-العزوم؛

2-مقاييس الإلتواء؛

3-مقاييس التفرطح.

رأينا في الفصل الثالث كيف أن مقاييس النزعة المركزية تعطينا نظرة عامة عن شكل توزيع مجموعة من البيانات، كما أن المدرج التكراري الذي نحصل منه على المنحنى التكراري يعتبر وسيلة للإستدلال السريع على شكل توزيع المعطيات، إذ يُمكن لتوزيع متغير إحصائي أن يكون متماثلاً أو ملتوياً إما إلى ناحية اليمين أو إلى ناحية اليسار كما يمكنه أن يكون أكثر أو أقل تفرطحاً.

للتعبير عن مختلف هذه الوضعيات و لدراسة شكل توزيع ما من إلتواء أو تفرطح نستعين إذن بمعاملات و مقاييس تزيد من دقة معرفتنا بذلك.

فبهذا يمكننا القول أن مقاييس الشكل هي تلك المقاييس التي تبين شكل التوزيع الإحصائي من إلتواء أو تفرطح مقارنة بتوزيع مرجعي[1]؛ و تعتمد هذه المقاييس على فكرة العزوم.

1-العزوم: Moments

العزوم هي مصطلح فيزيائي يُستعمل في علم الميكانيك و قد إستعمله الإحصائيون بمعنى قريب من المعنى الفيزيائي؛ و العزم يقيس تأثير القيم (أو مراكز الفئات) أو قواها موزونة بتكراراتها النسبية في الإنسحاب عن نقطة الأصل أو مركز معين، و يُرمز له بالرمز m.

تنقسم العزوم إلى قسمين: العزوم حول نقطة الأصل (الصفر) و العزوم حول العدد الثابت A.

أ-العزوم حول نقطة الأصل:

العزم k حول نقطة الأصل للبيانات $x_1, x_2, \dots, x_n$ هو: $m_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^k}{n}$

حيث $k = \{1,2, \dots\}$ و n عدد البيانات.

---

[1] التوزيع المتماثل (المتناظر) بالنسبة للإلتواء، و التوزيع الطبيعي بالنسبة للتفرطح.

أما إذا كانت البيانات $x_1, x_2, \dots, x_n$ تقابلها التكرارات $n_1, n_2, \dots, n_n$ على الترتيب، أو في حال توزيع تكراري ذي فئات، فإن العزم k حول نقطة الأصل هو: $m_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^k n_i}{\sum_{i=1}^{n} n_i}$

حيث: - $\sum_{i=1}^{n} n_i$: مجموع التكرارات و هو يساوي عدد المشاهدات.

- n_i: تكرار القيمة أو الفئة i.

- x_i: القيمة i أو مركز الفئة i في حال فئات.

- لاحظ أن العزم الأول حول نقطة الأصل، أي عندما k=1، هو المتوسط الحسابي $\overline{x}$ حيث: $m_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^1 n_i}{\sum_{i=1}^{n} n_i}$ أو $m_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^1}{n}$.

ب-العزوم حول العدد الثابت A:

إذا كان لدينا مجموعة من البيانات $x_1, x_2, \dots, x_n$ ،فإن العزم k حول العدد الحقيقي A يُعرف بالقانون: $m_k(A) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - A)^k}{n}$

حيث $k = \{1,2, \dots\}$ و تعرف بـ"رتبة العزم" و n عدد المشاهدات.

و إذا كانت تلك البيانات تتكرر بـ$n_1, n_2, \dots, n_n$مرة على الترتيب، أو في حال توزيع تكراري من فئات، فإن العزم k حول العدد A هو: $m_k(A) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - A)^k n_i}{\sum_{i=1}^{n} n_i}$

حيث: - x_i: القيمة i أو مركز الفئة i في حال فئات.

- n_i: تكرار المشاهدة x_iأو الفئة i.

- $\sum_{i=1}^{n} n_i$: مجموع التكرارات و هو يساوي عدد المشاهدات.

جـ-العزوم حول المتوسط الحسابي $\overline{x}$:

في العنوان السابق إذا كان $A = \overline{x}$ فنقول أن العزم هنا هو حول المتوسط الحسابي، و يكفي أن نستبدل A بـ $\overline{x}$ في القانونين السابقين ليصبح العزم k حول المتوسط الحسابي معرّف على الشكل:

$m_k(\overline{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^k}{n}$ أو $m_k(\overline{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^k n_i}{\sum_{i=1}^{n} n_i}$في حال وجود تكرارات أو فئات.

