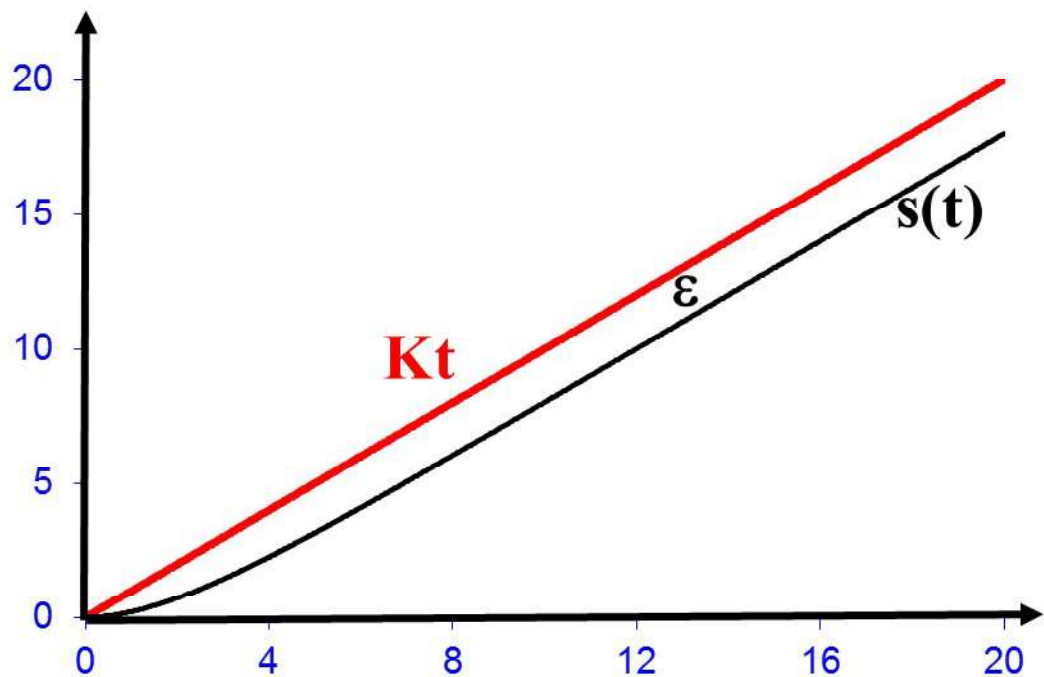
en appliquant la transformée inverse de Laplace, on obtient

$$s(t) = (K(t - \tau) + K\tau e^{-t/\tau}) \cdot \mu(t) \quad (4.20)$$

La réponse est la somme de deux termes : une fonction exponentielle décroissante et une rampe retardée, de retard  $T$

Le terme  $K\tau e^{-t/\tau}$  au bout de  $3 \cdot \tau$  alors la sortie tend asymptotiquement vers  $K(t - \tau)$ .

La pente à l'origine est nulle



**Figure N° 7** : la réponse de vitesse du premier ordre

La sortie suit asymptotiquement la rampe  $Kt$  avec un retard  $\tau$ .

L'écart en régime permanent  $\epsilon = \lim_{t \rightarrow \infty} (e(t) - s(t)) = K\tau$  est appelé **erreur de trainage**.

L'erreur de trainage :  $\epsilon = K\tau$

5.1 Definition d'un systeme du deuxieme ordre

On appelle systeme du second ordre tout systeme regi par une equation differentielle du second ordre a coefficients constants :

$$a_2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0y(t) = b_0 x(t) \tag{5.1}$$

On suppose que les coefficients verifient :  $a_0, a_2 > 0$ ;  $a_1 > 0$ ;  $b_0 > 0$ .

Appliquant la transformee de la place a l'expression (1)

$$L\left(a_2 \frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0y(t)\right) = L(b_0 x(t)) \tag{5.2}$$

$$L\left(a_2 \frac{d^2y(t)}{dt^2}\right) + L\left(a_1 \frac{dy(t)}{dt}\right) + L(a_0y(t)) = b_0 L(x(t)) \tag{5.3}$$

$$a_2 L\left(\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right) + a_1 L\left(\frac{dy(t)}{dt}\right) + a_0 L(y(t)) = b_0 L(x(t)) \tag{5.4}$$

$$a_2 L\left(\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right) = a_2(P^2 Y(P) - Py'(0) - y(0)) \tag{5.5}$$

$$a_1 L\left(\frac{dy(t)}{dt}\right) = a_1(PY(P) - y(0)) \tag{5.6}$$

$$a_0 L(y(t)) = a_0 Y(P) \tag{5.7}$$

$$b_0 L(x(t)) = b_0 X(P) \tag{5.8}$$

Pour des conditions initiales supposees nulles  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$  les expressions presidentes s'ecrivent

$$L\left(\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right) = a_2 P^2 Y(P) \tag{5.9}$$

$$a_1 L\left(\frac{dy(t)}{dt}\right) = a_1 PY(P) \tag{5.10}$$

$$a_0 L(y(t)) = a_0 Y(P) \tag{5.11}$$

$$b_0 L(x(t)) = b_0 X(P) \tag{5.12}$$

Cette application de la transformee de Laplace a l'equation differentielle permet d'obtenir :

$$a_2 P^2 Y(P) + a_1 PY(P) + a_0 Y(P) + b_0 X(P) \tag{5.13}$$

$$Y(P)(a_2 P^2 + a_1 P + a_0) = b_0 X(P) \tag{5.14}$$

$$\frac{Y(P)}{X(P)} = \frac{b_0}{a_2 P^2 + a_1 P + a_0} \tag{5.15}$$

on obtient la forme suivante de la fonction de transfert :

$$\frac{Y(P)}{X(P)} = \frac{\frac{b_0}{a_0}}{\frac{a_2}{a_0}P^2 + \frac{a_1}{a_0}P + 1} \quad (5.16)$$

En posant

$$\frac{1}{\omega_n^2} = \frac{a_2}{a_0}, \quad \frac{2\xi a_1}{\omega_n a_0}, \quad \text{et } K = \frac{b_0}{a_0} \quad (5.17)$$

Avec

$\omega_n$  : La pulsation propre du système non amorti (rd/s) si l'unité du temps est en seconde ;

$K$  : Gain statique de dimension = [dimension de sortie]/[dimension de entrée];

$\xi$  : Facteur ou coefficient d'amortissement, parfois noté m ou z (sans dimension).

$$\frac{Y(P)}{X(P)} = \frac{\frac{b_0}{a_0}}{\frac{a_2}{a_0}P^2 + \frac{a_1}{a_0}P + 1} \quad (5.18)$$

L'équation d'un système du second s'écrit sous sa forme canonique suivante :

$$\frac{Y(P)}{X(P)} = \frac{k}{\frac{1}{\omega_n^2}P^2 + \frac{2\xi}{\omega_n}P + 1} \quad (5.19)$$

Cette fonction de transfert on l'appelle aussi fonction de transfert du second ordre généralisée.

### 5.1.1 Schéma bloc ou diagramme fonctionnelle

On associe au système un bloc à l'intérieur duquel on inscrit sa fonction de transfert généralisée (ou standard) du second ordre en précisant que E(P) et S(P) sont respectivement l'entrée et la sortie du système.

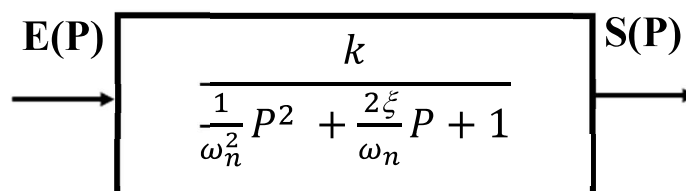


Figure N°1 : Schéma bloc du système du second ordre

Les pôles de cette fonction de transfert

Rappelons que les pôles de la fonction de transfert sont les racines de l'équation caractéristique de la fonction.

Alors soit l'équation caractéristique :  $\frac{1}{\omega_n^2} P^2 + \frac{2\xi}{\omega_n} P + 1 = 0$

$$P^2 + 2\xi\omega_n P + \omega_n^2 = 0$$

$$\Delta = (2\xi\omega_n)^2 - 4\omega_n^2$$

$$\Delta = 4\omega_n^2 (\xi^2 - 1) \quad (5.20)$$

a) **cas 01**  $\Delta = 0$

$(\xi^2 - 1) = 0$  alors  $\xi = 1$  on a un pôle réel double tel que :

$$P_{1,2} = -\omega_n \quad (5.21)$$

b) **cas 02**  $\Delta > 0$   $(\xi^2 - 1) > 0$  alors  $\xi > 1$  on a deux pôles réels tel que :

$$P_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$$

(5.19)

c) **cas 03**  $\Delta < 0$   $(1 - \xi^2) > 0$  alors  $\xi < 1$  on a deux pôles complexes conjugués tel que :

$$P_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \quad (5.22)$$

• Cas 1 :  $\xi > 1$  - Régime apériodique :

Deux pôles réels au dénominateur et il est approprié de leur associer deux constantes de temps définies par :

$$\tau_1 = \frac{1}{P_1} = \frac{1}{-\xi\omega_n + \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}}$$

$$\tau_2 = \frac{1}{P_2} = \frac{1}{-\xi\omega_n - \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}}$$

La fonction de transfert s'écrit :

$$F(P) = \frac{S(P)}{E(P)} = \frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2} P^2 + \frac{2\xi}{\omega_n} P + 1} = \frac{K}{(1 + \tau_1 P)(1 + \tau_2 P)} \quad (5.23)$$

5.2 Analyse de la réponse indicielle  $s(t)$

$$S(P) = \frac{1}{P} \frac{K}{\tau_1 - \tau_2} \left( \frac{\tau_1}{(1 + \tau_1 P)} - \frac{\tau_2}{(1 + \tau_2 P)} \right) \quad (5.24)$$

D'où la réponse temporelle :

$$s(t) = L^{-1}\{(S(P))\} = \frac{K}{\tau_1 - \tau_2} \left[ \tau_1 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right) - \tau_2 \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right) \right] \quad (5.25)$$

$$s(t) = \frac{K}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \left[ \left( \xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) e^{-\omega_n \left( \xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right) t} - \left( \xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right) e^{-\omega_n \left( \xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) t} \right] \quad (5.26)$$

La courbe suivante illustre l'allure de la réponse indicielle en fonction de temps

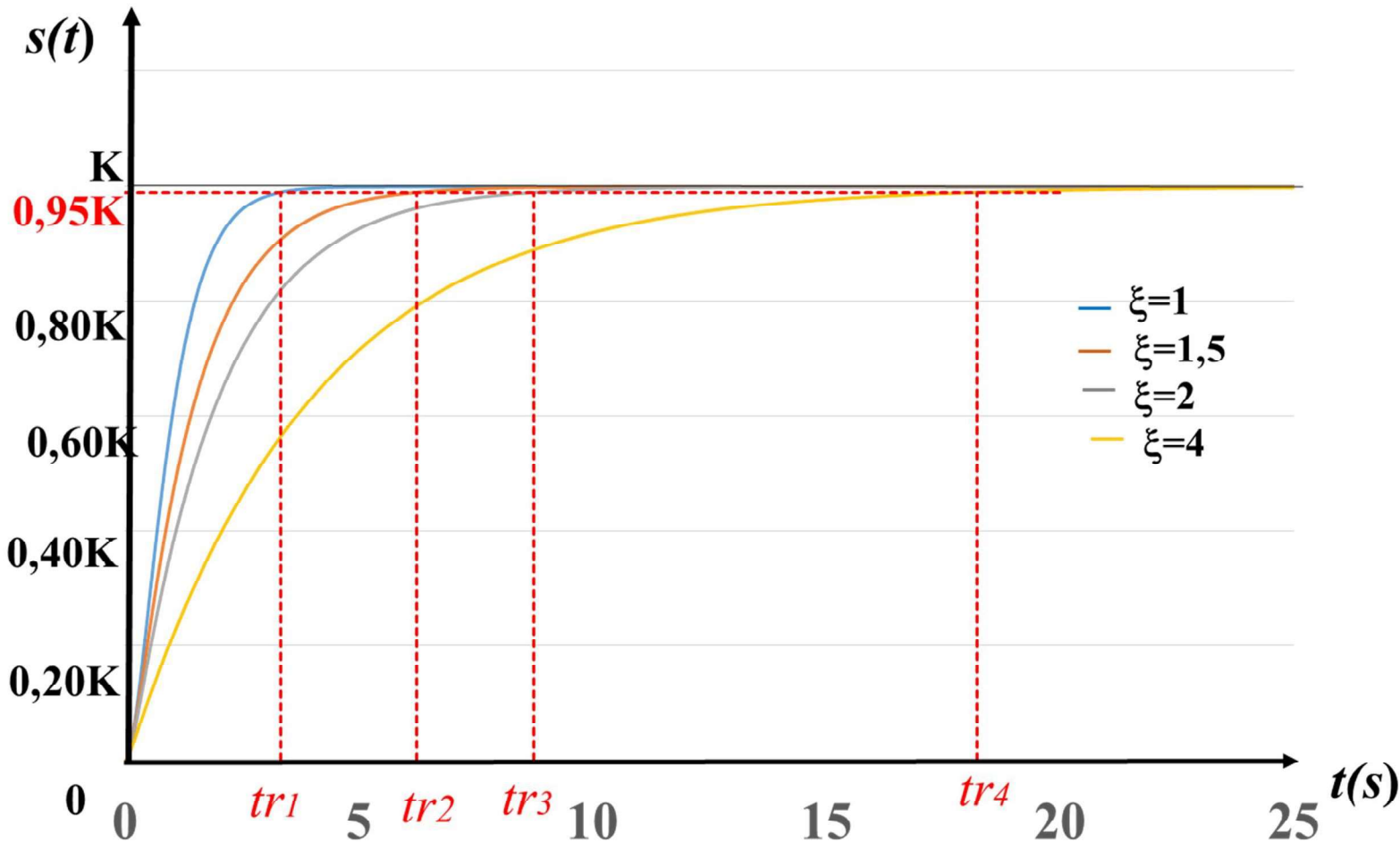


Figure N°2 : la réponse indicielle pour des différents coefficients d'amortissement

### 5.2.1 La réponse indicielle du régime aperiodique

Cas 2 :  $\xi = 1$  On a un Régime aperiodique critique

Les deux pôles sont réels et identiques

$$P_{1,2} = -\omega_n \quad (5.27)$$

et les deux constantes de temps qui leur sont associées sont également identiques

$$\tau = \tau_{1,2} = 1/\omega_n \quad (5.28)$$

$$F(P) = \frac{S(P)}{E(P)} = \frac{k}{\frac{1}{\omega_n^2}P^2 + \frac{2\xi}{\omega_n}P + 1} = \frac{k}{\left(1 + \frac{P}{\omega_n}\right)^2} = \frac{k}{(1 + \tau P)^2} \quad (5.29)$$

### 5.2.2 La réponse indicielle du régime aperiodique critique

Pour  $e(t) = u(t)$ , on a :

$$S(P) = F(P) E(P) = \frac{k}{(1 + \tau P)^2} \frac{1}{P}$$

$$S(P) = K \left( \frac{1}{P} + \frac{1}{1 + \tau P} + \frac{1}{(1 + \tau P)^2} \right) \quad (5.30)$$

D'où la réponse temporelle :

$$s(t) = L^{-1}\{S(P)\} = K \left( 1 - \left( 1 + \frac{1}{\tau} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (5.31)$$

$$s(t) = L^{-1}\{S(P)\} = K (1 - (1 + \omega_n t) e^{-\omega_n t}) \quad (5.32)$$

L'allure de la réponse indicielle ressemble à celle obtenue pour  $z > 1$ . C'est le régime aperiodique le plus rapide.

### 5.2.3 La réponse indicielle du régime oscillatoire amorti

Cas 3 :  $\xi < 1$  - Régime oscillatoire amorti

Les pôles complexes conjugués sont :

$$P_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

Dans ce cas, il n'est pas possible de définir des constantes de temps comme dans le cas  $\xi \geq 1$

La fonction de transfert s'écrit :

$$FS(P) = \frac{1}{P} \frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2}P^2 + \frac{2\xi}{\omega_n}P + 1} \quad (5.33)$$

La transformation de Laplace inverse donne :

$$s(t) = L^{-1}\{S(P)\} \quad (5.34)$$



$$s(t) = K \left[ 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \left\{ \sin \left( \left( \omega_n \sqrt{1-\xi^2} \right) t + \varphi \right) \right\} \right] \quad (5.35)$$

$$\text{Avec } \varphi = \text{Arctg} \left( \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right)$$

Ou encore on écrit cette réponse indicielle par une autre expression

$$s(t) = K \left[ 1 - e^{-\xi\omega_n t} \left( \cos \left\{ \left( \omega_n \sqrt{1-\xi^2} \right) t \right\} + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \left\{ \left( \omega_n \sqrt{1-\xi^2} \right) t \right\} \right) \right] \quad (5.36)$$

La réponse présente la forme d'une sinusoïde amortie par l'exponentielle. C'est un système oscillant amorti, comme le montre la figure suivante :

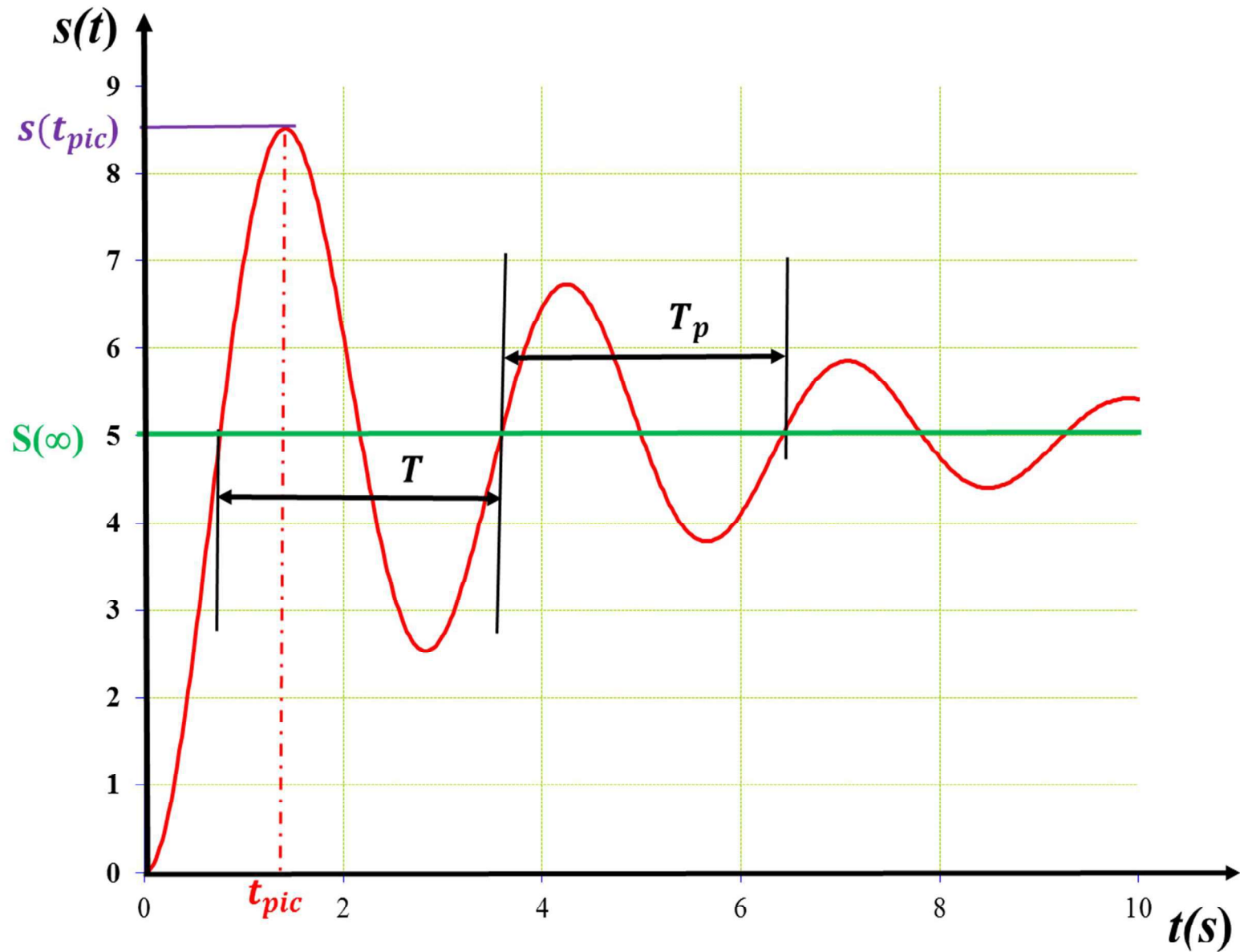


Figure N°3 : la réponse indicielle d'un système du second ordre ( $0 < \xi < 1$ )

si  $\xi = 0$ , la réponse indicielle serait une forme sinusoïdale entretenue, alors que pour  $\xi \neq 0$ , les amplitudes des oscillations décroissent au fil du temps et ce, plus moins rapidement selon la valeur de  $\xi$ .

