بغرض فهم مغزى المتغير العشوائي دعنا ننطلق من هذا المثال التمهيدي.

مثال 23:

عندما نرمي زهرة نرد متوازنة ثلاثة مرات متتالية فإن نعلم أن عدد الحالات الممكنة هو "ثمانية" كما يوضحه فضاء العينة. لو نهتم الآن بـ"عدد مرات الحصول على Pile" من خلال هذه التجربة و هو الاهتمام الذي نرمز له بـX لأمكننا معرفة و تلخيص القيم التي يُمكن أن يأخذها X المعبر عن العدد محل إهتمامنا في الجدول التالي:

$\Omega =$	(F,F,F)	(P,F,F)	(F,P,F)	(F,F,P)	(P,P,F)	(P,F,P)	(F,P,P)	(P,P,P)
X: "عدد مرات Pile"	0	1	1	1	2	2	2	3

إذن لاحظ أن X يُمكن أن يأخذ القيم {0، 1، 2، 3} و هذه المجموعة قيمها متغيرة من 0 إلى 3 فقد تكون 0 أو 1 أو....، و بالتالي فإن X يُعتبر "متغيراً" كما أن هذه القيم التي يُمكن أن يأخذها هذا المتغير مبنية على الصدفة و العشوائية طالما أن التجربة هي أصلاً عشوائية فنحن نعلم القيم الممكنة لـ X لكن لا نعلم بالضبط أي قيمة سوف يأخذها فإحتمال ذلك يعود إلى عدد الحالات الملائمة لكل قيمة من جملة الحالات الممكنة كما سنرى لاحقاً. و بناءاً على ذلك فإننا نقول أن X **متغيراً عشوائياً** يُمكن أن يأخذ إحدى القيم المذكورة. أي: $X = \{0, 1, 2, 3\}$

1- تعريف:

المتغير العشوائي هو كلّ تطبيق على فضاء العينة، بمعنى أنّه الدالة مجال تعريفها فضاء، الهينة Ω ومداها مجموعة الأعداد الحقيقية، كلمة متغير تعني أنّه يأخذ قيما مختلفة وكلمة عشوائي تعني أن هذه القيم التي يمكن أن يأخذها مبنية على الصدفة والعشوائية. نرمز إلى المتغير العشوائي بالرّمز ونكتب: $X: \Omega \to R$

مثال1:

نرمي قطعة نقدية ثلاثة مرات متتالية ونهتمّ بعدد مرات الحصول على Pile

Ω | X

(F.F.F) → 0

(F.P.F) → 1

(P.F.F) → 1

x "عدد مرات الحصول على P"

$X : \Omega \to R$

X = {0,1,2,3}.

$(F.F.P) \rightarrow 1$

$(F.P.P) \rightarrow 2$

$(P.F.P) \rightarrow 2$

$(P.P.F) \rightarrow 2$

$(P.P.P) \rightarrow 3$

هناك نوعان من المتغيرات العشوائية، **متغيرات عشوائية متقطعة ومتغيرات عشوائية مستمرة** وذلك بحسب فضاء العينة الذي يعرّف عليه هذا المتغيّر، فإذا كان فضاء العيّنة منفصلا أي قابل للعدّ قلنا أن المتغير العشوائي متقطع وإذا كان فضاء العينة متصلا أي غير قابل للعدّ قلنا أن المتغير العشوائي مستمر.

2- المتغيرات العشوائية المتقطعة:

أ- تعريف: هي المتغيرات التي تأخذ قيمًا منفصلة عن بعضها البعض باحتمالات معينة.

ب- التوزيع الاحتمالي: هو جدول أو قانون أو دالة تبين العلاقة بين قيم المتغير العشوائيX واحتمالات المقابلة لتلك القيم.