- لاحظ أن العزم الأول حول المتوسط، أي لما k=1،يساوي الصفر $m_1(\overline{x}) = 0$ لأن: $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}) = 0$.

- لاحظ كذلك أن العزم الثاني حول المتوسط، أي لما k=2 ، ما هو إلاّ التباين:

$$m_2(\overline{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n} = V(x)$$

2-مقاييس الإلتواء:

إن مقاييس الإلتواء تُستعمل لمعرفة شكل التوزيع الإحصائي و نوعية إلتواءه من خلال قياس إنحراف التوزيعات التكرارية عن التماثل (التناظر) أين يمكن التمييز بين ثلاثة أصناف من هذه التوزيعات:

-التوزيعات المتماثلة أو المتناظرة (غير ملتوية)؛

-التوزيعات الملتوية (مائلة) إلى ناحية اليمين (أو نقول ذات إلتواء موجب)؛

-التوزيعات الملتوية (مائلة) إلى ناحية اليسار (أو نقول ذات إلتواء سالب).

من أهم مقاييس الإلتواء ما يلي:

- **معامل الإلتواء الأول لـ"بيرسون"**، نرمز له بالرمز γ_{P1} و صيغته هي: $\gamma_{P1} = \frac{\overline{x}-Mo}{\sigma}$

حيث: -$\overline{x}$: المتوسط الحسابي؛
-Mo : المنوال؛
-σ : الإنحراف المعياري.

إذا كانت إشارة هذا المعامل موجبة فإن ذلك يشير إلى أن التوزيع ملتوي بإتجاه اليمين (إلتواء موجب)، و إن كانت سالبة فذاك يعني أن التوزيع ملتوي إلى اليسار (إلتواء سالب)؛ أما إن كان المعامل مساوياً للصفر فنستنتج أن التوزيع متناظر.

و واضح من خلال صيغة هذا المعامل أن الذي يحدد إشارته هو البسط طالما أن الإنحراف المعياري في المقام هو دوماً موجب،فإذا كان المتوسط الحسابي أكبر من المنوال ($\overline{x} > Mo$) فإن الإشارة سوف تكون موجبة و الإلتواء موجب (مائل إلى اليمين)؛ و إذا حصل العكس ($\overline{x} < Mo$) فستكون الإشارة سالبة و بالتالي إلتواء إلى جهة اليسار (إلتواء سالب). و إذا تساوى المتوسط مع المنوال فإن هذا المعامل سوف يساوي الصفر و يكون التوزيع متناظر.

- **معامل الإلتواء الثاني لـ"بيرسون"**، نرمز له بـγ_2

أحياناً قد يتعذر حساب معامل "بيرسون" الأول في حال البيانات التي ليس لها منوال مثلاً أو عند وجود أكثر من منوال؛ لذلك يتم توظيف صيغة العلاقة التقريبية التي رأيناها سابقاً بين مقاييس النزعة المركزية و التي تقول أن: $\overline{x} - Mo = 3(\overline{x} - Me)$.

بناءاً على ذلك فإن صيغة المعامل الثاني لبيرسون هي: $\gamma_{P2} = \frac{3(\overline{x}-Me)}{\sigma}$

حيث: -$\overline{x}$: المتوسط الحسابي؛
-Me : الوسيط؛
-σ : الإنحراف المعياري.

هنا كذلك نفس الإستنتاجات نستخلصها كما في المعامل الأول، فإذا كان $\gamma_{P2} > 0$ كان الإلتواء موجباً، و إذا كان $\gamma_{P2} < 0$ قلنا عن التوزيع أنه سالب الإلتواء، و في حال كان معدوماً $\gamma_{P2} = 0$ تناظر التوزيع.

- **معامل الإلتواء الربيعي**، و الذي يرمز له بـ γ_Q و صيغته هي:[1]

$$\gamma_Q = \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{(Q_3 - Q_1)} = \frac{Q_3 - 2Q_2 + Q_1}{Q_3 - Q_1}$$

حيث: Q_i avec $i = 1,2,3$ هي الربيعات الأول و الثاني و الثالث على التوالي.