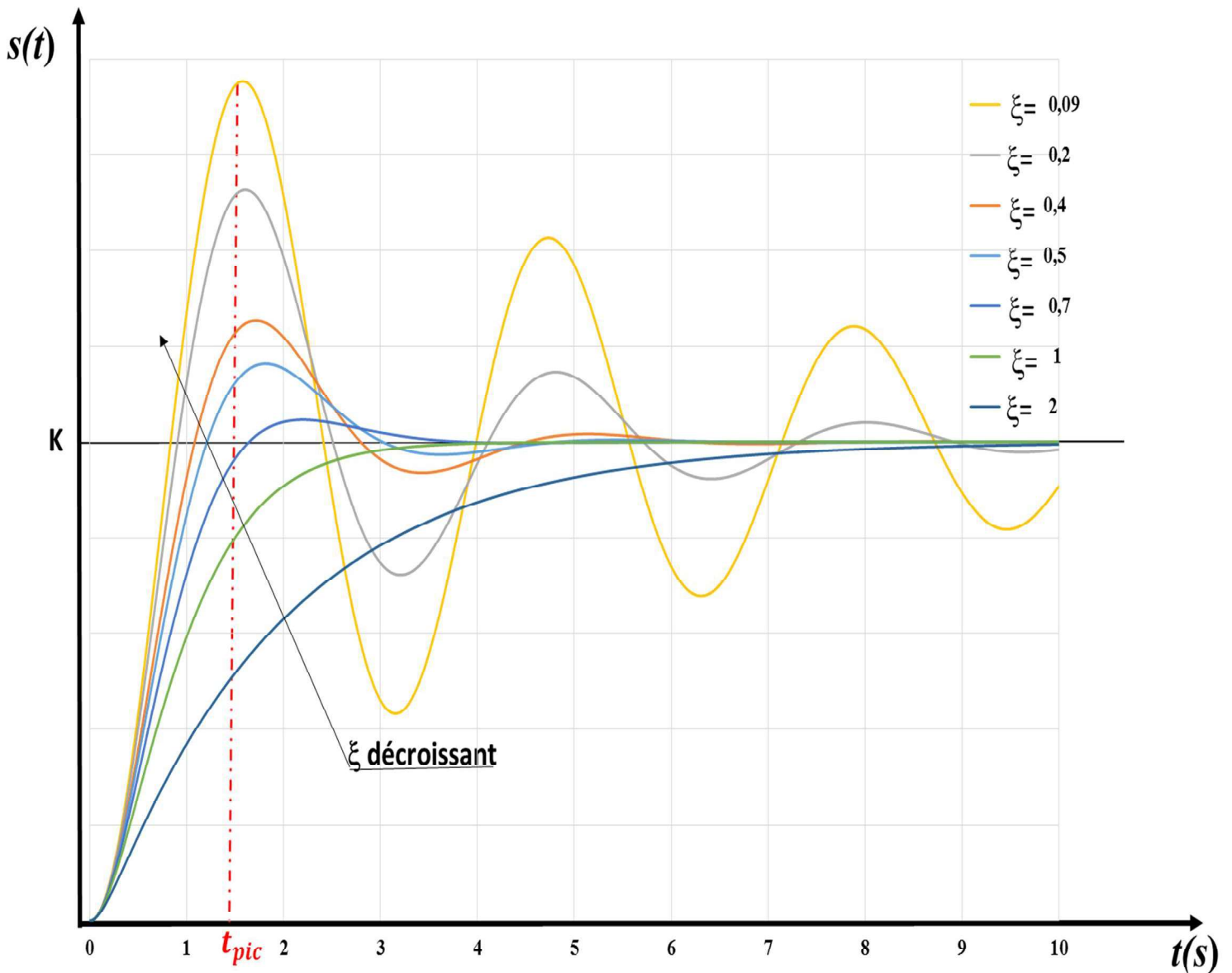
### 5.2.3.1 Paramètre caractéristique de la réponse indicielle

Les principaux paramètres de la réponse transitoire sont présentés dans le tableau suivant :

|                             |  |
|-----------------------------|--|
| Pseudo-pulsation $\omega_p$ | $\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$                                 |
| Pseudo-période $T_p$        | $T_p = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$ |

|  |   |
|--|---|
| Instant du premier dépassement $t_{pic}$ | $t_{pic} = \frac{T_p}{2} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}$                 |
| Réponse à $t = t_{pic}$ : $s(t_{pic})$   | $K \left( 1 + e^{-\left( -\frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \right)} \right)$ |
| Dépassement indiciel en %:               | $D\% = 100 e^{-\left( -\frac{\pi \xi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \right)}$        |

Le dépassement indiciel ne dépend que du coefficient d'amortissement  $\xi$ . Plus  $\xi$  est petit, moins la réponse est amortie, et plus le dépassement de la réponse indicielle est très important comme le montre la figure 4.



**Figure N° 4** : Evolution de la réponse indicielle du second ordre en fonction du coefficient d'amortissement

Le dépassement est un critère d'évaluation important de la performance en régime transitoire. Dans la pratique et pour certaines applications, le dépassement doit être faible. En fait, ce type de comportement de régime oscillatoire affecte généralement les systèmes de commande en boucle fermée. Les variations des grandeurs des paramètres impliquées doivent être contrôlées pendant la phase transitoire.

### 5.2.3.2 Dépassement

Lorsque  $\xi < 1$ , la courbe de la réponse indicielle parvient à sa valeur finale après un ou plusieurs dépassements.

La dérivée de  $s(t)$  s'annule lorsque  $s(t)$  passe par des extremums.

Avec les conditions initiales précédentes on obtient :

$$\tan(\omega t + \varphi) = \frac{-\xi\omega_n}{\omega} = \tan(\varphi)$$

Soit  $\omega t = k\pi$  ou encore  $t = kT/2$

Le premier dépassement aura donc pour valeur  $D_1 = e^{-\left(\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)}$

En pourcentage le premier dépassement est donné :  $D_{\%} = 100e^{-\left(\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)}$

Le premier dépassement trouvé directement à partir de courbe de la réponse indicielle est :

le premier dépassement est obtenu pour le temps :  $t_{pic} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{T_P}{2}$

$$D_{\%} = 100 \frac{s(t_{pic}) - s(\infty)}{s(\infty)} \text{ ou encore } D_{\%} = \frac{s(T_P/2) - s(\infty)}{s(\infty)} \quad (5.37)$$

$$\text{Le } k^{ieme} \text{ dépassement pour cent vaut } D_{k\%} = 100e^{-\left(\frac{k\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)} \quad (5.38)$$

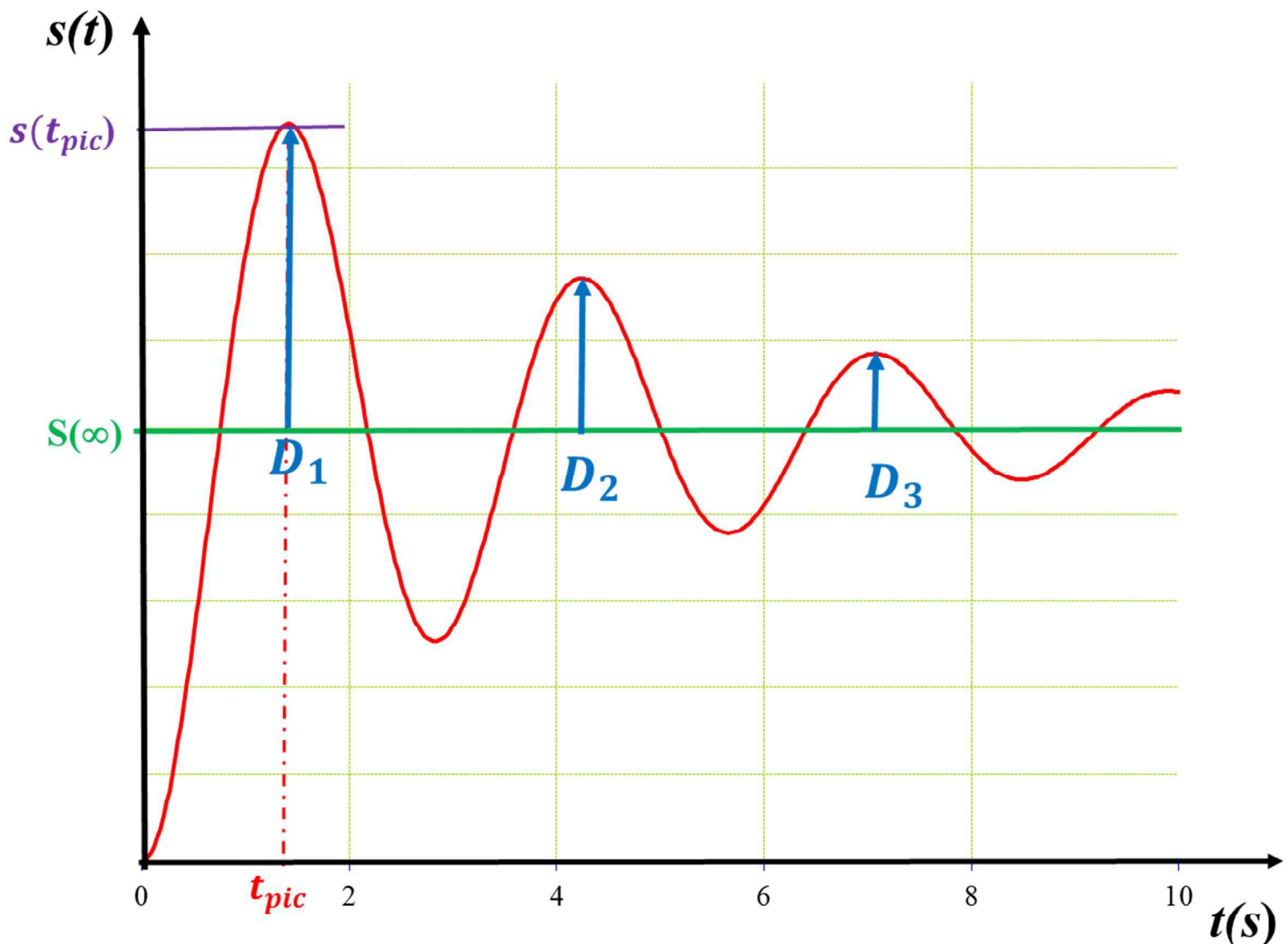


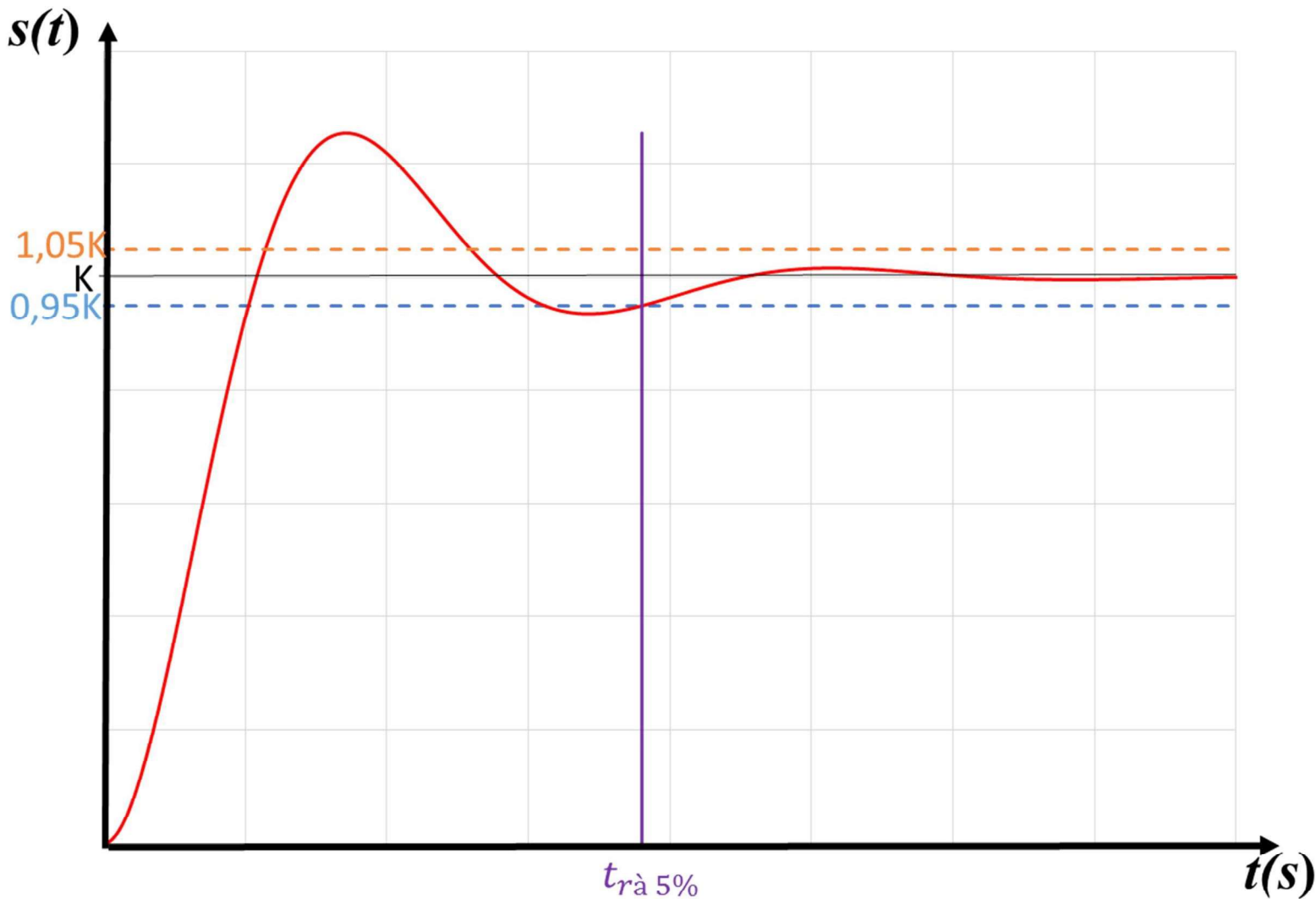
Figure N° 5: les dépassement d'un système oscillatoire amorti

### 5.2.3.3 Temps de réponse

Lorsque la réponse indicielle est apériodique, c'est-à-dire qu'elle ne présente pas d'oscillation  $\xi \leq 1$ , le temps de réponse à 5% est toujours défini par le temps au bout duquel la réponse atteint 95% de sa valeur finale.

Par contre, lorsque la réponse est oscillatoire amortie, le temps de réponse à 5% est défini par le temps au bout duquel, la réponse rentre définitivement dans la bande définie par 105% et 95% de la valeur finale.

La figure N°6 donne un exemple de relevé du temps de réponse à partir de la réponse indicielle d'un système du deuxième ordre avec  $\xi \leq 1$ .



**Figure N°6 : Détermination du temps de réponse**

La détermination du temps de réponse à partir de l'expression de la réponse indicielle ne se prête pas facilement au calcul.

Contrairement aux systèmes du premier ordre, il n'existe pas en toute rigueur une expression permettant de calculer le temps de réponse en fonction des paramètres fondamentaux  $\xi$  et  $\omega_n$ . Cependant, on peut montrer que pour une pulsation propre donnée, le temps de réponse décroît lorsque le coefficient d'amortissement augmente dans l'intervalle  $0 < \xi < 0.7$  et il est minimal pour  $\xi$  égal à 0.7.

Au-delà de cette valeur, le temps de réponse augmente rapidement comme le montre la figure ci-dessous. Elle illustre la variation du produit  $Tr_{5\%}$  par  $\omega_n$  en fonction de  $\xi$  en échelle semi-

logarithmique.

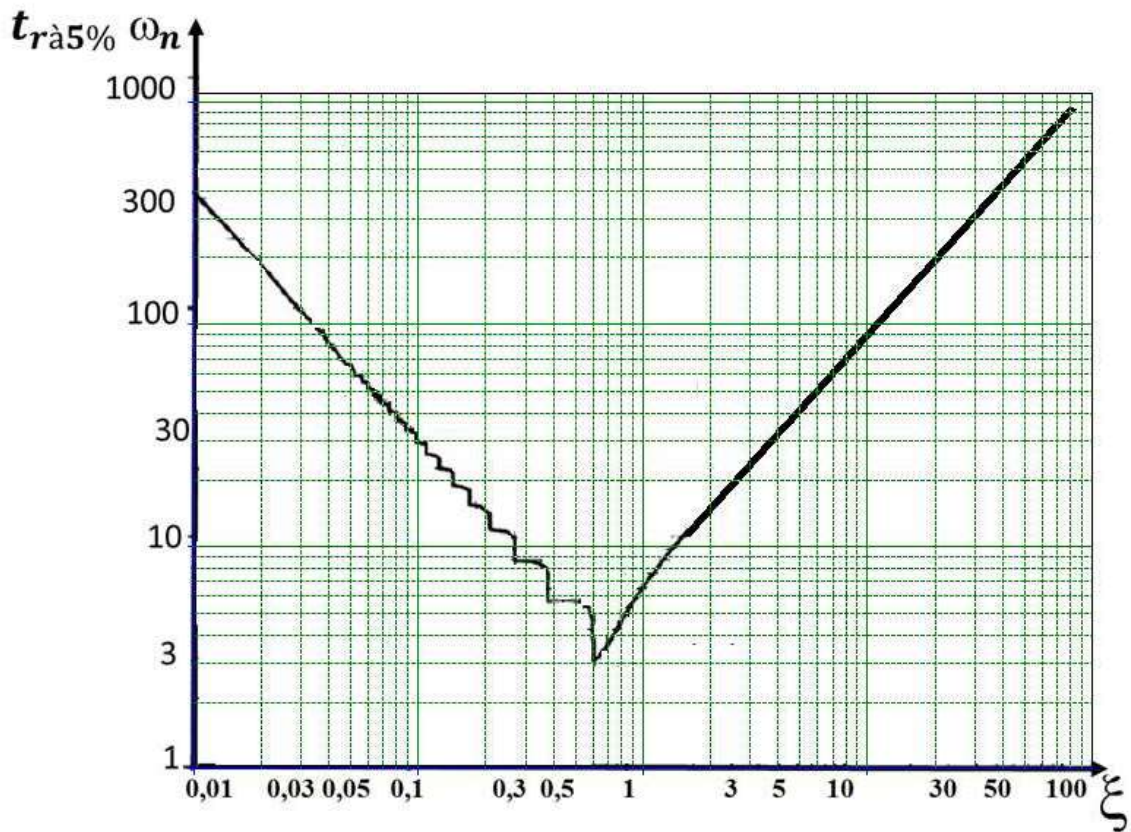


Figure N°7 : Abaque du temps de réponse réduit

Dans le cas où  $\xi = 0,7$ , le temps de réponse est déterminé par la relation :

$$t_{r5\%} = \frac{3}{\omega_n} \quad (5.39)$$

La formule empirique suivante est souvent utilisée pour évaluer le temps de réponse à n% pour  $0 < \xi < 0,7$ :

$$t_{r5\%} = \frac{1}{\xi \omega_n} \text{Ln} \left( \frac{100}{n} \right) \quad (5.40)$$

Elle est d'autant valable que  $\xi$  est petit.

On note que le temps de réponse est inversement proportionnelle à  $\omega_n$ . De ce fait, à coefficient d'amortissement constant, le temps de réponse est d'autant plus réduit que  $\omega_n$  est grande.

On montre par ailleurs les approximations suivantes :

Expression approchée du temps de réponse à 5%

Pour  $\xi \ll 1$  on a  $t_{r5\%} = \frac{3}{\xi \omega_n}$

Pour  $\xi \gg 1$  on a  $t_{r5\%} = \frac{6}{\xi \omega_n}$

On note enfin que le gain statique demeure inchangé quel que soit l'approximation faite.

En annexe, on a fourni un tableau récapitulatif regroupant les principales caractéristiques temporelles de la réponse indicielle ainsi qu'un tableau de valeurs numériques permettant de calculer ces caractéristiques pour un coefficient d'amortissement  $\xi$  et une pulsation propre  $\omega_n$  donnés.

#### 5.4 .Lieux des pôles de la fonction de transfert dans le plan complexe

Suivant la valeur du coefficient d'amortissement réduit  $\xi$  par rapport à 1, nous présentons ces deux pôles  $P_1$  et  $P_2$  dans le plan complexe.