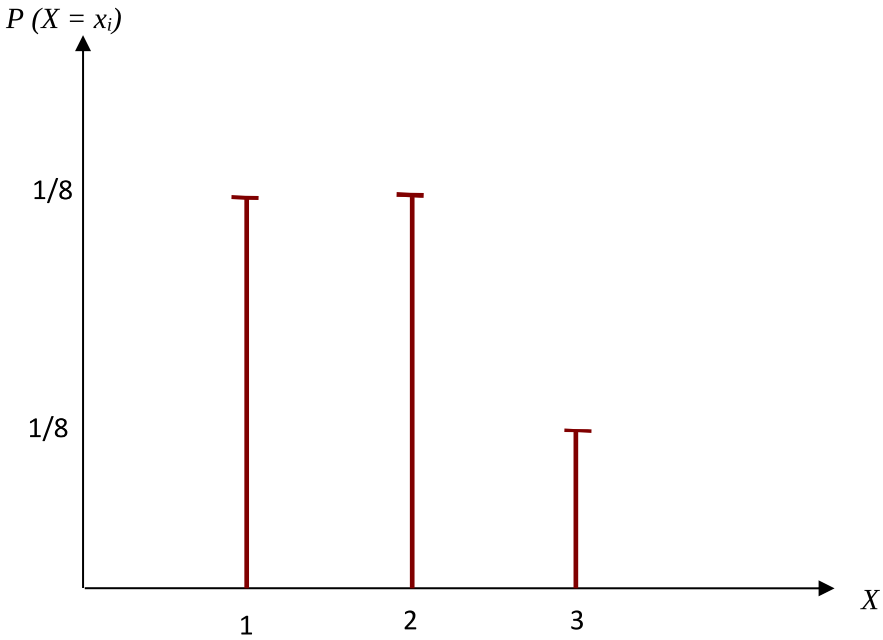
مثال: جدول التوزيع الاحتمالي للمثال السابق هو:

$X = x_i$	0	1	2	3	$\sum$
$P(X = x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8	1

$$P\,(X = 0) = P\,\{(F.F.F)\} = {}^{1}/_{8}$$
$$P\,(X = 1) = P\,\{(P.F.F), (F.P.F), (F.F.P)\} = {}^{3}/_{8}$$
$$P\,(X = 2) = P\,\{(P.P.F), (F.P.P), (P.F.P)\} = {}^{3}/_{8}$$
$$P\,(X = 3) = P\,\{(P.P.P)\} = {}^{1}/_{8}$$
$$\boxed{0 \leq P(X = x_i) \leq 1}$$

$$\boxed{\sum P(X = x_i) = 1}$$

التمثيل البياني:



ج- دالة التوزيع المتجمّع: **F(X)**

نعرّف دالة التوزيع المتجمّع الدالة F المعرّفة على مجموعة الأعداد الحقيقية R نحو المجال [1- 0]

أي

$$F: R \rightarrow [0 - 1]$$
$$x: F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} P(X = x)$$

مثال: دالة التوزيع المتجمّع للمثال السابق تأخذ الشكل التالي:

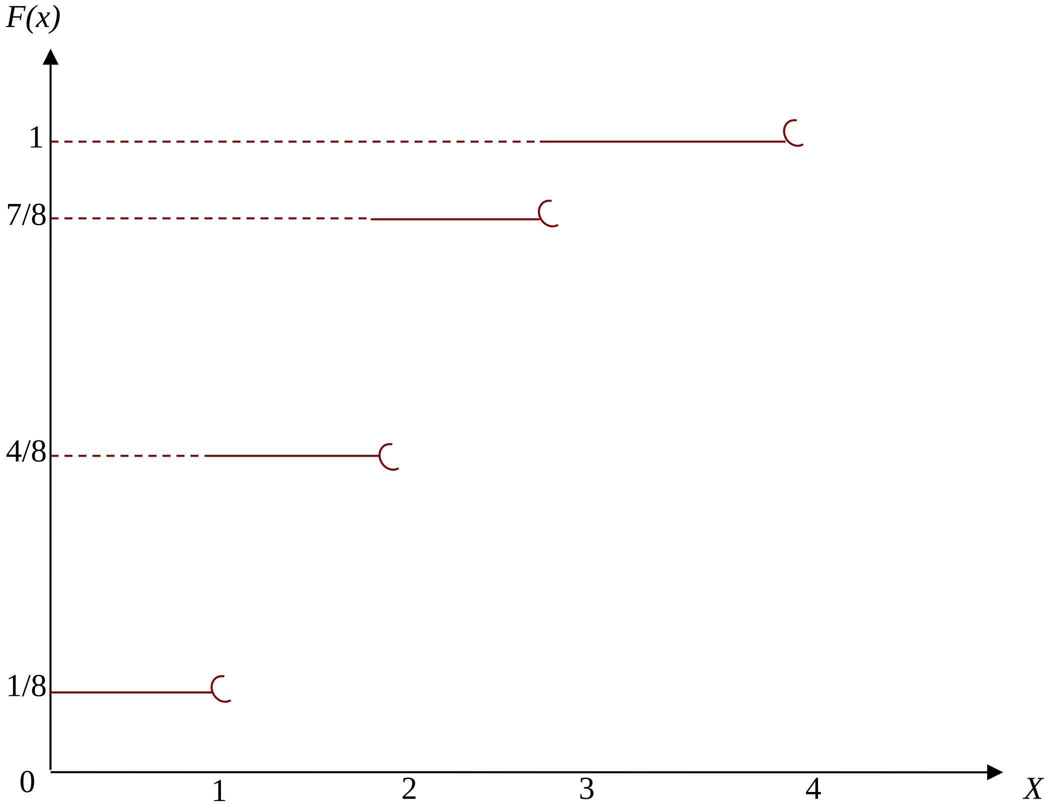
$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ {}^{1}/_{8} & 0 \le x < 1 \\ {}^{4}/_{8} & 1 \le x < 2 \\ {}^{7}/_{8} & 2 \le x < 3 \\ {}^{8}/_{8} = 1 & x \ge 3 \end{cases}$$