[1] هذا المعامل هو لـ"Yull&Kindall" و نستعمل الربيعات لأن المسافتين بين الأقواس متساوية في حال توزيع متناظر.

إذا كان هذا المعامل موجب إستنتجنا أن التوزيع مائل بإتجاه اليمين، و إن كان سالب يكون التوزيع مائل إلى ناحية اليسار، أما إذا كان مساوياً للصفر فإن التوزيع يكون متناظراً.

➢ **معامل "فيشر" للإلتواء:**

هو مقياس يعتمد على العزوم حول المتوسط الحسابي لهذا يُعرف أحياناً بمعامل الإلتواء العزومي لفيشر، و هو عبارة عن النسبة بين العزم الثالث حول المتوسط الحسابي و مكعب الإنحراف المعياري:

$$\gamma_F = \frac{m_3}{\sigma^3}$$

حيث: -m_3 : العزم الثالث حول المتوسط الحسابي؛[1]

-σ : الإنحراف المعياري.

و إذا كان: - إلتواء موجب ← $\gamma_F > 0$

-توزيع متناظر ← $\gamma_F = 0$

-إلتواء سالب ← $\gamma_F < 0$

➢ **معامل الإلتواء العزومي لبيرسون:**

هناك معامل آخر لبيرسون يعتمد على العزوم هو كذلك و ذو علاقة بمعامل فيشر السابق. صيغته هي: $\gamma_{P3} = \frac{{m_3}^2}{{m_2}^3}$ حيث m_2 و m_3 هما العزم الثاني[2] و الثالث حول المتوسط الحسابي على الترتيب؛ أما نوع الإلتواء فيعتمد على إشارة العزم الثالث حول المتوسط (إشارة m_3)، فإذا كان:

-m_3>0: فإن المنحنى يكون ملتوياً ناحية اليمين.

-m_3<0: فإن المنحنى يكون ملتوياً ناحية اليسار.

-m_3 = 0: فإن المنحنى يكون متماثلاً.

3-مقاييس التفرطح:

هي مقاييس تقيس مدى إرتفاع أو إنخفاض أي منحنى توزيع تكراري بالنسبة للتوزيع الطبيعي؛ إذ أنها تستعمل لتحديد تطاول (تدبدب) أو تفرطح التوزيعات مقارنة مع التوزيع الطبيعي.

و العزم الذي يستخدم في قياس درجة تفرطح أو تطاول توزيع ما هو العزم الرابع حول المتوسط الحسابي $m_4(\overline{x})$.

➢ **معامل التفرطح الأول:**

يرمز له بـ β_1 و يعرف بالمعادلة التالية: $\beta_1 = \frac{m_4}{\sigma^4_{(x)}}$

و يكون الحكم على تفرطح التوزيع كالتالي:

-إذا كان β_1>3: فإن التوزيع يكون متطاول؛

[1] نعتمد على هذا العزم لأن قيمته تساوي الصفر في حال توزيع متناظر.

[2] تذكر أن العزم الثاني حول المتوسط الحسابي هو التباين، و بالتالي يمكن كتابة صيغة المعامل على النحو: $\gamma_{P3} = \frac{{m_3}^2}{{V_{(x)}}^3}$

-إذا كان $\beta_1 3$ =: فإن التوزيع يكون معتدل التفرطح يأخذ شكل الجرس(توزيع طبيعي)؛

-إذا كان $\beta_1 3$<: فإن التوزيع يكون مفرطح.

- **معامل التفرطح الثاني:**

نرمز له بـ β_2 و يعرف كالتالي: $\beta_2 = \beta_1 - 3 = \frac{m_4}{\sigma^4_{(x)}} - 3$

لاحظ أن هذا المعامل يعتمد على المعامل الأول مطروحاً منه القيمة 3 و بالتالي فإن قيمة المقارنة سوف تصبح "الصفر" بدل 3 حيث:

-إذا كان $\beta_2 0$>: يكون التوزيع متطاول؛

-إذا كان $\beta_2 0$ =: يكون التوزيع معتدل ؛

-إذا كان $\beta_2 0$<: يكون التوزيع مفرطح.