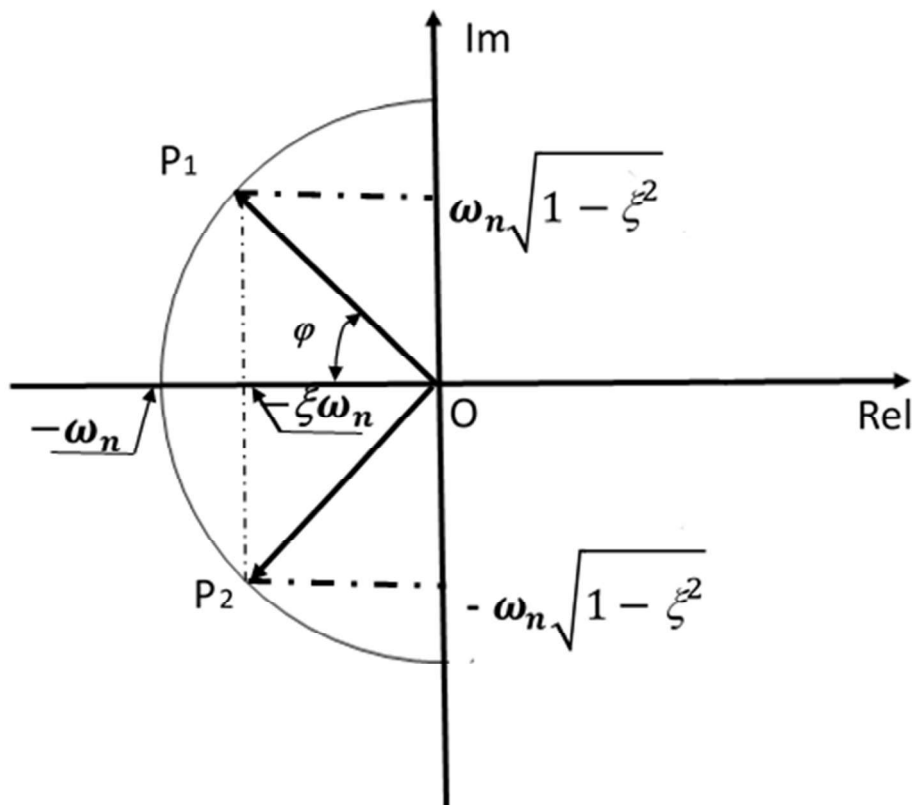


Figure N°7 : représentation des pôles dans le plan complexes

**Cas 1** : Pour  $\xi < 1$ ,

les modules des vecteurs  $\overrightarrow{OP_1}$  et  $\overrightarrow{OP_2}$

$$|\overrightarrow{OP_1}| = |\overrightarrow{OP_2}| = \sqrt{(\xi\omega_n)^2 + \left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right)^2} = \sqrt{(\xi\omega_n)^2 + (\omega_n)^2(1-\xi^2)}$$

$$\sqrt{(\xi\omega_n)^2 - (\xi\omega_n)^2 + (\omega_n)^2} = \omega_n \quad (5.41)$$

$$|\overrightarrow{OP_1}| = |\overrightarrow{OP_2}| = \omega_n \quad (5.42)$$



L'angle ou argument  $\varphi$  qu'ils font les vecteurs  $\overrightarrow{OP_1}$  et  $\overrightarrow{OP_2}$  avec l'axe imaginaire tel que

$$\sin \varphi = \frac{\xi \omega_n}{\xi \omega_n} = \xi. \quad (5.43)$$

Les deux points représentatifs  $P_1$  et  $P_2$  se déplacent sur deux quarts de cercle de centre O et de rayon  $\omega_n$ , suivant la valeur de  $\xi$ .

**Cas 2** : Pour  $\xi \geq 1$ , les lieux de  $P_1$  et  $P_2$  sont l'axe réel négatif, de  $-\xi \omega_n$  à 0 pour  $P_1$  et de  $-\xi \omega_n$  à  $-\infty$  pour  $P_2$ .

Remarque

Si le coefficient d'amortissement  $\xi$  est négatif, nous obtenons les mêmes lieux mais symétriques par rapport à l'axe imaginaire ( nous verrons dans le chapitre de la stabilité que cette configuration conduit à l'instabilité du système.

## Chapitre 6

## Représentation graphique des diagrammes

### 6.1 Notion de décibels

L'origine du décibel fait appel à la notion de gain en puissance d'un amplificateur électronique.

Si  $A$  est module, on dira par définition que  $A$  est exprimé en décibel si au lieu de  $A$  lui-même on considère

$$A_{dB} = 20 \log(|A|) \quad (7.1)$$

On voit que si  $A$  :

$$\begin{cases} \text{égale à } 1, A_{dB} \text{ est nul} \\ \text{supérieure à } 1, A_{dB} \text{ est positif} \\ \text{inférieure à } 1, A_{dB} \text{ est négatif} \\ \text{égal à } 0, A_{dB} \rightarrow -\infty \end{cases}$$

On peut noter quelques valeurs particuliers intéressantes :

|          |            |              |    |       |     |     |      |
|----------|------------|--------------|----|-------|-----|-----|------|
| $A$      | $\sqrt{2}$ | $1/\sqrt{2}$ | 2  | $1/2$ | 10  | 100 | 1000 |
| $A_{dB}$ | +3         | -3           | +6 | -6    | +20 | +40 | +60  |

L'évolution des modules en décibel présente des grands avantages, par exemple, si on a trois fonction complexe de la forme  $F_i = A_i e^{j\varphi_i}$ .

Tel que  $F = \frac{F_1 F_2}{F_3} = A e^{j\varphi}$  on aura :

$$\begin{cases} \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 \\ A = \frac{A_1 A_2}{A_3} \end{cases}$$

Alors  $A_{dB} = A_{1\,dB} + A_{2\,dB} - A_{3\,dB}$

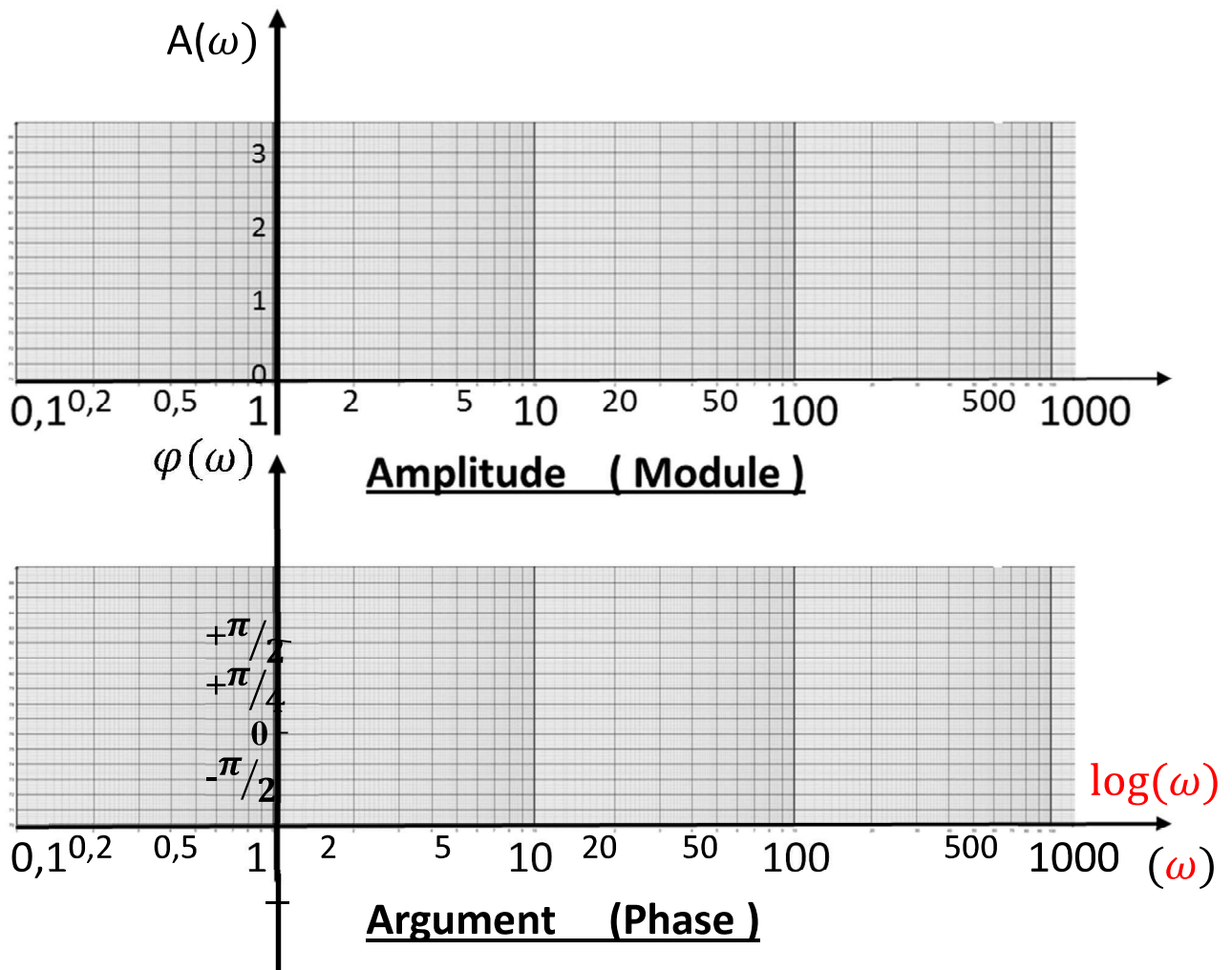
### 6.2 Diagramme de Bode

Le module  $A$  ou (amplitude) et l'argument  $\varphi$  ou (la phase) sont des fonction de la variable  $\omega$ , on peut tracer d'une part, un diagramme d'amplitude,  $A_{dB}(\omega)$  et d'autre part, un diagramme de phase  $\varphi(\omega)$ .

La variation de  $\omega$  est portée en abscisse sur une échelle logarithmique, afin de concentrer sur une étendue relativement réduite d'une variation importante de  $\omega$ .

Pour tracer les deux diagrammes (Amplitude et Phase) on utilise

Généralement du papier semi logarithmique.



**Figure N° 1 : Diagramme de Bode**

**Remarque**

En abscisse, l'échelle en  $\log \omega$  comporte une origine pour  $\omega = 1$ , car  $\log 1 = 0$   
 Par contre, il n'y a pas d'origine sur l'échelle en  $\omega$ , puisque  $\log 0$  tend vers  $-\infty$

**6.2.1 Exemple de trace diagramme de Bode**

Application au système du premier ordre

On rappelle que la fonction de transfert d'un système du premier est de la forme:

$$T(P) = \frac{K}{1 + \tau P} \tag{7.2}$$

Fonction de transfert complexe

On pose  $P = j\omega$  :

$$T(j\omega) = \frac{K}{1 + \tau j\omega} \tag{7.3}$$

$$T(\omega) = \frac{K(1 - \tau j\omega)}{(1 + \tau j\omega)(1 \tau j\omega)} = \frac{K(1 - \tau j\omega)}{1 + (\tau\omega)^2} \quad (7.4)$$

Les deux formes complexes de  $T(\omega)$  s'écrivent :

$$\begin{cases} \text{Rel}(\omega) = \frac{K}{1 + (\tau\omega)^2} \\ \text{Im}(\omega) = -\frac{K\omega}{1 + (\tau\omega)^2} \end{cases}$$

Alors le module et argument sont :

Le module :  $|A(\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1+(\tau\omega)^2}}$  et l'argument :  $\varphi(\omega) = -\text{Arct}g(\tau\omega)$

$$\begin{cases} |A(\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}} \\ \varphi(\omega) = -\text{Arct}g(\tau\omega) \end{cases}$$

### 6.2.2 .1 Représentation du module (amplitude)

On représente le module (en dB) en fonction de  $\omega$  :

$$\begin{aligned} A_{dB}(\omega) &= 20 \log(|A(\omega)|) = 20 \log\left(\frac{K}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}\right) \\ &= 20 \log K - 20 \log\left(\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}\right) \end{aligned} \quad (7.5)$$

Cherchons les directions asymptotiques qui correspondent au comportement en variation de la fréquences.

Asymptote horizontale :  $\lim_{\omega \rightarrow 0} A_{dB} = 20 \log K$  (7.6)

$\lim_{\omega \rightarrow \infty} A_{dB} = 20 \log K - 20 \log(\tau\omega) = 20 \log K - 20 \log(\tau) = -20 \log(\omega)$  (7.7)

Dans le système de coordonnées du diagramme de Bode, l'asymptote est une droite d'équation :

$$20 \log\left(\frac{K}{\tau}\right) - 20 \log(\omega) \quad (7.8)$$

On a donc une droite d'ordonnée à l'origine  $20 \log\left(\frac{K}{\tau}\right)$  et de pente -20 dans le sytème d'axe :  $\log(\omega), A_{dB}$ .

On peut évaluer la pente d'une façon **différente en utilisant non plus  $\log(\omega)$ , mais  $\omega$  sur une échelle logarithmique.**

Pour une variation d'une décade, c'est-à-dire pour deux pulsations  $\omega$  et  $10\omega$ , on a :

$$A_{dB}(10\omega) - A_{dB}(\omega) = -20db. \quad (7.9)$$

L'intervalle sépare une pulsation de  $\frac{1}{\tau}$  à  $\frac{10}{\tau}$  est appelé **une décade**

De même l'intervalle séparent une pulsation  $\omega$  de son double  $\frac{1}{\tau}$  à  $\frac{2}{\tau}$  est appelé **une octave**

On dit que la pente est de -20dB par décade (le module diminue de 20db pour une augmentation d'un facteur 10 de  $w$ ). Noté (-20dB/décade)

Ou encore la pente de -6dB par octave , noté -6db/octave

Les deux asymptotes se croisent en  $\omega = \omega_c = \frac{1}{\tau}$ . Cette pulsation est appelée pulsation de cassure.

#### 6.2.2.1.1 Exemple de tracé pour $K= 1$ et $\tau= 2$ .

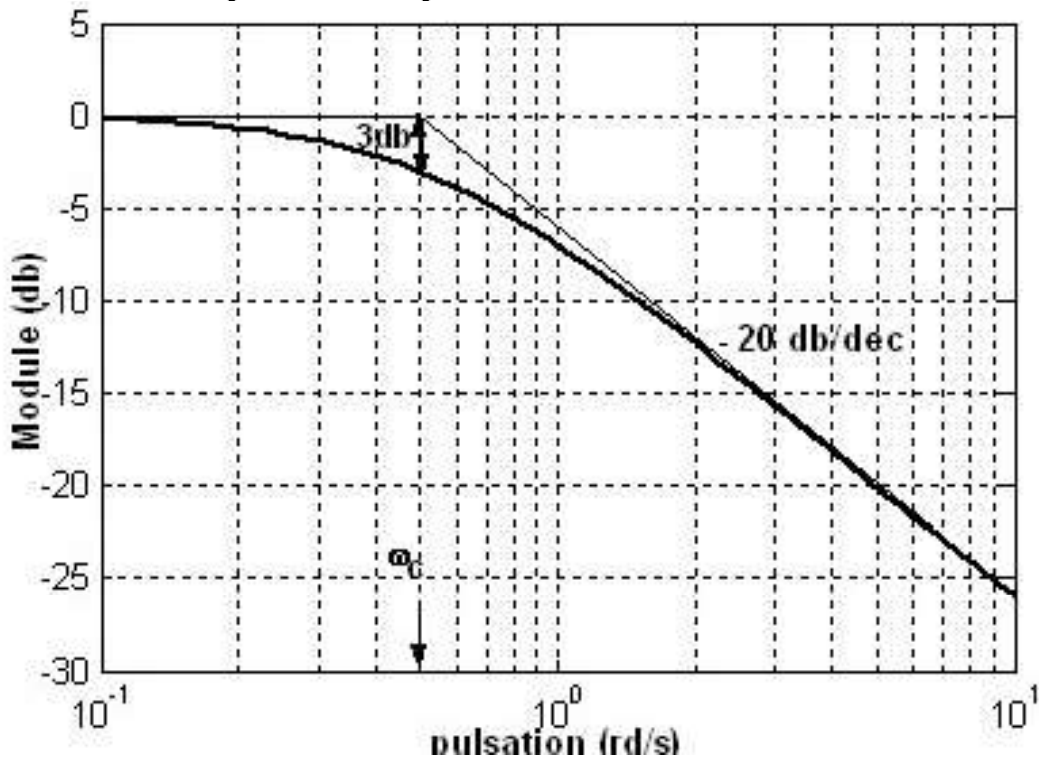


Figure N° 2. Diagramme du module de Bode

Les écarts de la courbe réelle par rapport aux asymptotes sont déterminés ci-dessous pour quelques points particuliers :

- Pour  $\omega_c = 1/\tau$ : (7.10)

$$A_{dB} = 20\log K - 20\log(\tau\omega) = 20\log K - 20\log(\sqrt{2}) = -20\log(K) - 3dB$$

Pour la pulsation de cassure, l'écart par rapport à l'asymptote est donc de -3dB.  
 Pour les pulsations double et moitié, l'écart est de -1dB.

Remarque : Le diagramme asymptotique est suffisamment précis pour être une première approximation du tracé du diagramme réel.

### 6.2.2 .2 Représentation de l'argument (Phase)

On représente l'argument (en degrés ou en radians) en fonction de  $\omega$ .

$$\text{Asymptote horizontale à } 0^\circ : \lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi(\omega) = 0^\circ \quad (7.11)$$

$$\text{Asymptote horizontale à } -90^\circ : \lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi(\omega) = -90^\circ \quad (7.12)$$

Le diagramme asymptotique de l'argument a la forme d'une marche d'escalier. Il n'est pas suffisamment précis pour représenter l'évolution réelle de la phase.

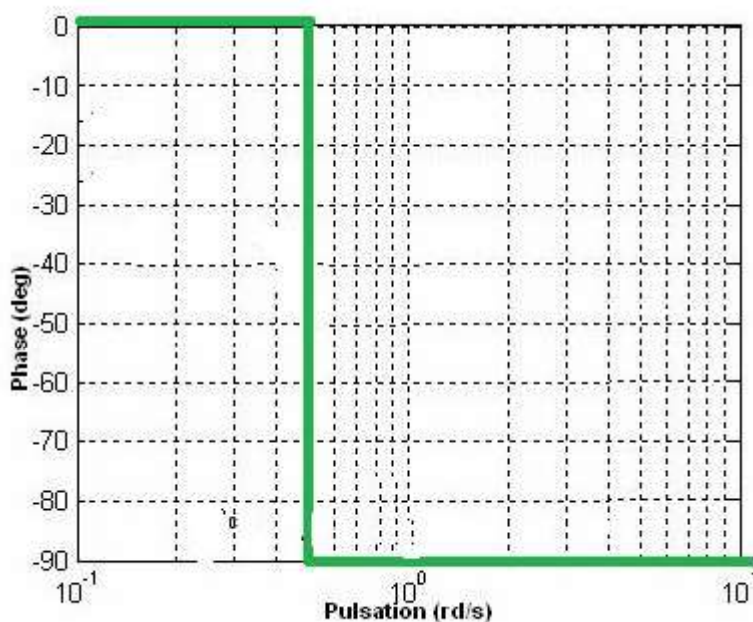


Figure N° 3. Diagramme asymptotique d'argument de Bode

Quelques points de la courbe réelle:

$$\varphi\left(\frac{\omega_c}{2}\right) = -\text{Arctg}\left(\tau \frac{\omega_c}{2}\right) = -26.56^\circ$$

$$\varphi(\omega_c) = -\text{Arctg}(\tau \omega_c) = -45^\circ$$

$$\varphi(2\omega_c) = -\text{Arctg}(2\tau \omega_c) = -63.43^\circ$$

La courbe de phase possède un point d'inflexion en  $\omega = \omega_c$ .

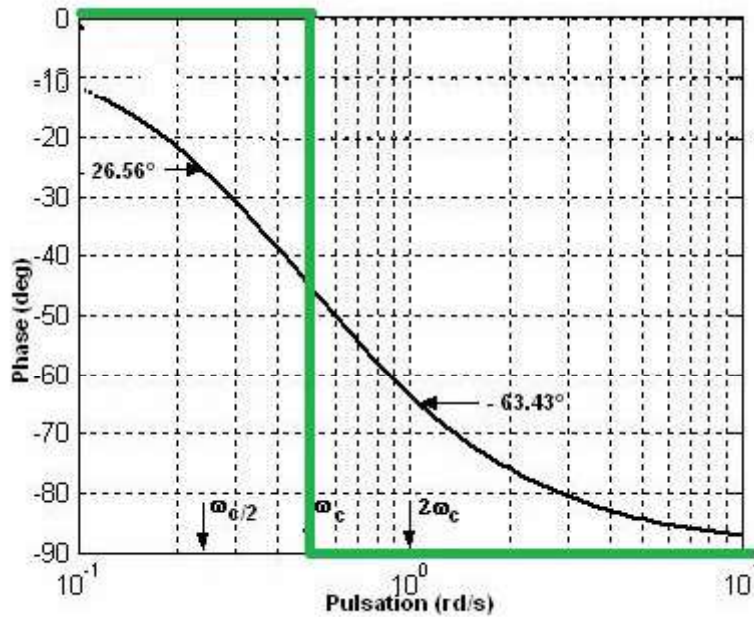


Figure N° 4 : Diagramme d'argument de Bode

### 6.2 .3 Représentation du diagramme de Bode.

Le diagramme de Bode comporte le diagramme d'amplitude et le diagramme d'argument

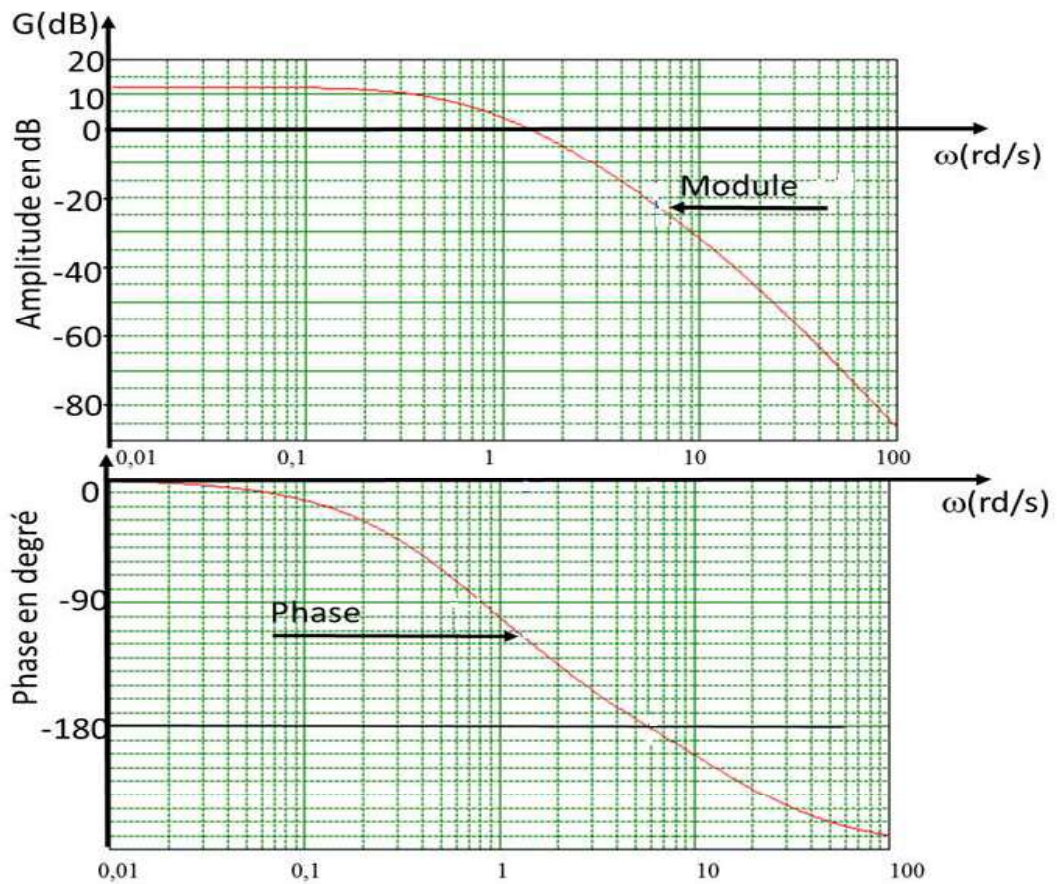


Figure N° 5 : Diagramme de Bode

### 6.3 Diagramme de Nyquist

On rappelle l'expression complexe de  $H(j\omega)$  :

$$H(j\omega) = \frac{K(1 - \tau j\omega)}{(1 + \tau j\omega)(1 - \tau j\omega)} = \frac{K(1 - \tau j\omega)}{1 + (\tau\omega)^2} \quad (7.13)$$

$$= \text{Re}(\omega) + j \text{Im}(\omega) = A(\omega) \underline{\phi(\omega)}$$

Pour  $\omega$  tendant vers zéro (basses fréquences), le module est égal à  $K$  ( $\text{Re} = K, \text{Im} = 0$ ) et la phase est nulle. Le point de départ du lieu est donc situé sur l'axe réel pris comme référence pour la phase ou argument.