$$F(0) = P(X = 0) = 1/8$$

$$F(1) = P(X \le 1) = F(1)$$
$$= P(X = 0) + P(X = 1)$$

$$F(2) = P(X \le 2) =$$
$$= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$F(3) = P(X \le 3) = 1$$



خصائص دالة التوزيع المتجمّع:

$$\forall x \in R : 0 \le F(x) \le 1$$
$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$
$$F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$
$$x \le y : F(x) \le F(y)$$

د- حساب الاحتمالات:

نعتبر X و b , a عددان حقيقيان لدينا:

$$P(a < X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a)$$
$$= F(b) - F(a).$$

$$P(a \le X \le b) = P(X \le b) - P(X < a)$$
$$= F(b) - P(X < a).$$
$$P(a < X < b) = P(X < b) - P(X \le a)$$
$$= P(X < b) - F(a).$$
$$P(a \le X < b) = P(X < b) - P(X < a)$$

مثال:

بالرجوع إلى المثال السابق لدينا الاحتمالات التالية:

$$P(X \le 2) = F(2) = {}^{7}/_{8}$$
$$P(X < 2) = P(X \le 1) = F(1) = \boxed{\frac{4}{8}}$$
$$P(X \ge 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \le 1)$$
$$= 1 - F(1)$$
$$= 1 - {}^{4}/_{8} = \boxed{\frac{4}{8}}$$
$$P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - F(2) = 1 - \frac{7}{8}$$
$$= \boxed{\frac{1}{8}}$$

$$P(1 < X < 3) = P(X < 3) - P(X \le 1)$$
$$= P(X \le 2) - P(X \le 1)$$
$$= F(2) - F(1)$$
$$= \frac{7}{8} - \frac{4}{8} = \boxed{\frac{3}{8}}$$
$$P(1 \le X < 3) = P(X < 3) - P(X < 1)$$
$$= F(2) - F(0)$$
$$= \frac{7}{8} - \frac{1}{8} = \frac{6}{8}$$
$$P(1 \le X \le 3) = ?$$
$$P(1 < X \le 3) = ?$$
$$P(1 \le X \le 3) = P(X \le 3) - P(X < 1)$$
$$= F(3) - P(X \le 0)$$
$$= F(3) - F(0)$$
$$= 1 - \frac{1}{8}$$
$$= \boxed{\frac{7}{8}}$$

$$P(1 < X \le 3) = P(X \le 3) - P(X \le 1)$$
$$= F(3) - F(1)$$
$$= 1 - \frac{4}{8}$$
$$= \boxed{\frac{4}{8}}$$

3- المتغيرات العشوائية المستمرة:

نقول عن المتغير العشوائي X أنّه مستمر إذا كان بإمكانه أن يأخذ أي قيمة داخل مجال معيّن.

ونعرّف دالة التوزيع المتجمّع لهذا المتغير المستمرّ الدالة F المعرفة على R نحو المجال [0-1] أي:

$$F: R \to [0-1]$$
$$x \to F(x) = P(X \leq x)$$

أ- دالة كثافة الاحتمال $f(x)$:

إذا كانت دالة التوزيع المتجمّع F قابلة للاشتقاق نقول أن المتغير العشوائي X مستمر تماما ومشتقة دالة التوزيع المتجمّع تُعرف بدالة كثافة الاحتمال أي:

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

وتأخذ دالة التوزيع المتجمّع الشكل التالي:

$$\boxed{F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt}$$

ب- خصائص دالة كثافة الاحتمال:

$$\forall x \in R : f(x) \geq 0$$

إذا كان x معرف $[x_1 - x_2]$ فإنّ : $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx = 1$

ج- حساب الاحتمالات:

نعتبر a وb عددان حقيقيان حيث $b > a$ فإنّ:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

مثال2: مدّة صلاحية فرع معين من المصابيح بالأيام متغير عشوائي كثافة احتماله.