Pour  $\omega$  tendant vers l'infini (hautes fréquences), le gain tend vers 0 et la phase tend vers  $-90^\circ$ , (c'est-à-dire le lieu tend vers l'origine).

Le point représentatif dans le plan complexe correspondant à la pulsation de cassure  $\omega_c = 1/\tau$  a pour coordonnées :  $(K/2, -K/2)$ .

L'étude générale permet de montrer que le lieu de transfert décrit un demi-cercle. En effet, d'après les relations (1) et (2) ci-dessous

$$x = \text{Re}(\omega) = \frac{K}{1 + (\tau\omega)^2} \quad (1) \quad y = \text{Im}(\omega) = -\frac{K\tau\omega}{1 + (\tau\omega)^2} \quad (2)$$

on a :

$$\begin{cases} (\tau\omega)^2 = \frac{K}{x} - 1 \\ y = -x\tau\omega \end{cases} \Rightarrow \left(x - \frac{K}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{K}{2}\right)^2$$

Le lieu de Nyquist d'un système du premier ordre est donc un demi-cercle de centre  $[K/2, 0]$  et de rayon  $K/2$  comme le montre la figure suivante :

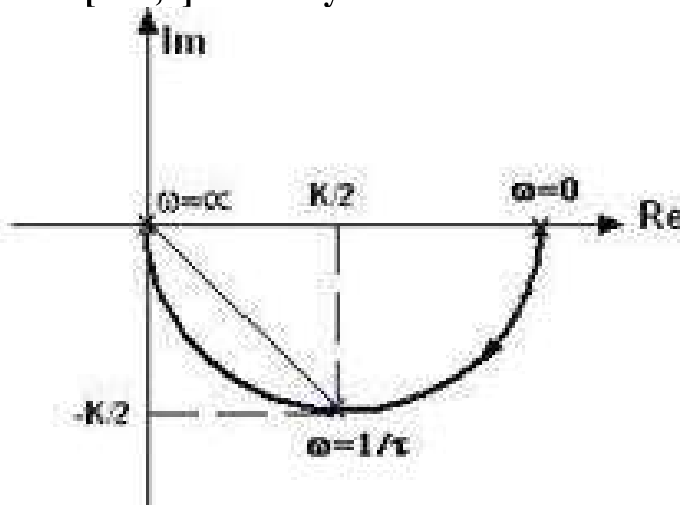


Figure N° 6. Diagramme de Nyquist



Le lieu doit être gradué en  $\omega$  pour qu'il puisse être utilisable.

**Remarque :** On peut passer plus au moins rapidement d'une représentation à une autre en reportant pour chaque pulsation  $\omega$  le module et la phase.

Par exemple, à partir du plan de Bode, on relève le module en dB duquel on déduit le module et la phase correspondante à une pulsation  $\omega$  donnée qu'on reporte sur le diagramme de Nyquist (ou inversement).

Les courbes ci-dessous permettent de voir le passage d'une représentation à une autre en considérant un point défini par [module(dB), phase(deg)].

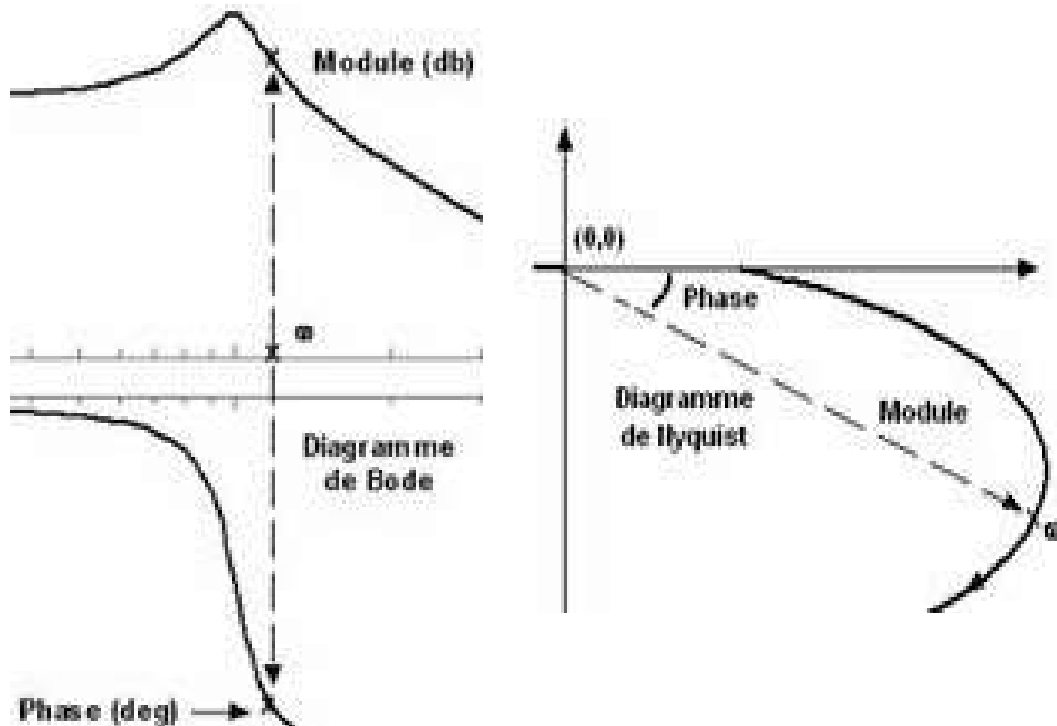


Figure N° 7 Passage du diagramme de bode au diagramme de Nyquist.

#### 6.4. Diagramme de Black

Dans la représentation de Bode, une fonction complexe, dépendant de la variable  $\omega$ , est représentée par deux diagrammes différents : module (ou amplitude) et argument (ou phase). On peut se ramener à un seul diagramme, dit de **Black**, en portant la phase  $\varphi$  en abscisse et le gain A dB en ordonnée ; le lieu obtenu doit évidemment être gradué en  $\omega$ . Ce diagramme se déduit aisément des diagrammes de Bode

Pour le même exemple  $T(\omega) = \frac{1}{1+\tau j\omega}$ , on obtient le tracé suivant

$$\varphi(\omega_n) = -\text{Arctg}(\tau\omega_n) \quad (7.14)$$

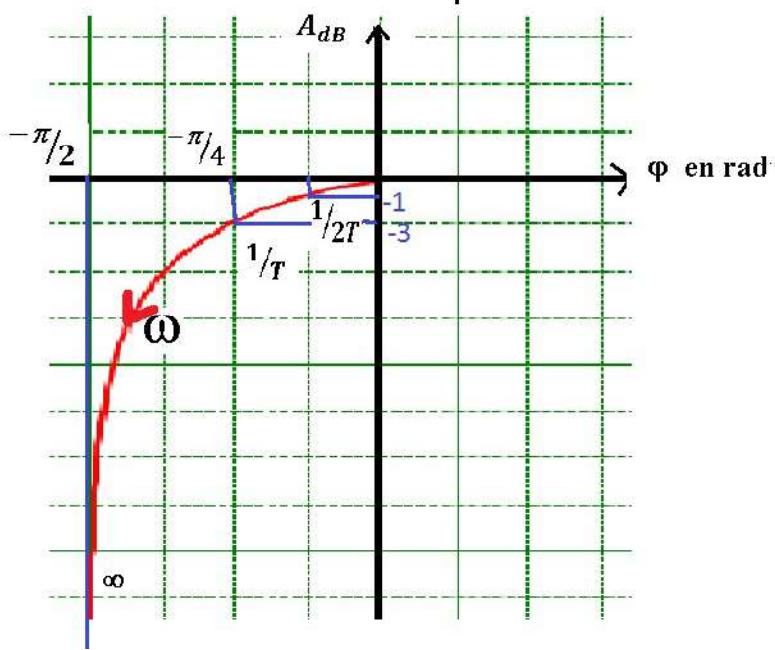


Figure N° 7 : Diagramme de black

**7.1 La condition générale de stabilité d'un système linéaire**

Un système est stable si , abandonné a lui-même , à partir de conditions initiales quelconques, il revient vers son état d'équilibre.

Il est instable dans le cas contraire.

Ainsi, pour qu'il soit stable, il faut et il suffit que tous les modes de ses régimes libres (transitoires) s'amortissent quand le temps croit .

Par exemple voir la réponse indicielle d'un système des deux cas (a) et (b)

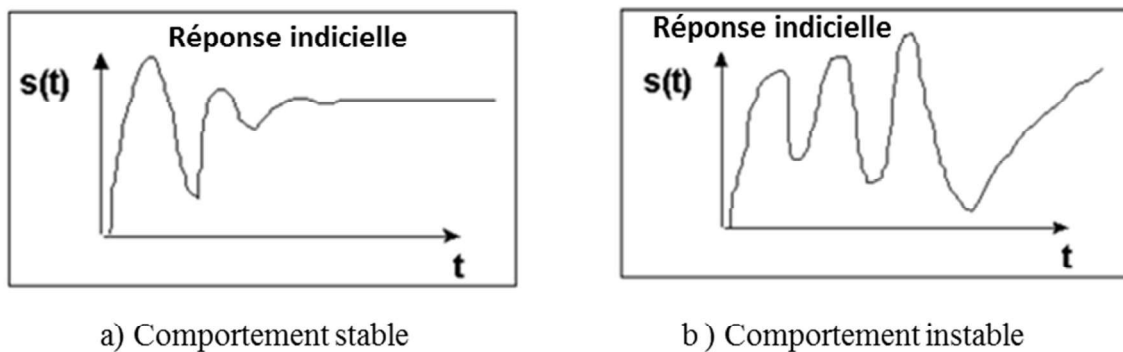
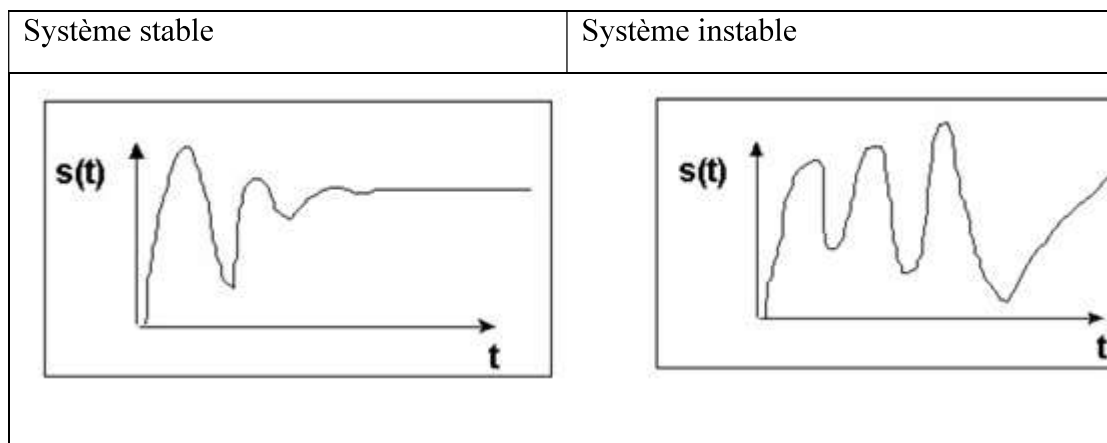


Figure N° 1 : Comportements des réponses indicelles

Nous illustrons d'autres cas



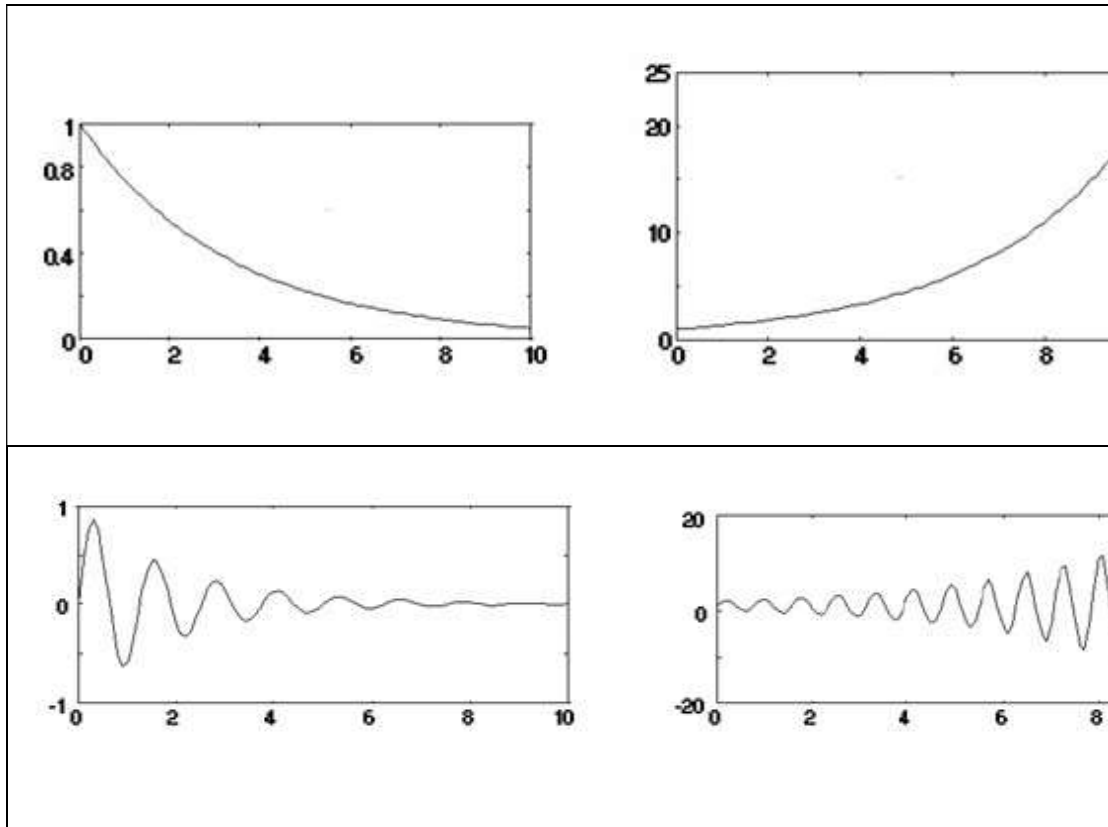


Figure N° 2 : Illustrations des réponses

Un système qui ne revient pas à sa position d'équilibre mais ne s'en écarte pas est dit oscillant ou en pompage.

## 7.2 Fonction de transfert et stabilité.

Une fonction de transfert  $F(P)$  d'un système asservi linéaire continu est généralement un rapport de deux polynômes en  $P$ . Les pôles de la fonction de transfert sont réelles et/ou complexes conjuguées.

Si on suppose pour simplifier l'étude qu'il n'y a pas de pôles multiples, la décomposition de  $F(P)$  en éléments simples est de la forme :

$$F(P) = \sum_i \frac{C_i}{P - P_i} + \sum_i \frac{\alpha_i}{(P - a_i)^2 + b_i^2}$$

$$\sum_i \frac{C_i}{P - P_i} \quad \text{Pour les pôles réels} \quad \text{et} \quad \sum_i \frac{\alpha_i}{(P - a_i)^2 + b_i^2} \quad \text{Pour pôles complexe}$$

Une décomposition en des éléments simples faisant apparaître les pôles réels et les pôles complexes. La réponse temporelle (la transformée inverse de  $F(P)$ ) est caractérisée par la présence d'un régime transitoire traduit par le terme

$$f(t) = L^{-1}\{F(P)\} = \sum_i C_i e^{P_i t} + \sum_i d_i e^{a_i t} \sin(b_i + \varphi_i)$$

Le premier terme est associé aux pôles réels, quant au deuxième, il est associé aux pôles complexes.

On voit que :

Si les parties réelles sont toutes négatives :  $p_i$  et  $a_i < 0$ , alors la réponse transitoire tend vers zéro pour  $t$  tendant vers l'infini. En termes de la définition de stabilité, le système revient à sa position d'équilibre : le système est stable. Si un des pôles réels est positif, l'exponentielle qui lui est associée tend vers l'infini lorsque  $t$  tend vers l'infini : le système est instable.

Si une paire des pôles complexes est à partie réelle positive, le système est instable avec un comportement oscillant divergent.

Si une paire de pôles est complexe pure  $P = \pm j\omega$  ( $a_i = 0$ ), cela donne une forme sinusoïdale à la réponse. La convergence ou la divergence dépend des signes des parties réelles des autres pôles : le système diverge tout en oscillant ou converge vers des oscillations entretenues.

### 7.3 Condition de stabilité.

On peut écrire une nouvelle condition de stabilité d'un système :

Un système est stable si et seulement si, sa fonction de transfert n'a pas de pôle à partie réelle positive ou nulle.

La position des pôles de la fonction de transfert permet donc de renseigner sur la stabilité du système.

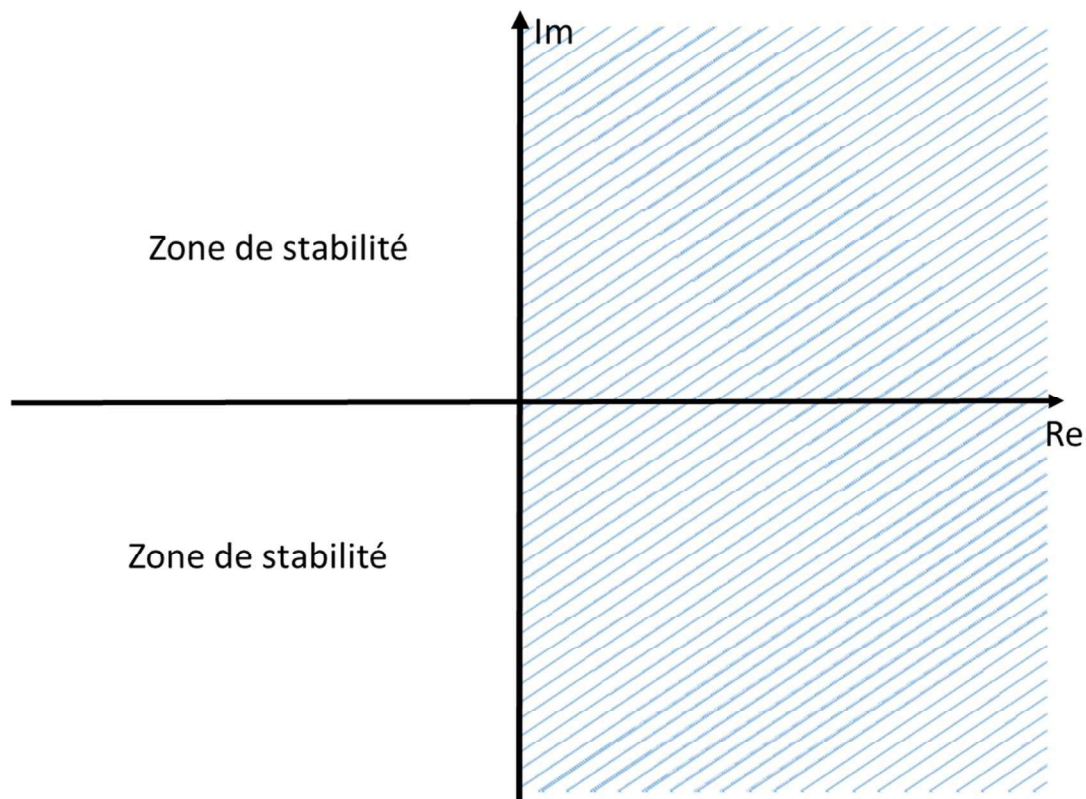


Figure N° 3 : Zones de stabilité dans le plan complexe

La figure ci-dessous résume le comportement convergent ou divergent d'un système selon la position de ses pôles dans le plan complexe (le cas juste oscillant n'est pas illustré)

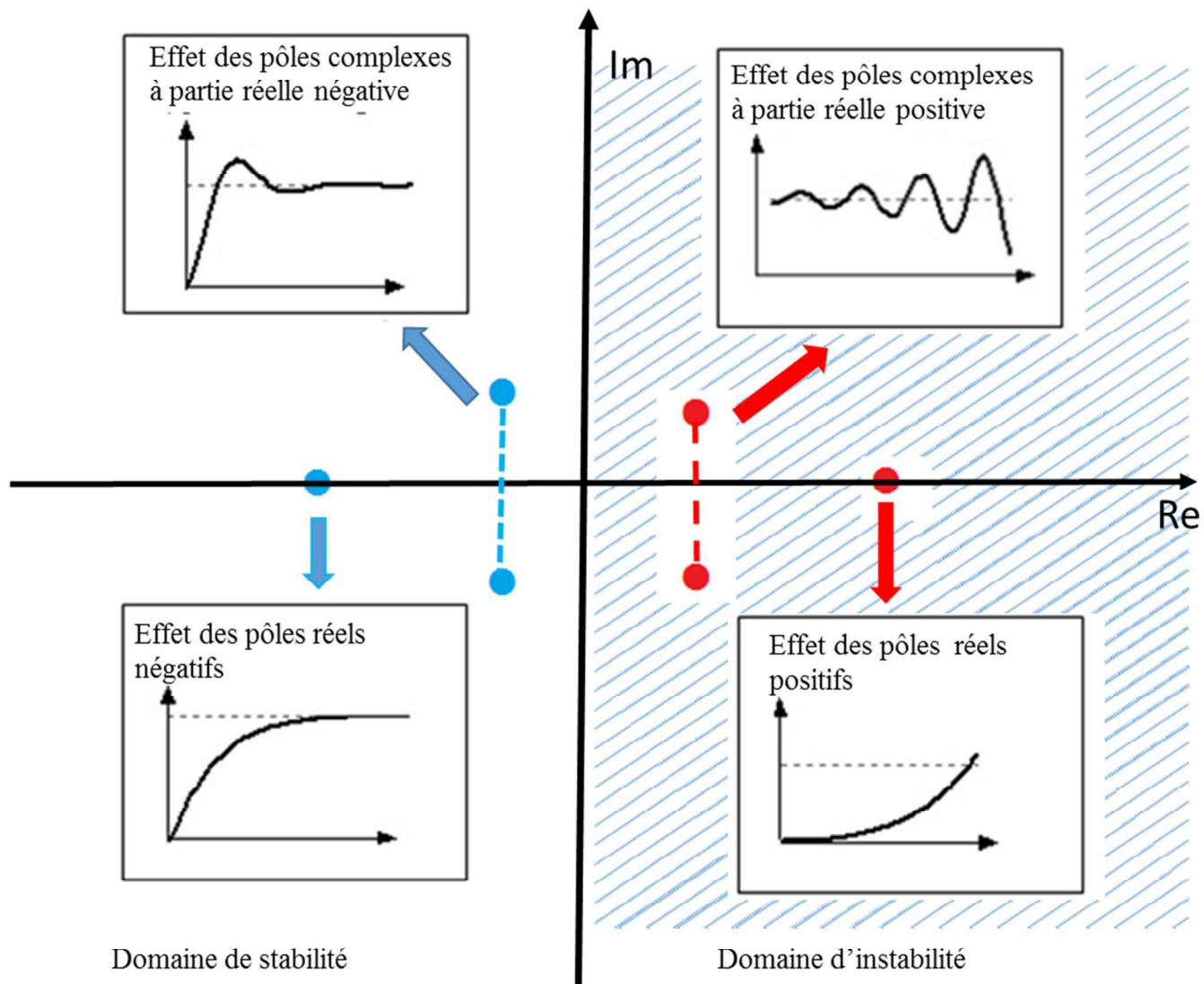


Figure N° 4 : Effets des pôles dans le plan complexe

## 7.4 Application aux systèmes asservis en boucle fermée

La figure ci-dessous représente le schéma fonctionnel canonique d'un asservissement

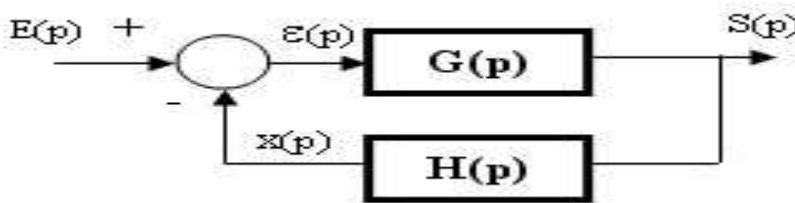


Figure N°5 : Schémas fonctionnelle d' un système en boucle fermée

On note :  $T(P) = G(P)H(P)$  : la fonction de transfert en boucle ouverte

$$- F(P) = \frac{S(P)}{E(P)} = \frac{G(P)}{1+T(P)} \quad : \text{ la fonction de transfert en boucle fermée}$$

Lorsque le système étudié est un système bouclé (asservi ou régulé), on s'intéresse à sa stabilité en étudiant les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée  $F(P)$ ; c'est-à-dire les racines de l'équation caractéristique  $1 + T(P) = 0$ . Cette équation n'est généralement facile à résoudre que dans le cas où le degré du polynôme  $1 + T(P)$  est inférieur ou égal à deux.

Cette résolution se complique lorsque ce polynôme dépend d'un paramètre (ou plusieurs). En effet, dans ce cas il est difficile, voire impossible, de calculer les racines afin de conclure sur la stabilité.

D'où la nécessité de disposer des outils (critères) pour étudier la stabilité sans passer par la résolution de l'équation caractéristique.

### 7.4.1 critères de stabilité.

On classe les critères en deux catégories : les critères algébriques et les critères géométriques. Parmi les critères algébriques, il y'a le critère de Routh.

#### 7.4.1.1. Critère algébrique de Routh.

Le critère de Routh est un critère permettant de déterminer à partir du polynôme caractéristique (dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée), le signe des racines de l'équation caractéristique  $1 + T(P) = 0$  sans résoudre cette équation.

Pour ce faire, on écrit la fonction de transfert en boucle fermée sous la forme :

$$F(P) = \frac{S(P)}{E(P)} = \frac{G(P)}{1 + T(P)}$$

$$F(p) = \frac{N_F(p)}{D_F(p)} = \frac{a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0}{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0}$$

et on en déduit l'équation caractéristique de la fonction de transfert du système en boucle fermée suivante :

#### 7.4.1.1.1 Condition nécessaire.

Pour qu'un système en boucle fermée soit stable, c'est-à-dire toutes les racines de l'équation caractéristique soient à partie réelle négative, il faut que tous les coefficients de l'équation caractéristique soient de même signe.

Cette condition est une condition suffisante pour les systèmes du premier et du second ordre comme on le verra plus loin.

#### 7.4.1.1.2. Enoncé du critère de Routh.

La condition ci-dessus n'est pas suffisante pour les systèmes d'ordre supérieur à deux.

Lorsqu'elle est vérifiée, il convient d'appliquer la règle de Routh qui permet de déterminer le signe des racines d'une équation algébrique. La démarche consiste à construire la table ci-dessous, appelée la table de Routh. Lors de cette construction, on s'arrange pour que  $b_n$  soit positif.

|           |           |           |           |    |    |       |       |
|-----------|-----------|-----------|-----------|----|----|-------|-------|
| $p^n$     | $b_n$     | $b_{n-2}$ | $b_{n-4}$ | .. | .. | $b_2$ | $b_0$ |
| $p^{n-1}$ | $b_{n-1}$ | $b_{n-3}$ | $b_{n-5}$ | .. | .. | $b_1$ |       |
| $p^{n-2}$ | $c_1$     | $c_2$     | $c_3$     | .. | .. | ..    | ..    |
| $p^{n-3}$ | $d_1$     | $d_2$     | $d_3$     | .. | .. | ..    | ..    |
| :         | :         | :         | :         | :  | :  | :     | :     |
| :         | :         | :         | :         | :  | :  | :     | :     |
| $p^1$     | $m_1$     | ..        | ..        | .. | .. | ..    | ..    |
| $p^0$     | $r_1$     | ..        | ..        | .. | .. | ..    | ..    |

Figure N° 6 : Table Routh

Les deux premières lignes sont constituées des coefficients du polynôme caractéristique. Les coefficients de la troisième ligne et les suivantes sont calculés comme suit :

$$c_1 = \frac{-1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} b_n & b_{n-2} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{vmatrix} = -\frac{(b_n b_{n-3} - b_{n-1} b_{n-2})}{b_{n-1}}$$

$$c_2 = \frac{-1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} b_n & b_{n-4} \\ b_{n-1} & b_{n-5} \end{vmatrix} = -\frac{(b_n b_{n-5} - b_{n-1} b_{n-4})}{b_{n-1}} \dots \text{etc.}$$



De la même manière, on calcule pour les coefficients des lignes suivantes :

$$d_1 = \frac{-1}{c_1} \begin{vmatrix} b_{n-1} & b_{n-3} \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = -\frac{(b_{n-1}c_2 - b_{n-3}c_1)}{c_1}$$

$$d_2 = \frac{-1}{c_1} \begin{vmatrix} b_{n-1} & b_{n-5} \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} = -\frac{(b_{n-1}c_3 - b_{n-5}c_1)}{c_1} \dots\dots\text{etc.}$$

On continue cette procédure jusqu'à la dernière ligne de la table de Routh ( $p^0$ ).

La deuxième colonne est appelée colonne des pivots.

Le critère de Routh s'énonce de la manière suivante :

- Le système est stable si tous les termes de la colonne des pivots sont positifs (en fait de même signe que  $b_n$ ).
- Il y a autant de racines à partie réelle positive qu'il y'a de changement de signes dans la colonne des pivots.
- Une ligne de zéro indique l'existence de racines imaginaires pures

Remarques :

- Une ligne de zéro implique la présence d'une paire de racines imaginaires pures donnant lieu à une forme sinusoïdale dans la réponse transitoire. Le système diverge en oscillant s'il y a au moins une racines à partie réelle positive, ou il converge vers des oscillations entretenues si les autres racines ont toutes une partie réelle négative.
- On peut multiplier ou diviser une ligne de la table de Routh par un nombre positif sans changer les propriétés de celle-ci.

#### 7.4.1.2. Exemples.

| Exemples d'équation caractéristique et commentaires   | Table de Routh |      |    |
|---|----------------|------|----|
| $p^3 + 6p^2 + 12p + 8 = 0$<br>Tous les coefficients de la première colonne sont positifs à<br>Système stable.   | $P^3$          | 1    | 12 |
|   | $P^2$          | 6    | 8  |
|   | $P^1$          | 64/6 | 0  |
|   | $P^0$          | 8    | 0  |
| $p^3 + 3p^2 + 8 = 0$<br>· Coefficient de p est nul à système instable<br>· Ou il y a changement de signe dans la première colonne à<br>système instable | $P^3$          | 1    | 0  |
|   | $P^2$          | 3    | 8  |
|   | $P^1$          | -8   | 0  |
|   | $P^0$          | 8    | 0  |

|  |   |
|--|---|
| $D_F(p) = p^3 + 3p^2 + 3p + 1 + K = 0$<br>Le système est stable si $8 - K > 0$ et $1 + K > 0$<br>Soit donc la condition de la stabilité:<br>$-1 < K < 8$   | $P^3$ 1 3<br>$P^2$ 3 $1 + K$<br>$P^1$ $(8-K)/3$ 0<br>$P^0$ $1 + K$ 0                      |
| $D_F(p) = p^4 + 2p^3 + p^2 + 4p + 2 = 0$<br>Changement de signe dans la première colonne à système instable<br>En plus le nombre de changement de signe est égal à 2 à 2 racines à partie réelle positive.   | $P^4$ 1 1 2<br>$P^3$ 2 4 0<br>$P^2$ -1 2 0<br>$P^1$ 8 0<br>$P^0$ 2 0                      |
| On reprend le 3 <sup>ème</sup> exemple avec $K = 8$ .<br>$D_F(p) = p^3 + 3p^2 + 3p + 9 = 0$ ;<br>La 3 <sup>ème</sup> ligne contient un zéro dans la première colonne.<br>Pour continuer la construction de la table, on remplace ce zéro par un $\varepsilon > 0$ et on continue la procédure.                                 | $P^3$ 1 3<br>$P^2$ 3 9<br>$P^1$ $\varepsilon$ 0<br>$P^0$ $9\varepsilon / \varepsilon=9$ 0 |
| Si dans la table de Routh, il y'a un pivot nul comme dans l'exemple précédent, ceci indique la présence d'une paire de racines complexes pures, solution de l'équation suivante dite l'équation auxiliaire :<br>$ap^2 + b = 0$<br>où a et b sont les coefficients de la ligne immédiatement au-dessus de la ligne à pivot nul. | : : :<br>$P^3$ x x<br>$P^2$ a b<br>$P^1$ $\varepsilon$ 0<br>$P^0$ b 0                     |

Remarque : Dans le cas d'un système bouclé d'ordre un ou deux, la colonne des pivots est constitué par les coefficients de son polynôme caractéristique. Donc, le fait que ces coefficients soient tous de même signe est une condition nécessaire et suffisante pour sa stabilité.

## 7.4.2 Critère graphique de Revers

### 7.4.2.1 Intérêt des critères graphiques

Les critères graphiques de stabilité de Revers permettent d'étudier la stabilité d'un système bouclé à partir de la réponse fréquentielle du système en boucle ouverte  $T(P)$

On rappelle que la réponse fréquentielle d'un système peut s'obtenir soit expérimentalement soit à partir de la connaissance analytique de sa fonction de transfert.

L'avantage des méthodes géométriques par rapport aux méthodes algébriques réside essentiellement dans le fait que la connaissance analytique de la fonction de transfert du système en boucle ouverte n'est pas indispensable puisque seul est nécessaire le tracé du lieu de transfert obtenu expérimentalement.

#### 7.4.2.2 Enoncé du critère de Revers

Le critère de Revers est un critère graphique de stabilité qui découle du critère général de Nyquist. Il s'énonce de la manière suivante :

- Un système asservi est stable si, à la pulsation  $\omega_1$  pour laquelle  $|T(j\omega)| = 1$ , l'argument est supérieur à  $-180^\circ$

$$\begin{cases} |T(j\omega)| = 1 \\ \text{Arg}(T(j\omega)) > -180^\circ \end{cases}$$

- Un système asservi est stable si, à la pulsation  $\omega_c$  pour laquelle  $\text{Arg}(T(j\omega_c)) = -180^\circ$ , le module est inférieur à 1.

$$\begin{cases} \text{Arg}(T(j\omega)) = -180^\circ \\ |T(j\omega_c)| < 1 \end{cases}$$

Si l'une de ces deux conditions n'est pas satisfaite, le système asservi est qualifié d'instable.

- Un système asservi est à la limite de la stabilité si,

$$|T(j\omega)| = 1, \text{ et } \text{Arg}(T(j\omega_c)) = -180^\circ, \text{ On note que dans ce cas: } \omega_1 = \omega_c ;$$

#### 7.4.2.3 Critère de Revers à partir du diagramme de Bode

Le respect de l'une des deux conditions permet d'énoncer le critère de Revers dans le plan de Bode.

- Un système asservi est stable si, à la pulsation  $\omega_1$  pour laquelle  $|T(j\omega_1)| = 1$  (donc  $20 \log |T(j\omega_1)| = 0 \text{ dB}$ ), l'argument est supérieur à  $-180^\circ$ .
- Un système asservi est stable si, à la pulsation  $\omega_c$  pour laquelle  $\text{Arg}(T(j\omega_c)) = -180^\circ$ , le module en dB est inférieur à zéro.

On précise qu'on trace le diagramme de gain et de phase de la fonction de transfert en boucle ouverte  $T(j\omega)$  et on conclut sur la stabilité du système en boucle fermée.

On présente ci-dessous un exemple d'illustration d'un système stable en boucle fermée: le déphasage est supérieur à  $-180^\circ$  pour la pulsation  $\omega_1$ , et le module en dB est inférieur à zéro pour la pulsation  $\omega_c$ .

Figure N°5

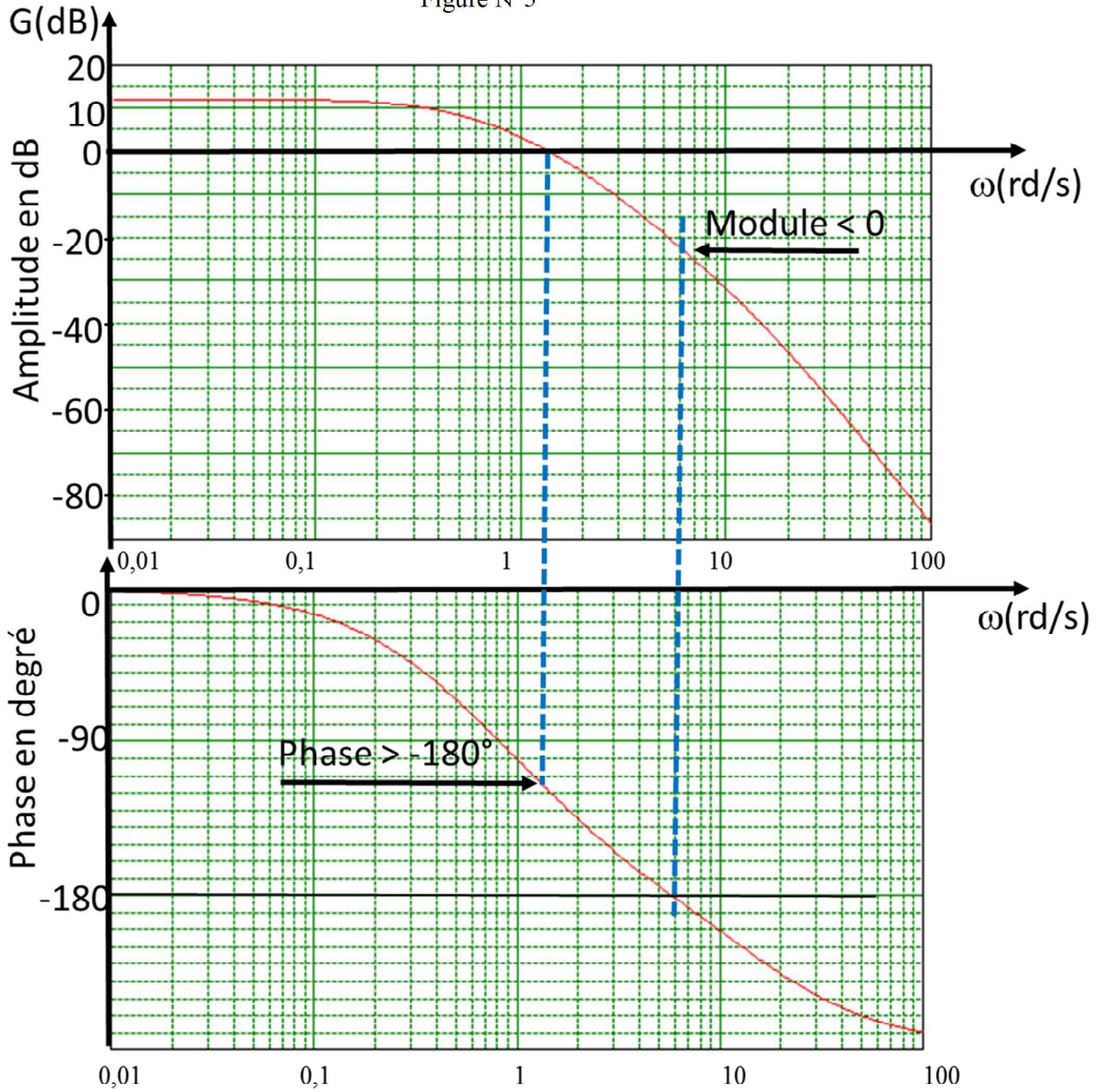


Figure N°5 Diagramme de Bode

## 7.5. Exercices d'application

**Exemple 1** : système stable

$$F(P) = \frac{1}{P^4 + 7P^3 + 17P^2 + 17P + 6}$$

$$\begin{array}{c|ccc}
 p^4 & 1 & 17 & 6 \\
 p^3 & 7 & 17 & 0 \\
 p^2 & \frac{7 \cdot 17 - 1 \cdot 17}{7} & \frac{7 \cdot 6 - 1 \cdot 0}{7} & 0 \\
 p^1 & \frac{102 \cdot 17 - 7 \cdot 6}{7} & 0 & \\
 p^0 & 6 & & 
 \end{array}
 \iff
 \begin{array}{c|cc|c}
 p^4 & 1 & 17 & 6 \\
 p^3 & 7 & 17 & 0 \\
 p^2 & 14,57 & 6 & 0 \\
 p^1 & 14,12 & 0 & \\
 p^0 & 6 & 6 & 
 \end{array}$$

Tous les termes de la première colonne sont positifs, le système de fonction de transfert  $F(P)$  est donc stable.