$$f(x) = e^{-2kx} \qquad x \geq 0 \qquad k \text{ ثابت}$$

1) عين قيمة الثابت k؟

2) أحسب احتمال أن لا تفوق مدّة اشتغال مصباح من النوع السابق 20 يوماً؟

3) إذا علمت أن مصباح من النوع السابق قد فاتت مدّة اشتغاله 15 يوماً. فما احتمال أن لا تفوق 30 يوماً؟

4) أحسب احتمال أن لا تفوق مدّة اشتغال 3 مصابيح من النوع السابق 20 يوم.

$$f(x) = e^{-2kx} \qquad x \geq 0$$

X: "مدّة اشتغال المصابيح بالأيّام"

1) k = ?

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = 1 \iff \int_0^{+\infty} e^{-2kx}\, dx = 1$$

$$\iff \frac{-1}{2k}\int_0^{+\infty} -2ke^{-2kx}\ dx = 1$$

$$\iff \frac{-1}{2k}[e^{-2kx}]_0^{+\infty} = 1$$

$$\iff \frac{-1}{2k}(0-1) = 1$$

$$\iff \frac{1}{2k} = 1 \iff 2k = 1$$

$$\boxed{k = \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{f(x) = e^{-x}} \qquad x \geq 0$$

2) $P(X \leq 20)\ = ?$

$$P(X \leq 20) = \int_0^{20} f(x)\ dx$$
$$= \int_0^{20} e^{-x}\ dx$$
$$= -\int_0^{20} -e^{-x}\ dx = -[e^{-x}]_2^{20}$$
$$= -(e^{-20} - e^0)$$

$$\boxed{P(X \leq 20) = 1 - e^{-20}}$$

3) $P(\underset{B}{X \leq 30} \,/\, \underset{A}{X \geq 15})\ = ?$

$$P(B\ /\ A) = P(X \leq 30\ /\ X \geq 15) = \frac{P\ (B \cap A)}{P(A)}$$

$$= \frac{P\,(15 \le X \le 30)}{P(X \ge 15)}$$

$$P(15 \le X \le 30) = \int_{15}^{30} f(x)\,dx = \int_{15}^{30} e^{-x}\,dx$$
$$= -[+e^{-x}]_{15}^{30}$$
$$= -(e^{-30} - e^{-15})$$

$$\boxed{P(15 \le X \le 30) = e^{-15} - e^{-30}}$$

$$P(X \ge 15) = \int_{15}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{15}^{+\infty} e^{-x}\,dx$$
$$= -[e^{-x}]_{15}^{+\infty}$$
$$= -(0 - e^{-15})$$

$$\boxed{P(X \ge 15) = e^{-15}}$$

$$\boxed{P(B / A) = P(X \le 30 / X \ge 15) = \frac{e^{-15} - e^{-30}}{e^{-15}}}$$

4) $P(X \le 20) = 1 - e^{-20}$

A': مدّة اشتغال (3 مصابيح) لا تفوق 20 يوماً"

A'_1: مدّة اشتغال المصباح (1) لا يفوق 20 يوم"

A'_2: مدّة اشتغال المصباح (2) لا يفوق 20 يوم"

A'_3: مدّة اشتغال المصباح (3) لا يفوق 20 يوما"

$$P(A') = P(A'_1 \cap A'_2 \cap A'_3) = P(A'_1).P(A'_2).P(A'_3)$$

$$\boxed{P(A') = [1 - e^{-20}]^3}$$

4) القيم الخاصة بالمتغيرات العشوائية:

أ- التوقع (الأصل) الرياضي:

هو يعبر عن القيمة النموذجية التي تتمركز حولها قيم المتغير

حالة متغير عشوائي متقطع:

نفرض أن X متغير عشوائي متقطع توزيعه الاحتمالي كالتالي:

$X = x_i$	x_1	x_2	.....	x_n	$\sum$

$P(X = x_i)$	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	……..	$P(X = x_n)$	1

التوقع الرياضي لهذا المتغير يعرف بالعلاقة التالية:

$$E(X) = x_1\,P(X = x_1) + \ x_2 P(X - x_2) \ + \cdots .. + x_n P(X - x_n)$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, P(X = x_i)$$

مثال1: ليكن X متغيرا عشوائيا توزيعه الاحتمالي كالآتي:

$X = x_i$	1	2	3	4	5	6	$\sum$
$P(X = x_i)$	0,04	0,06	0,25	0,35	0,19	0,11	1

$$E(X) = 1(0{,}04) + \ 2(0{,}6) + \cdots + 6(0{,}11)$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, P(X = x_i)$$

$$E(X) = \ 3{,}92 = 1$$

حالة متغير عشوائي مستمر:

إذا كان X متغير عشوائي مستمرا دالة كثافة احتماله $f(x)$ فإنّ توقعه الرياضي يعرّف ب

$$E(X) = \ \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$

مثال2:

ليكن X متغيرا عشوائيا مستمرا دالة كثافة احتماله هي

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & 0 \le x \le 2 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

$$E(X) = \ \int_0^2 x\, f(x)\, dx$$

$$E(X) = \ \int_0^2 x\ \left(\frac{1}{2}x\right) dx$$

$$E(X) = \ \frac{1}{2}\int_0^2 x^2\ \ dx$$

$$E(X) = \ \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \ \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3} - 0\right) = \frac{8}{6}$$

$$E(X) = \frac{4}{3}$$

خصائص التوقع الرياضي: $E(X) = \sum x_i \, P(X = x_i)$

1) إذا كان a و b عددان ثابتان فإنّ:

$$E(aX \pm b) = a\,E(X) \pm b$$
$$\begin{aligned} E(aX \pm b) &= \sum [ax_i \pm b)\, P(X = x_i)] \\ &= \sum [ax_i P\,(X = x_i) \pm b\, P(X = x_i)] \\ &= \sum ax_i P\,(X = x_i) \pm \sum bP\,(X = x_i) \\ &= a \sum x_i P\,(X = x_i) \pm b \sum P\,(X = x_i) \\ &= a\,E(X) + b \end{aligned}$$

* si $a = 0 \Rightarrow E(b) = b$
* si $b = 0 \Rightarrow E(aX) = a\,E(X)$

2) إذا كان X و Y متغيران عشوائيان فإنّ:

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

3) إذا كان X و Y مستقلان فإنّ:

$$E(X\,Y) = E(X) - E(Y)$$

ب- التباين: *V(X)*

هو متوسط (التوقع) مربّع انحرافات قيم المتغير العشوائي عن قيمتها المتوسطة (القيمة المتوقعة):

$$\boldsymbol{V(X) = E[X - E(X)]^2}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E[X^2 - 2X\,E(X) + [E(X)]^2] \\ &= E(X^2) - 2\,E(X)E(X) + [E(X)]^2 \\ &= E(X^2) - 2\,[E(X)]^2 + [E(X)]^2 \end{aligned}$$
$$\boldsymbol{V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2}$$

حيث: إذا كان X متقطع $\leftarrow$ $E(\ \ ^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \ P(X = x_i)$

إذا كان X مستمر $\leftarrow$ $E(\ \ ^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$

مثال 3: بالرجوع إلى المثال 1 ما هي قيمة التباين:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$
$$E(X^2) = ?$$
$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum x_i^2\, P\,(X = x_i) \\ &= (1)^2\,(0{,}04 + (2)^2(0{,}06) + \cdots + (6)^2(0{,}11) \end{aligned}$$

$$\boxed{E(X^2) = 16{,}84}$$

$$V(X) = 16{,}84 - (3{,}92)^2$$

$$\boxed{\delta(X)} = 1{,}25V(X) = 1{,}47$$

مثال4: بالرجوع إلى المثال: ما هي قيمة التباين:

$$f(x) = \frac{1}{2}x \qquad 0 \leq x \leq 2$$

$$E(X^2) = ?$$

$$E(X^2) = \int_0^2 x^2 f(x)\, dx$$

$$E(X^2) = \frac{1}{2}\int_0^2 x^3\, dx$$

$$E(X^2) = \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2$$

$$E(X^2) = \frac{1}{2}\left[\frac{16}{4} - 0\right]$$

$$= \frac{16}{8} = 2$$

donc

$$V(X) = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

$$\boxed{V(X) = \frac{2}{9}} \qquad \boxed{\delta(X) = \frac{\sqrt{2}}{3}}$$

خصائص التباين:

1) إذا a ثابت:

$$V(a) = E(a^2) - [E(a)]^2$$

$$= a^2 - a^2 = 0$$

$$\boxed{V(a) = 0}$$

2) إذا كان a ثابت:

$$V(aX) = ?$$

$$V(aX) = E[(aX)^2] - [E(aX)]^2$$

$$= E[a^2X^2] - [aE(X)]^2$$

$$= a^2E[X^2] - a^2\,[E(X)]^2$$

$$= a^2(E[X^2] - [E(X)]^2)$$

$$\boxed{V(aX) = a^2V(X)}$$

X و Y مستقلان $\leftarrow$ $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$