**Exemple 2** : système instable

$$F(P) = \frac{1}{P^4 + 2P^3 + 3P^2 + 4P + 5}$$

Tous les termes de la première colonne ne sont pas de même signe donc le système est instable. De plus, il y a deux changements de signe (de 1 à -6 et de -6 à 5), par conséquent on peut affirmer que le système possède deux pôles instables.

$$\begin{array}{c|cc|cc}
 p^4 & 1 & & 3 & 5 \\
 p^3 & 2 & & 4 & 0 \\
 p^2 & \frac{2 \cdot 3 - 1 \cdot 4}{2} = 1 & & \frac{2 \cdot 5 - 1 \cdot 0}{2} = 5 & 0 \\
 p^1 & \frac{1 \cdot 4 - 2 \cdot 5}{1} = -6 & & 0 & \\
 p^0 & \frac{-6 \cdot 5 - 1 \cdot 0}{-6} = 5 & & 0 & 
 \end{array}$$

**Exemple 3** : les terme nul dans la première colonne

$$F(P) = \frac{1}{P^5 + 2P^4 + 2P^3 + 4P^2 + P + 1}$$

$$\begin{array}{c|ccc}
 p^5 & 1 & 2 & 1 \\
 p^4 & 2 & 4 & 1 \\
 p^3 & \epsilon & 0.5 & 0 \\
 p^2 & c_1 & 1 & 0 \\
 p^1 & d_1 & 0 & 0 \\
 p^0 & 1 & 0 & 0
 \end{array}$$

Si un terme de la première colonne est nul et que tous les termes de la même ligne ne sont pas nuls, on remplace le terme nul par un  $\epsilon$  très petit de même signe que les termes de la première colonne (ici : positif). Dès lors on obtient :

$$c_1 = \frac{4\epsilon - 1}{\epsilon} \simeq \frac{-1}{\epsilon} < 0 \text{ et } d_1 = \frac{0.5c_1 - \epsilon}{c_1} \simeq 0.5 > 0.$$

Tous les termes de la première colonne ne sont pas de même signe donc le système est instable.

De plus, il y a deux changements de signe, par conséquent on peut affirmer que le système possède deux pôles instables.

#### **Exemple 4**

$$\text{Soit } F(P) = \frac{1}{P^3 + 2P^2 + 4P + 8}$$

Quand tous les termes d'une même ligne sont nuls, cela peut traduire deux phénomènes différents :

- soit on est en présence de deux pôles réels opposés :  $+a$  et  $-a$ , dans ce cas le système est instable.
- soit on est en présence de deux pôles imaginaires purs opposés :  $+ja$  et  $-ja$ , dans ce cas le système est marginalement stable.

$$\begin{array}{c|cc}
 p^3 & 1 & 4 \\
 p^2 & 2 & 8 \\
 p^1 & 0 & 0 \\
 p^0 & 8 & 0
 \end{array}$$

Pour analyser la stabilité, on construit alors l'équation auxiliaire, c'est à dire l'équation

formée à partir des coefficients de la ligne précédent la ligne uniformément nulle :

$$Z(P) = 2P^2 + 4P + 8 = 2(P + 2j)(P - 2j)$$

Les racines de cette équation auxiliaire sont racines de l'équation caractéristique du système.

Ici on obtient  $P_{1,2} = \pm 2j$ , par conséquent le système est marginalement stable.

**Exemple 5** : Fonction de transfert dépendante d'un paramètre

On peut naturellement analyser la stabilité d'un système en fonction d'un paramètre.

$$\text{Soit } F(P) = \frac{K(P+10)}{P^3+4P^2+(4+K)P+10K}$$

$$\begin{array}{l|ll} p^3 & 1 & 4+K \\ p^2 & 4 & 10K \\ p^1 & 4-1,5K & 0 \\ p^0 & 10K & 0 \end{array}$$

le système sera stable si  $0 < K < \frac{4}{1,5}$

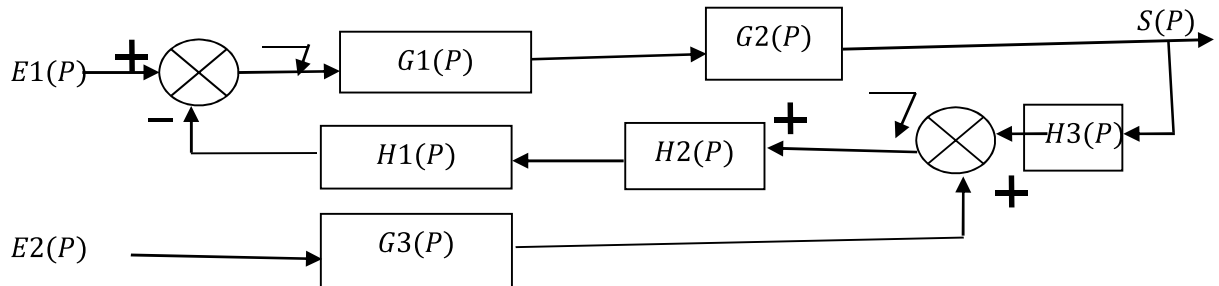
Dans le cas limite ou  $K = \frac{4}{1,5}$ , on construit l'équation auxiliaire :

$4P^2 + \frac{40}{1,5} = 4 \left( P + j\sqrt{\frac{10}{1,5}} \right) \left( P - j\sqrt{\frac{10}{1,5}} \right)$  et on constate que le système est marginalement stable.

## EXERCICES

### Exercice N°1

la réponse  $S(P)$  du Système



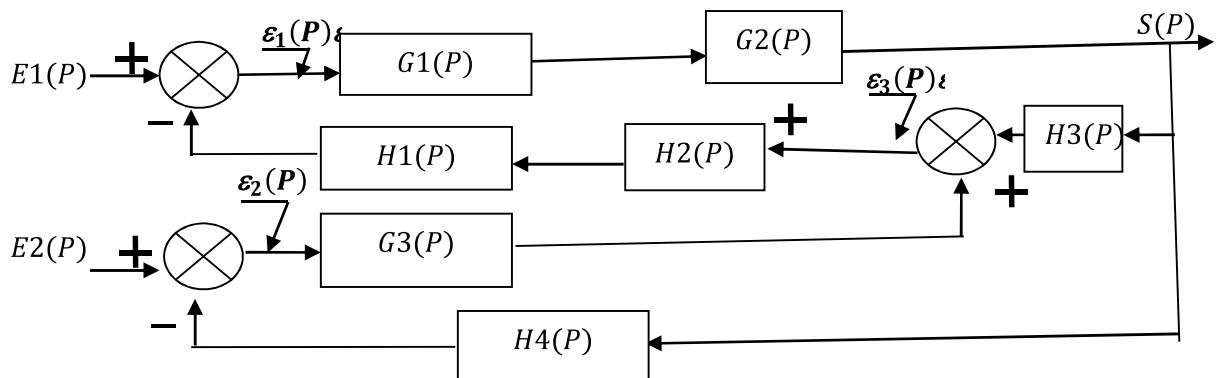
Solution

$$\begin{cases} S(P) = \varepsilon_1(P) \cdot G_1(P) \cdot G_2(P) \\ \varepsilon_1(P) = E_1(P) - H_1(P) \cdot H_2(P) \cdot \varepsilon_2(P) \\ \varepsilon_2(P) = E_2(P) G_3(P) + H_3(P) S(P) \end{cases} \text{ on trouve}$$

$$S(P) = \frac{G_1(P) \cdot G_2(P) E_1(P) - G_1(P) \cdot G_2(P) G_3(P) H_1(P) H_2(P) E_2(P)}{1 + H_1(P) H_2(P) H_3(P) G_1(P) \cdot G_2(P)}$$

### Exercice N°2

la réponse  $S(P)$  du Système



$$\begin{cases} S(P) = \varepsilon_1(P) \cdot G_1(P) \cdot G_2(P) \\ \varepsilon_1(P) = E_1(P) - H_1(P) \cdot H_2(P) \cdot \varepsilon_3(P) \\ \varepsilon_2(P) = E_2(P) - H_4(P) S(P) \\ \varepsilon_3(P) = \varepsilon_2(P) G_3(P) + H_3(P) S(P) \end{cases} \text{ on trouve}$$

$S(P)$

$$= \frac{G_1(P) \cdot G_2(P) E_1(P) - G_1(P) \cdot G_2(P) G_3(P) H_1(P) H_2(P) E_2(P)}{1 + H_1(P) H_2(P) H_3(P) G_1(P) \cdot G_2(P) - H_1(P) H_2(P) H_4(P) G_1(P) \cdot G_2(P) \cdot G_3(P)}$$



### Exercice N° 3

Trouver la transformée inverse de  $X(P)$

$$X(P) = \frac{1}{P(P+k)}$$

Solution

Nous allons décomposer en élément simple  $X(P)$ .

$$X(P) = \frac{1}{P(P+k)}$$

Les éléments simples sont les monômes de la forme  $(P - P_i)$  où  $(P_i)$  est un pôle de  $X(P)$  (est une valeur qui annule le dénominateur)

Les pôles (les racines du dénominateur) de  $X(P)$  sont  $P = 0$ ,  $P = -k$  alors

$$X(P) = \frac{\alpha}{P} + \frac{\beta}{P+k}$$

On réduit au même dénominateur ce qui nous donne :  $X(P) = \frac{\alpha(P+k) + \beta P}{P(P+k)} =$   
 $\frac{P(\alpha+\beta) + \alpha k}{P(P+k)}$

Par identification on a  $\alpha + \beta = 0$  et  $\alpha k = 1$  alors  $\alpha = -\frac{1}{k}$  et  $\alpha =$   
 $-\beta = \frac{1}{k}$

Soit  $X(P)$

$$X(P) = \frac{1}{k} \left( \frac{1}{P} - \frac{1}{P+k} \right)$$

On regarde dans la table, l'original de chaque terme et on établit le résultat

$$x(t) = \frac{1}{k} (1 - e^{-kt}).$$

### Exercice N°5

La fonction de transfert de la chaîne directe  $G(P)$  d'un système à retour unitaire est

$$G(P) = \frac{4}{1 + 0,2P}$$

- 1- Présenter le schéma fonctionnel de ce système
- 2- a - Déterminer la fonction de transfert  $F(P)$  en boucle fermée du système et donner les paramètres de ce système.
- b - Ecrire l'expression de la réponse impulsionnelle et tracer l'allure de cette réponse.

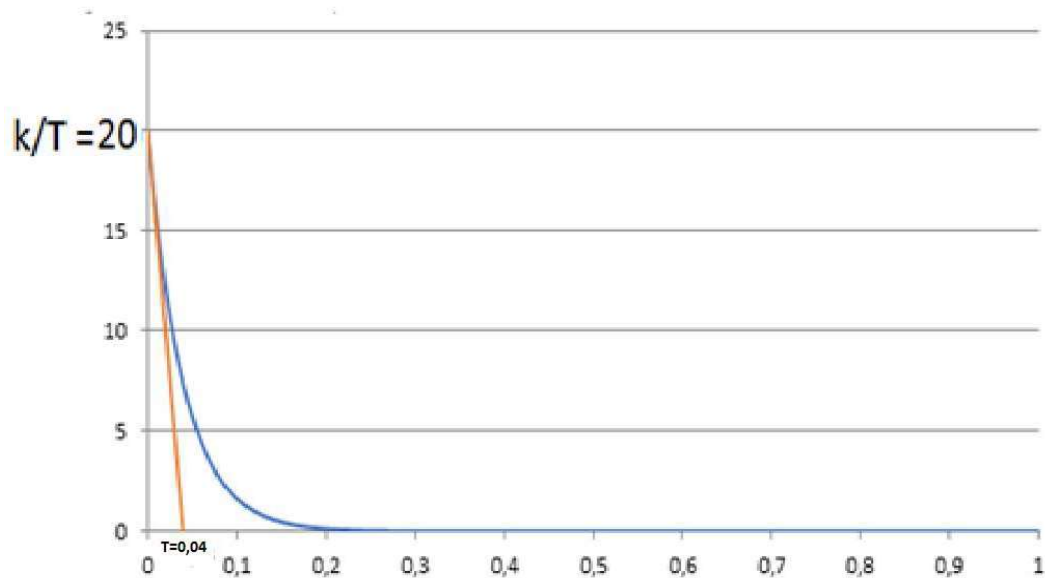
## Solution

1- La fonction de transfert en boucle ouverte est

$$T(P) = G(P) = \frac{4}{1+0,2P}$$

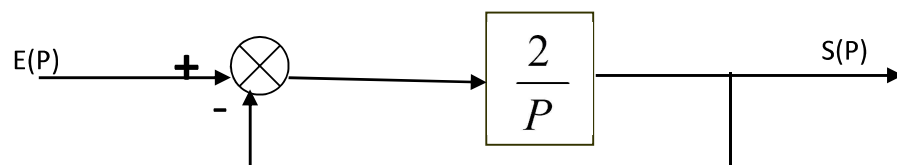
2-  $F(P) = \frac{4/5}{1+0,04P}$  La fonction de transfert en boucle fermée

système du premier ordre avec  $K = \frac{4}{5}$  et  $T = 0,04s$  La b- réponse impulsionnelle est  $s(t) = 20e^{-2t}$



### Exercice N°6

Pour la boucle d'asservissement suivante :



On applique un échelon unité

1°) Déterminer et tracer l'allure de  $S(t)$ .

2°) Quelle est la valeur de l'erreur de position  $\varepsilon_p$  ?

Solution

$$F(P) = \frac{1}{1+0,5P} \text{ système du premier ordre avec } K=1 \text{ et } T=0,5s$$

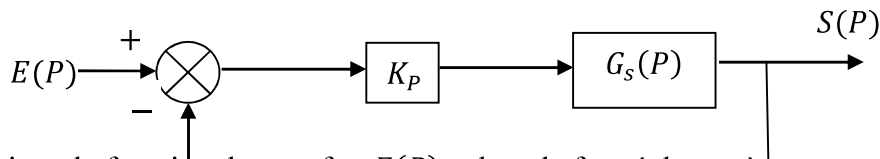
La réponse indicielle est  $s(t) = 1 - e^{-2t}$

$$L'erreur \text{ de position } \varepsilon_p = \lim_{t \rightarrow \infty} (s(t) - e(t))$$

Exercice N°7

Soit le système de régulation avec un régulateur « proportionnel » décrit la fonction de transfert constante  $G_r(P)=K_P$  et le système à régler a une fonction de transfert

$$G_s(P) = \frac{1}{P(1+4P)}$$



- 1- Déterminer la fonction de transfert  $F(P)$  en boucle fermée du système
- 2- Calculer l'amortissement  $\xi$  en fonction de  $K_P$
- 3- pour  $K_P = 1$ :
  - a- Déterminer si le comportement en boucle fermée est **apériodique** ou **oscillatoire**.
  - b- Calculer le premier dépassement s'il existe.
  - c- Déterminer le temps de réponse  $t_r$  à 5% de ce système
  - d- Ecrire l'expression de la réponse indicielle.

**Solution**

1- La fonction de transfert en boucle ouverte  $T(P) = \frac{K_P}{4P^2+P}$

La fonction de transfert en boucle fermée

$$F(P) = \frac{K_P}{4P^2 + P + K_P} = \frac{K_P}{(K_P) \left( \frac{4}{K_P} P^2 + \frac{1}{K_P} P + 1 \right)} = \frac{1}{\left( \frac{4}{K_P} P^2 + \frac{1}{K_P} P + 1 \right)}$$

2-  $K = 1$  ,  $\frac{1}{\omega_n^2} = \frac{4}{K_P}$  et  $\frac{2\xi}{\omega_n} = \frac{1}{K_P}$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_P}{4}} = \omega_n = \frac{\sqrt{K_P}}{2} \quad \text{et} \quad \xi = \frac{1}{4\sqrt{K_P}}$$

1- pour  $K_P = 1$ :

$$K = 1 \quad , \quad \omega_n = 0,5 \text{rd/s} \quad \text{et} \quad \xi = 0,25$$

$F(P) = \frac{1}{(4P^2 + P + 1)}$  alors pour vérification par identification a la fonction standard de

transfert d'un système du second ordre on  $K = 1$  ,  $\frac{1}{\omega_n^2} = 4$  et  $\frac{2\xi}{\omega_n} = 1$

$$K = 1 \quad , \quad \omega_n = 0,5 \text{rd/s} \quad \text{et} \quad \xi = 0,25$$

a) Le régime en boucle fermée est oscillatoire amortie car  $\xi = 0,25$   
( $\xi = 0.289 < 1$  Alors le comportement est oscillatoire amortie )

b) Le dépassement  $D\% = 100e^{-\left(\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)}$   $D\% = 81,12\%$

c) Temps de réponse à 5%  $tr_{5\%} = \frac{1}{\omega_n\xi} \log(20) = 10,408$

d) Réponse indicielle est :

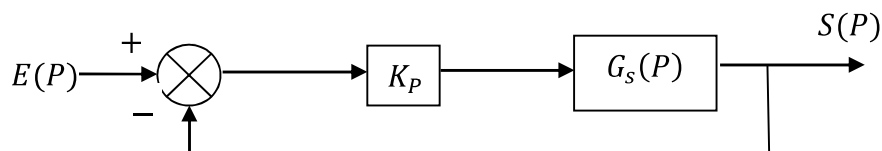
$$s(t) = K \left[ 1 - \frac{e^{-(\xi\omega_n t)}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \left( \omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \text{Arctg} \left( \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right) \right) \right]$$

$$s(t) = [1 - 1,032e^{-(0,125t)} \sin(0,484t + 0,259)]$$

### Exercice N°8

Soit le système de régulation avec un régulateur « proportionnel » décrit la fonction de transfert constante  $G_r(P) = K_P$  et le système à régler a une fonction de transfert

$$G_s(P) = \frac{1}{P(1+4P)}$$



- 1- Déterminer la fonction de transfert  $F(P)$  en boucle fermée du système
- 2- Calculer l'amortissement  $\xi$  en fonction de  $K_P$
- 3- pour  $K_P = 1$  :
  - e- Déterminer si le comportement en boucle fermée est **apériodique** ou **oscillatoire**.
  - f- Calculer le premier dépassement s'il existe.
  - g- Déterminer le temps de réponse  $t_r$  à 5% de ce système
  - h- Ecrire l'expression de la réponse indicielle.

### **Solution**

1- La fonction de transfert en boucle ouverte  $T(P) = \frac{K_P}{4P^2 + P}$

La fonction de transfert en boucle fermée

$$F(P) = \frac{K_P}{4P^2 + P + K_P} = \frac{K_P}{(K_P) \left( \frac{4}{K_P} P^2 + \frac{1}{K_P} P + 1 \right)} = \frac{1}{\left( \frac{4}{K_P} P^2 + \frac{1}{K_P} P + 1 \right)}$$

2-

$$K = 1 \quad , \quad \frac{1}{\omega_n^2} = \frac{4}{K_P} \text{ et } \frac{2\xi}{\omega_n} = \frac{1}{K_P}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_P}{4}} = \omega_n = \frac{\sqrt{K_P}}{2} \quad \text{et} \quad \xi = \frac{1}{4\sqrt{K_P}}$$

$$\xi = \frac{1}{4\sqrt{K_P}}$$

3- pour  $K_P = 1$  :

$$K = 1 \quad , \quad \omega_n = 0,5 \text{rd/s} \quad \text{et} \quad \xi = 0,25$$

$F(P) = \frac{1}{(4P^2 + P + 1)}$  alors pour vérification par identification a la fonction standard de

transfert d'un système du second ordre on  $K = 1$  ,  $\frac{1}{\omega_n^2} = 4$  et  $\frac{2\xi}{\omega_n} = 1$

$$K = 1 \quad , \quad \omega_n = 0,5 \text{rd/s} \quad \text{et} \quad \xi = 0,25$$

e) Le régime en boucle ferme est oscillatoire amortie car  $\xi = 0,25$   
( $\xi = 0,289 < 1$  Alors le comportement est oscillatoire amortie )

f) Le dépassement  $D\% = 100e^{-\left(\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)}$   $D\% = 81,12\%$

g) Temps de réponse à 5%  $tr_{5\%} = \frac{1}{\omega_n \xi} \log(20) = 10,408$

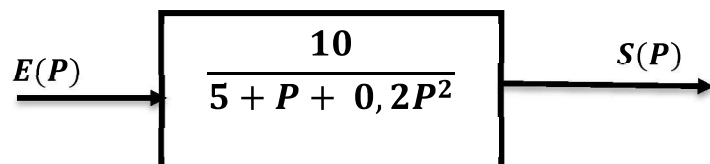
h) Réponse indicielle est :

$$s(t) = K \left[ 1 - \frac{e^{-(\xi\omega_n t)}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \left( \omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \text{Arctg} \left( \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right) \right) \right]$$

$$s(t) = [1 - 1,032e^{-(0,125t)} \sin(0,484t + 0,259)]$$

### Exercice N°9

Pour le système suivant :



- 1- Déterminer les paramètres de ce système: le gain statique, la pulsation propre et facteur d'amortissement.
- 2- Quel est le régime du système
- 3- Ecrire l'expression de la réponse impulsionnelle du système.
- 4- Calculer : a- le premier dépassement de la réponse indicielle du système  
b- le temps de réponse à

solution

la fonction de transfert  $F(P) = \frac{10}{5+P+0,2P^2}$

Ecrivons la fonction de transfert sous la forme généralisée

$$F(P) = \frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2}P^2 + \frac{2\xi}{\omega_n}P + 1}$$

tel que

$$F(P) = \frac{2}{1+0,2P+0,04P^2}$$

par identification

$$\begin{cases} K = 2 \\ \frac{2\xi}{\omega_n} = 0,2 \\ \frac{1}{\omega_n^2} = 0,04 \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} \text{gain statique : } K = 2 \\ \text{la pulsation propre } \omega_n = 5 \\ \text{le facteur d'amortissement } \xi = 0,1 \end{cases}$$

$\omega_n = 0,5$  Alors le comportement est oscillatoire amortie

Le dépassement  $D\% = 100e^{-\left(\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)}$   $D\% = 16,30\%$

b- le temps de réponse à 5% :

$$tr_{5\%} = \frac{1}{\xi\omega_n} \ln\left(\frac{100}{5}\right) \quad \text{alors} \quad tr_{5\%} = 1,198s$$

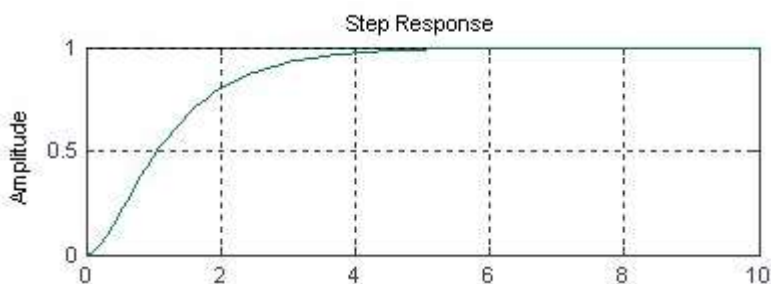
Réponse impulsionnelle est :  $s(t) = \frac{K\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-(\xi\omega_n t)} \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2} t\right)$

$$s(t) = [11,55e^{-0,25t} \sin(4,33 t)]$$

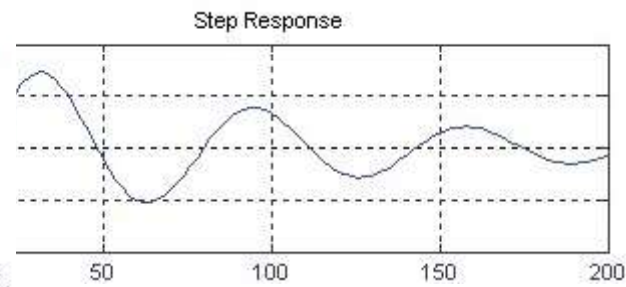
### EXERCICE N°10

On vous donne 3 fonctions de transfert. Pour chacune d'entre elle, on a tracé la réponse indicielle.

Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3



Vous devez retrouver quelle courbe correspond à un système donné.

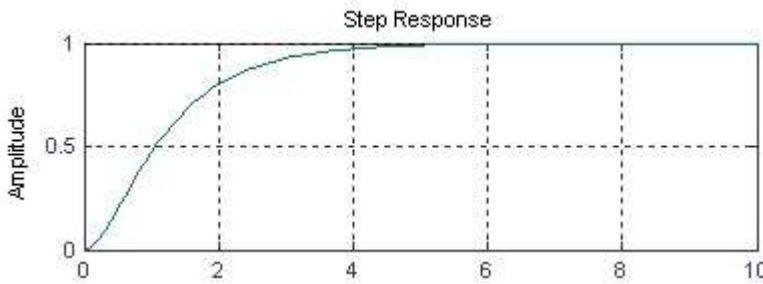
Répondre dans le tableau suivant :

|  | Courbes                 | GAIN<br>K | $\omega_n$ | $\xi$ | Nature<br>Du<br>Système | Temps<br>de<br>réponse (à 5%) |
|--|-------------------------|-----------|------------|-------|-------------------------|-------------------------------|
|  | $\frac{3}{p^2+0.4p+1}$  |           |            |       |                         |                               |
|  | $\frac{1}{100p^2+2p+1}$ |           |            |       |                         |                               |
|  | $\frac{3}{p^2+4p+3}$    |           |            |       |                         |                               |

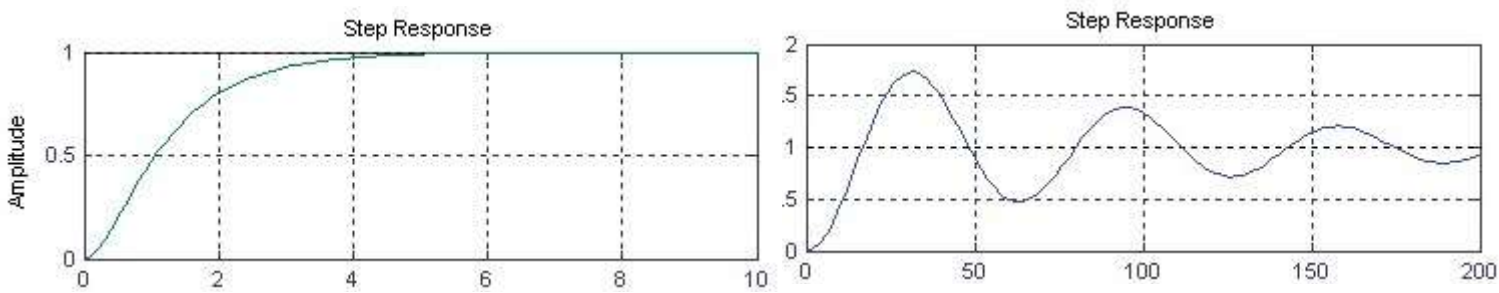
|                         | Réponses s(t) |
|-------------------------|---------------|
| $\frac{3}{p^2+0.4p+1}$  |               |
| $\frac{1}{100p^2+2p+1}$ |               |
| $\frac{3}{p^2+4p+3}$    |               |

**Solution**

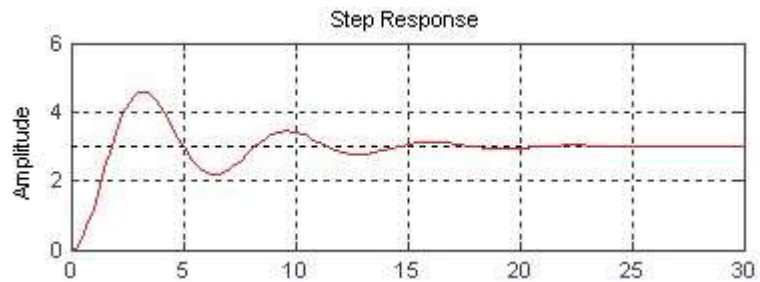
Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3



|   | Courbes | GAIN K | $\omega_n$                   | $\xi$     | Régime Du Système                    | POLES<br>P1<br>P2  |                    |
|---|---------|--------|------------------------------|-----------|--------------------------------------|--------------------|--------------------|
| $\frac{3}{P^2 + 0,4P + 1}$  | N° 3    | 3      | 1                            | 0,2       | Transitoire<br>oxillatoire<br>amorti | -<br>0,2+0,98<br>j | -0,2-<br>0,98j     |
| $\frac{1}{100P^2 + 2P + 1}$   | N° 2    | 1      | 0,1                          | 0,1       | Transitoire<br>oxillatoire<br>amorti | -<br>0,01+0,1<br>j | -<br>0,01<br>-0,1j |
| $\frac{3}{\frac{P^2 + 4P + 3}{1}}$<br>$\frac{1}{\frac{1}{3}P^2 + \frac{4}{3}P + 1}$ | N° 1    | 1      | $\frac{\sqrt{3}}{1,73}$<br>2 | 1,15<br>6 | Aperiodiqu<br>e critique             | -1                 | -3                 |

**ExerciceN°11**

Le comportement d'un système physique est donné par l'équation différentielle:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 5 \frac{dy(t)}{dt} + 6 y(t) = k.x(t)$$

où y(t) : signal de sortie et x(t): signal d'entrée. Les conditions initiales sont nulles.



a) Pour une valeur de temps  $t=2s$ , on aperçoit une réponse indicielle  $y(t)=0,2$ .

Trouver la valeur de  $k$ .

b) Quel est le régime du système.

Solution

a) la fonction de transfert est  $F(P) = \frac{k/6}{\frac{1}{6}P^2 + \frac{5}{6}P + 1}$

Après identification avec la fonction standard du second ordre on trouve :

Gain statique  $K' = K/6$

Pulsation  $\omega_n = \sqrt{6} \text{ rad/s}$

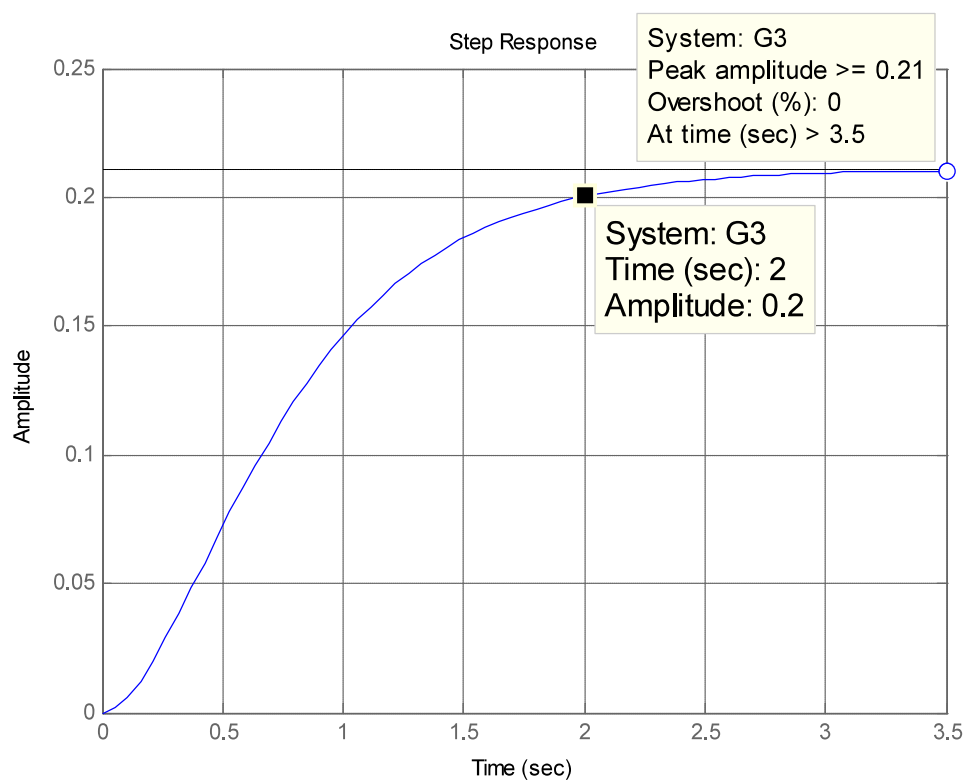
Coefficient d'amortissement  $\xi=1,02$

La réponse indicielle du 2 ordre de régime aperiodique a forme suivante

Pour  $s(2)=0,2$  on trouve  $K' = 0,21$  alors  $k=6*0,21=1,26$

b) Pour le coefficient d'amortissement  $\xi=1,02$  régime aperiodique

c) La réponse de vitesse est avec  $K' = 1,26$ ,  $\omega_n = \sqrt{6} \text{ rad/s}$  et  $\xi=1,02$



c) Ce système est soumis à l'entrée échelon de vitesse  $x(t)= t.\mu(t)$ . Trouver la réponse  $y(t)$ .

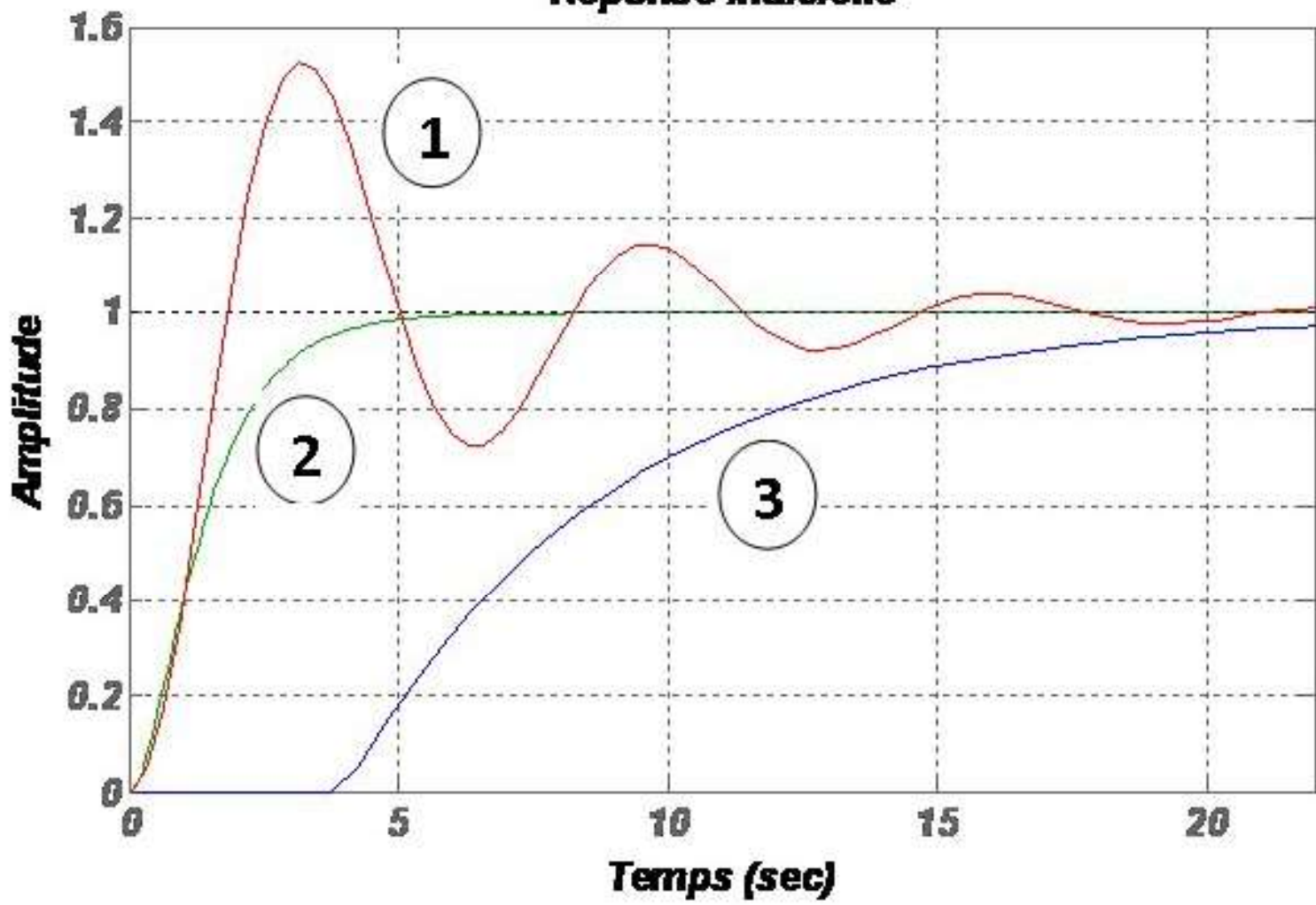
### Exercice N°12

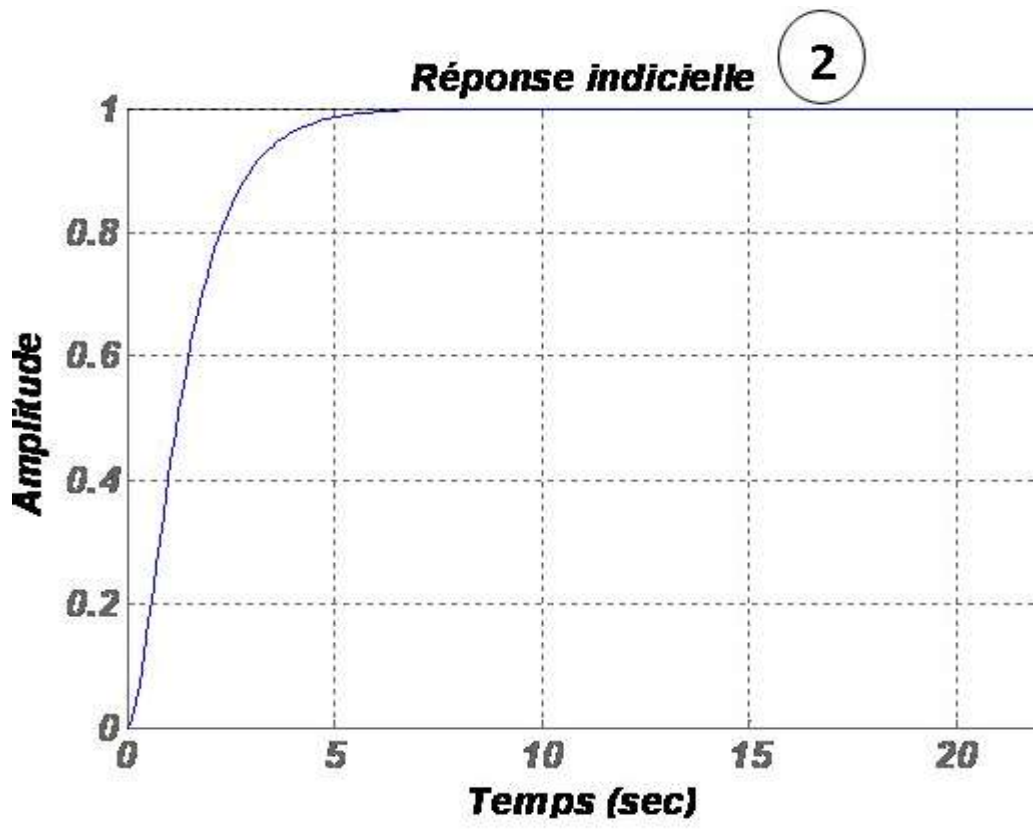
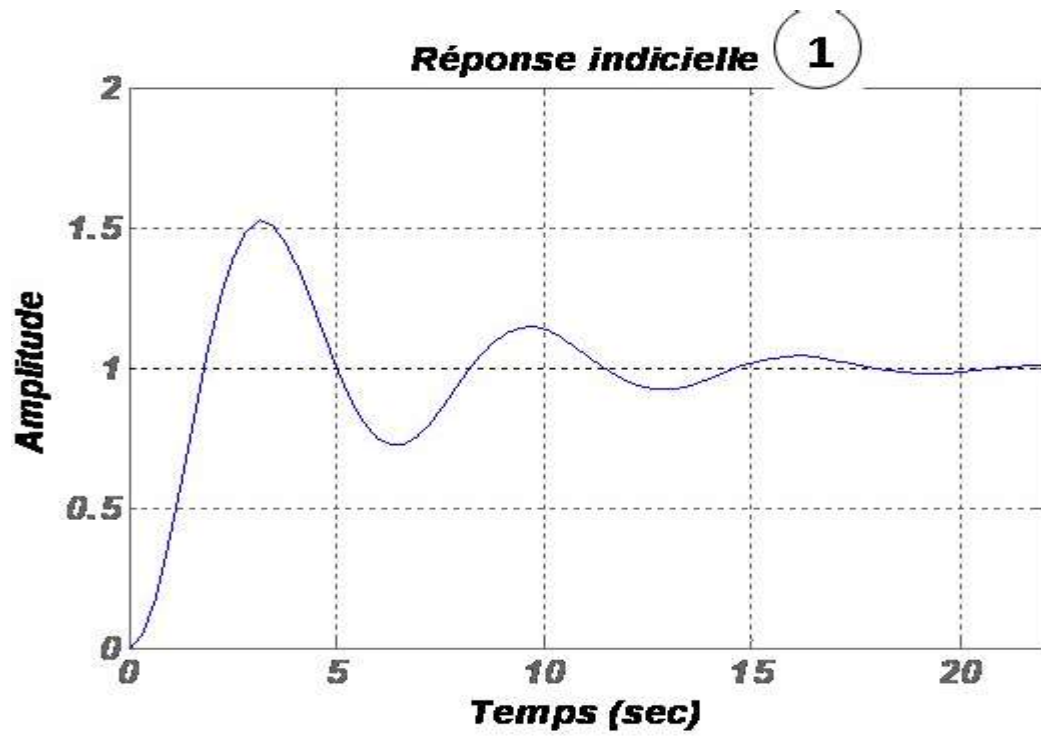
- 1) Associer l'un des 3 systèmes ( $S_1, S_2$  et  $S_3$ ) aux fonctions de transferts suivantes:

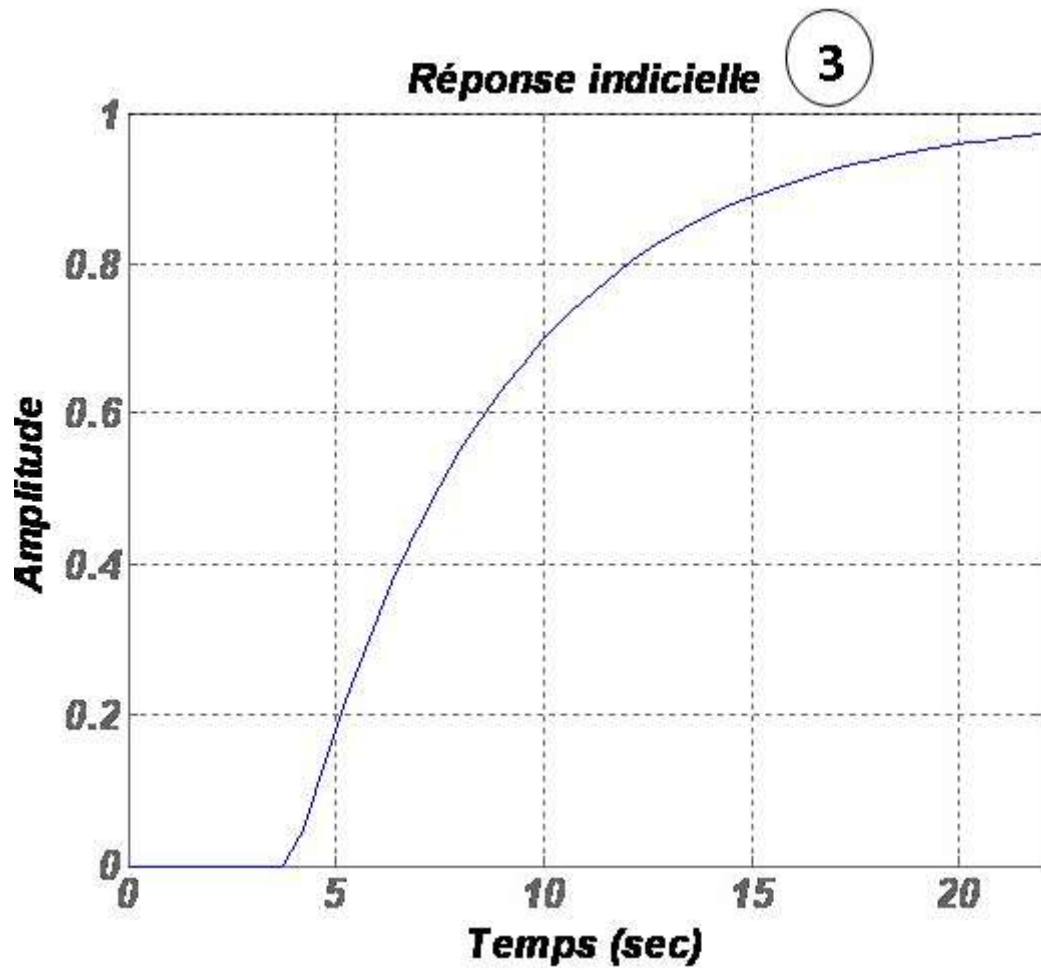
$$F(P) = \frac{e^{-4P}}{1 + 5P} \quad G(P) = \frac{2}{(P + 1)(P + 2)} \quad H(P) = \frac{1}{P^2 + 0,4P + 1}$$

- 2) Quelle est le régime de chaque système étudié?  
3) Donner les paramètres de chaque système et faire une comparaison avec celle déterminés à partir du graphe pour chaque système.  
4) Déterminer graphiquement le temps de réponse à 5% ( $t_{r,5\%}$ ) de chaque système.

### Réponse indicielle



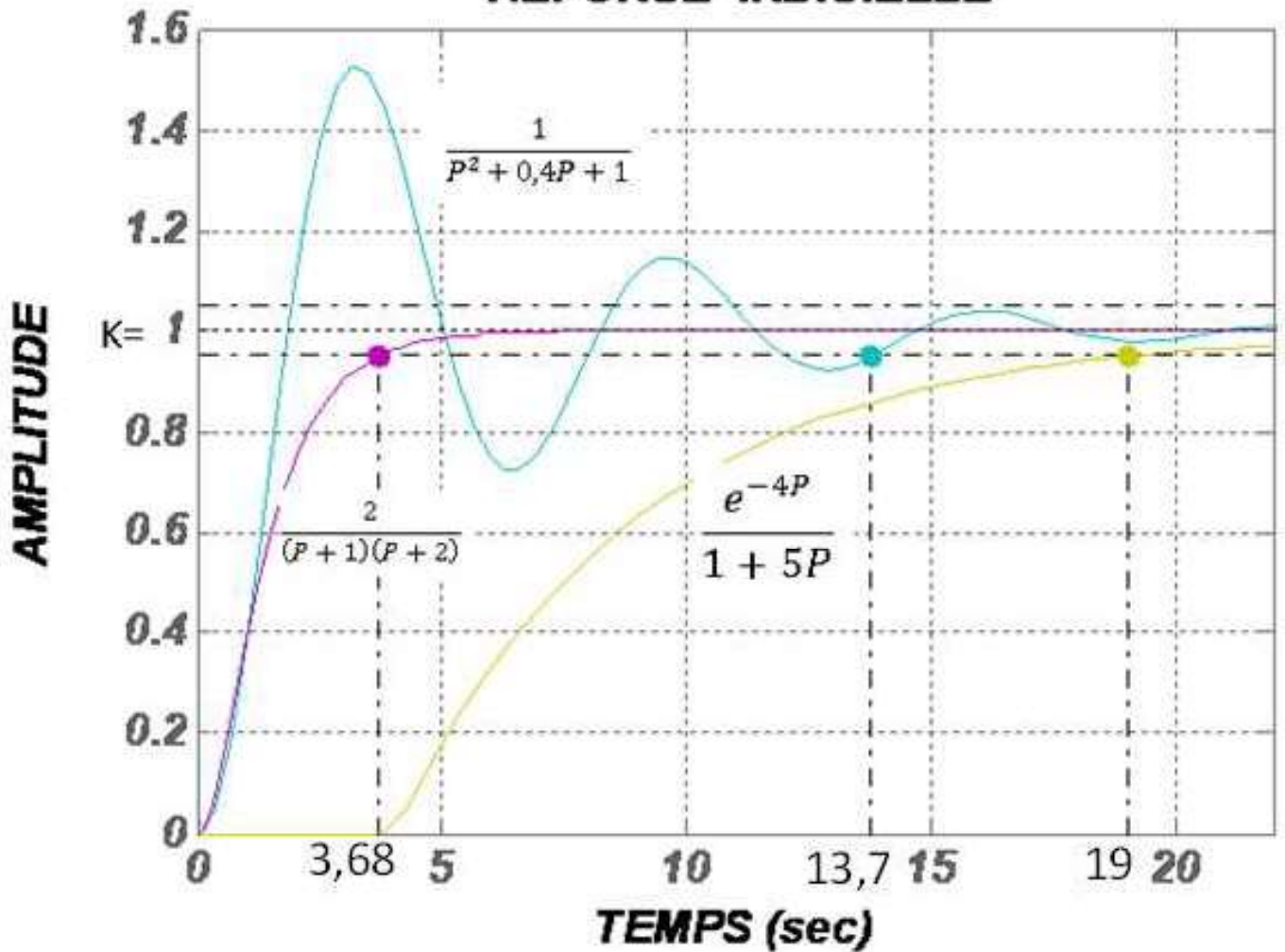




|                       | <i>Système 1</i> | <i>Système 2</i> | <i>Système 3</i> |
|-----------------------|------------------|------------------|------------------|
| Fonction de transfert |                  |                  |                  |
| Régime                |                  |                  |                  |
| Paramètres            |                  |                  |                  |
| Temps de réponse à 5% |                  |                  |                  |

Solution

## REPONSE INDICIELLE



|                       | Système 1  | Système 2  | Système 3   |
|-----------------------|--|--|---|
| Fonction de transfert | $\frac{1}{P^2 + 0,4P + 1}$   | $\frac{2}{(P + 1)(P + 2)}$<br>=<br>$\frac{1}{0,5P^2 + 1,5P + 1}$   | $\frac{e^{-4P}}{1 + 5P}$  |
| Régime                | Oscillatoire amortie   | Apériodique  | Premier ordre retardé   |
| Paramètres            | Gain statique $K=1$<br>Pulsation $\omega_n=1 \text{ rad/s}$<br>Coefficient d'amortissement $\xi=0,2$ | Gain statique $K=1$<br>Pulsation $\omega_n=\sqrt{2} \text{ rad/s}$<br>Coefficient d'amortissement $\xi=1,06$ | Gain statique $K=1$<br>Contante du temps $T=5 \text{ s}$<br>Retard $=4 \text{ s}$ |
| Temps de réponse à 5% | 13,7 s   | 3,68 s   | 15 s  |

### Exercice N°13

Pour la fonction de transfert d'un système  $\frac{1}{P^4 + P^3 + 5P^2 + 4P + 4}$

Etudier la stabilité du système et donner les pôles complexes s'ils existent.

#### **Solution**

L'équation caractéristique est :

$$P^4 + P^3 + 5P^2 + 4P + 4 = 0$$

|                       |  |
|-----------------------|--|
| La table de Routh est | La ligne 4 est nulle l le polynôme correspondant est :<br>$Z(P) = P^2 + 4$<br>$Z(P) = (p - 2j)(p + 2j)$<br>Il n'y a pas de changement de signe dans la colonne des pivots, mais il y'a deux pôles simples imaginaires purs car une ligne nulle dans la table de Routh<br>Donc le système est marginalement <b>stable</b> |
|-----------------------|--|

### Exercice N°14 :

$$F(P) = \frac{12}{(2P + k)(p + 2)(P + 3)}$$

- 1) Déterminer les condition sur k pour assurer la stabilité de ce système.
- 2) Pour k=5 , vérifier la stabilité de ce système

#### **Solution**

K doit etre positif et pour k=5 le système est stable

### Exercice N°15

Pour la fonction de transfert d'un système  $\frac{1}{P^4 + P^3 + 5P^2 + KP + 4}$

Etudier la stabilité du système et donner les pôles complexes s'ils existent.

Pour a) K= 3

b) K=6

c) K=4

Solution

$$P^4 + P^3 + 5P^2 + KP + 4 = 0$$

1 a- Pour  $K = 3$

|                       |          |   |   |  |
|-----------------------|----------|---|---|--|
| La table de Routh est |          |   |   | Les coefficients de la première colonne ont le même signe alors le système est <b>stable</b> |
| $P^4$                 | <b>1</b> | 5 | 4 |  |
| $P^3$                 | <b>1</b> | 3 | 0 |  |
| $P^2$                 | <b>2</b> | 4 | 0 |  |
| $P^1$                 | <b>1</b> | 0 | 0 |  |
| $P^0$                 | <b>4</b> | 0 | 0 |  |

b- Quant  $K = 6$ ,

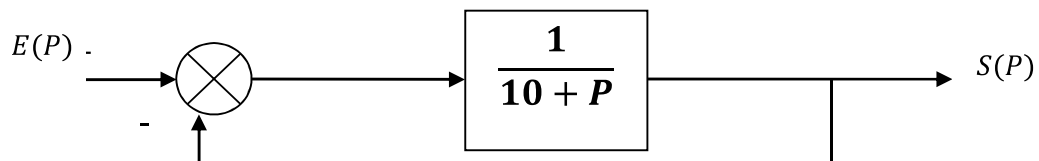
|                       |            |   |   |   |
|-----------------------|------------|---|---|---|
| La table de Routh est |            |   |   | Les coefficients de la première colonne n'ont le même signe alors le système est in stable<br>Il y a changement de signe donc il y'a <b>deux pôles</b> à partie réelles positives |
| $P^4$                 | <b>1</b>   | 5 | 4 |   |
| $P^3$                 | <b>+1</b>  | 6 | 0 |   |
| $P^2$                 | <b>-1</b>  | 4 | 0 |   |
| $P^1$                 | <b>+10</b> | 0 | 0 |   |
| $P^0$                 | <b>4</b>   | 0 | 0 |   |

c- Pour  $K = 4$

|                       |          |   |   |   |
|-----------------------|----------|---|---|---|
| La table de Routh est |          |   |   | La ligne 4 est nulle l le polynôme correspondant est :<br>$Z(P) = P^2 + 4$ alors <b><math>P_{1,2} = \pm 2j</math></b><br>$Z(P) = (p - 2j)(p + 2j)$<br>Il n'y a pas de changement de signe dans la colonne des pivots, mais il y'a deux pôles simples imaginaires purs car une ligne nulle dans la table de Routh<br>Donc le système est <b>marginalelement stable</b> |
| $P^4$                 | <b>1</b> | 5 | 4 |   |
| $P^3$                 | <b>1</b> | 4 | 0 |   |
| $P^2$                 | <b>1</b> | 4 | 0 |   |
| $P^1$                 | <b>0</b> | 0 | 0 |   |
| $P^0$                 | <b>4</b> | 0 | 0 |   |

### Exercice N°16

Soit le système à retour unitaire suivant :



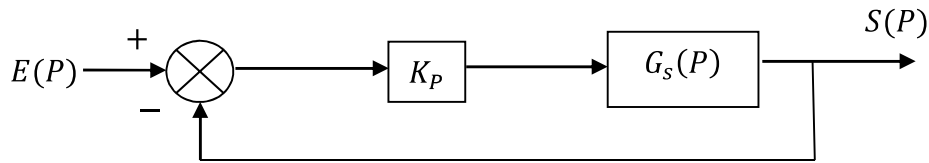
1- Donner la fonction de transfert en boucle fermée de ce système

2- Ecrire l'expression de la réponse de vitesse et tracer l'allure de la réponse



### Exercice N°17

Un système à régler a une fonction de transfert  $G_s(P) = \frac{10}{P^2+2P+2}$  et un régulateur proportionnel décrit la fonction de transfert constante  $G_r(P) = K_P$



1.- Donner la fonction de transfert  $F(P)$  en boucle fermée du système

2.- Pour  $K_P = 1$

- Calculer les paramètres du système en boucle fermée
- Déterminer si le comportement en boucle fermée est aperiodique ou oscillatoire.
- Calculer l'erreur statique lorsqu'on applique une consigne  $e=5V$ .

### Exercice N°18

Pour la réponse indicielle donnée en figure N°1

- Donner les paramètres du système et faire une comparaison avec ceux déterminés à partir du graphe.
- Déterminer par calcul et graphiquement le temps de réponse à 5% ( $t_{r5\%}$ ), le dépassement et la pseudo période du système.
- Ecrire la fonction de transfert du système

### Exercice N° 19

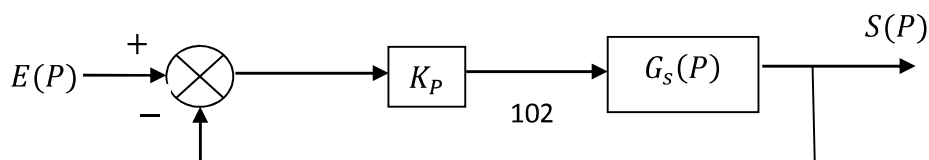
La réponse indicielle d'un système est donnée par

$s(t) = -\frac{8}{3} + 2t - \frac{1}{3}e^{-3t} + 3e^{-t}$  Déterminer la réponse impulsionnelle du même système

### Exercice N°20

Soit le système de régulation avec un régulateur « proportionnel » décrit la fonction de transfert constante  $G_r(P)=K_P$  et le système à régler a une fonction de transfert

$$G_s(P) = \frac{10}{P^2+2P+2}$$



- 1- Donner la fonction de transfert  $F(P)$  en boucle fermée du système
- 2- Calculer les pôles de  $F(P)$  pour  $K_p = 1$
- 3- Déterminer si le comportement en boucle fermée est aperiodique ou oscillatoire.
- 4- Calculer en fonction de  $K_p$  l'erreur statique  $e_\infty$  qui apparaît lorsqu'on applique une consigne de 5V ( $e=5V$ ).

### Exercice N°21

Soit un système de premier ordre de fonction de transfert  $F(P) = \frac{K}{1+\tau P}$

- 1- Quelle est la réponse impulsionnelle théorique  $s_{TH}(t)$  de ce système.
- 2- Le système étant au repos ( $s_{TH}(0) = 0$  pour  $t = 0$ ), les valeurs mesurées de la réponse impulsionnelle sont les suivantes :

|           |      |      |      |      |      |      |
|-----------|------|------|------|------|------|------|
| $t$ (s)   | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    |
| $s_{mes}$ | 1.15 | 0.53 | 0.25 | 0.11 | 0.05 | 0.02 |

- a- Tracer la courbe de la réponse impulsionnelle mesurée du système .
- b- En déduire graphiquement la valeur de  $\tau$  et  $K$ .
- c- Pour obtenir la réponse indicielle , on se propose d'intégrer la réponse impulsionnelle . justifier puis donner la réponse indicielle.

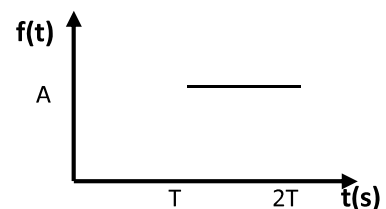
### Exercice N°22

Ecrire les fonctions de transfert  $F_1(P)$  et  $F_2(P)$

- 1)  $F_1(P)$  ayant un zéro  $z_1 = 1$  et deux pôles  $P_1 = -2$  et  $P_2 = -3$
- 2)  $F_2(P)$  ayant un gain statique vaut 5 et une constante de temps de 2s

### Exercice N°23

Trouver la transformée de  $f(t)$  :



### Exercice N°24

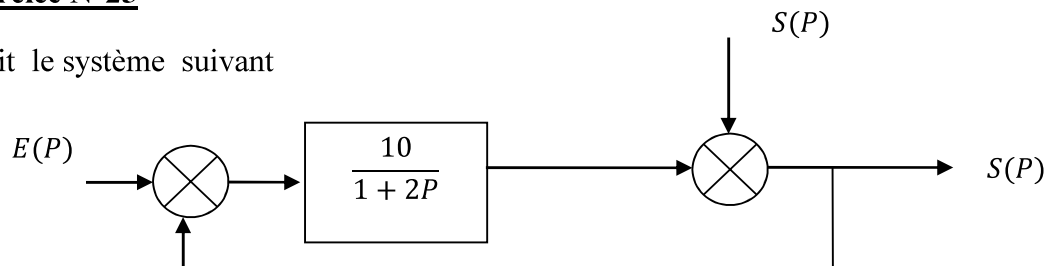
La transformée de la réponse impulsionnelle d'un système du second ordre est

$$S(P) = \frac{2}{P^2 + 2P + 1}$$

- 1) Quel est le régime de ce système ?
- 2) Donner sa réponse  $s(t)$

### Exercice N°25

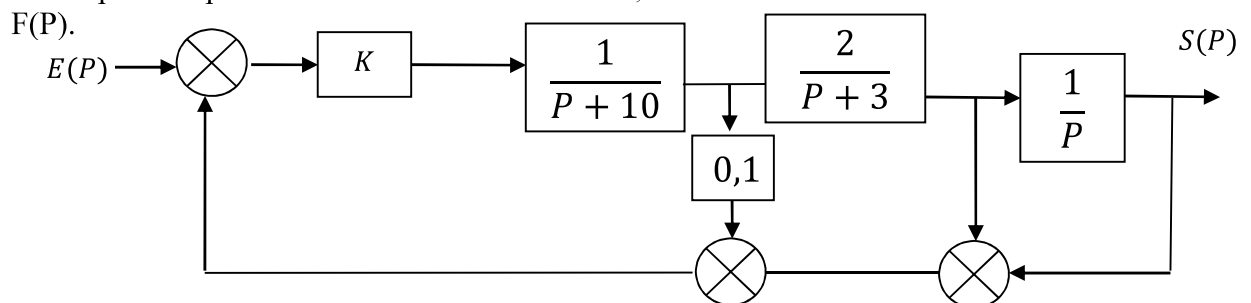
Soit le système suivant



- A) Pour  $Q(P) = 0$ 
  - 1 Calculer la fonction de transfert en boucle fermée  $S(P)/E(P)$
  - 2 Donner sa réponse indicielle et tracer l'allure.
  - 3 Quel est la valeur du temps de réponse du système
- B) Pour  $E(P) = 0$ 
  - 1 Calculer la fonction de transfert en boucle fermée  $S(P)/Q(P)$
  - 2 Donner sa réponse pour  $Q(P) = 1$

### Exercice N°26:

Après simplification du schéma fonctionnel, calculer la fonction de transfert



### Exercice N°27:

La réponse indicielle  $s_1(t)$  d'un système asservi est :  $(2 - 2e^{-t})$

Trouver la sortie  $s_2(t)$  de ce système pour une entrée  $e_2(t) = t \cdot \mu(t)$

### **Exercice N°28**

En considérant un système ayant une fonction de transfert en boucle ouverte

$$T(P) = \frac{A}{2P+3}$$

- 1- Présenter le schéma fonctionnel de ce système en boucle fermée en considérant un retour unitaire.
- 2- Pour  $A = 1$ . Quelle est la valeur du gain statique et la valeur de la constante du temps en boucle fermée.
- 3- Quelle valeur doit-on donner à  $A$  si on veut que le système en boucle fermée soit 5 fois plus rapide que pour le cas du 2° (où  $A = 1$ ). Retrouver la valeur du gain statique et la valeur de la constante du temps en boucle fermée.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUE

- [1] E. Godoy, « Régulation industrielle Collection : Technique et Ingénierie », Dunod, L'Usine Nouvelle, 2007
- [2] H. Bourles, « Systèmes linéaires de la modélisation à la commande », Lavoisier, 2006, Paris.
- [3] Stéphane LE METEIL. BTS2 CIRA. Résumé du cours sur la transformation de LAPLACE. 2005.
- [4] J.M. Flans, « La régulation industrielle », Hermès, 1994, Paris.
- [5] Benoit Marx. Centre de Recherche en Automatique de Nancy. 2010.
- [6] P. de Larminat, « Automatique commande des systèmes linéaires », Hermès, 1996, Paris.
- [7] J.J. Di Stefano, A.R. Stubberud, I.J. Williams, Systèmes asservis 1 cours et Exercices. SERIE SCHAUM 1974
- [8] Eric Ostertag, Système et asservissement continu - Modélisation, analyse, synthèse des lois de commande ; (Collection Technosup) ellipses 2005.
- [9] V. Boitier, Université Paul Sabatier Toulouse III, septembre 2005.
- [10] Michel Vilain, automatique – Tome 2 – Systèmes asservis linéaires, (Collection Techno sup) ellipses 1997.
- [11] Yves Granjon, Automatique Systèmes linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'état. Cours et exercice corrigés. Dunod, Paris, 2001, 2010.