تعتمد نظرية الإحتمالات على مجموعة من المبادئ و الأساسيات التي نتعرف عليها بالتفصيل فيما يلي:

I. مبادئ نظرية الإحتمالات:

كما سبقت الإشارة إليه فإن نظرية الإحتمالات تعتمد على مجموعة من الأساسيات، و بهدف الإلمام الجيد بمفهوم هذه النظرية و تبسيط حساب الإحتمال فإننا نستعرض ذلك في العناوين الفرعية التالية:

1- التجربة العشوائية:

تُعتبر التجربة العشوائية الأساس الذي تُبنى عليه نظرية الإحتمال، فلولا العشوائية لما كانت هناك ربما حاجة لحساب الإحتمال، حيث أننا نجد أن مصطلح كلمة "عشوائية" يدل على شيئ أو حادث يتم بصفة عرضية و غير مقصودة و متعمدة كما أن هذا الحادث قد يقع و قد لا يقع عند إجراءنا للتجربة و بالتالي فإن هذه الأخيرة يُمكن أن تؤدي إلى نتائج مختلفة لو أعدنا إجراءها في نفس الظروف طالما أنها مبية على الصدفة و العرضية.

و عليه فإنه يُمكن القول باختصار أن التجربة العشوائية هي: " أي تجربة تعتمد نتيجتها النهائية على الصدفة حيث لا يُمكن الجزم بها و معرفتها مسبقاً قبل إجراء التجربة كما أنه يُمكن أن تقود إلى نتائج مختلفة لو أُعيدت في نفس الظروف، مع ملاحظة أنه قد يكون ممكناً معرفة كل النتائج الممكنة لهذه التجربة".

2- فضاء العينة:

أو الفضاء العيني، يُرمز له عادة بـ "Ω" و هو عبارة عن مجموعة تتضمن كل النتائج الممكنة للتجربة العشوائية. عدد عناصر هذه المجموعة الكلية (عدد النتائج المكونة لفضاء العينة) يُعرف بـ"عدد الحالات الممكنة أو الكلية" و هو ما نرمز له بـ $Card(\Omega) = N$.

3- الحادث (أو الحادثة):

عند قيامنا بتجربة عشوائية ما فإننا نهتم نظير ذلك باحتمال و إمكانية وقوع (أو عدم وقوع) شيئ معين ذي صلة بهذه التجربة. هذا الشيئ الذي نبحث في احتمالية وقوعه من عدمها يُصطلح عليه في نظرية الاحتمالات بـ"الحادث" (أو الحادثة).

إذن و طالما أن الحادث مقترن بتجربة عشوائية لها فضاء عينة (مجموعة كلية)، فإنه سوف يُعبر عن مجموعة محتواة داخل هذا الفضاء، مع ملاحظة أنه يُمكن أن تكون مجموعة الحادث مجموعة خالية ($\emptyset$) أو جزئية من المجموعة الكلية أو مجموعة فضاء العينة كاملة.

قد يكون الحادث بسيطاً إذا كانت مجموعته تحتوي على نتيجة (عنصر) واحدة فقط من مجموعة النتائج الكلية المكونة لفراغ العينة؛ و قد يكون مركباً إذا كان يشمل نتيجيتين أو أكثر من النتائج الممكنة، و عليه فإن الحادث المركب يُمكن تقسيمه إلى حوادث بسيطة.

نرمز للحوادث عادة بالرموز اللاتينية: $A, B, C, \ldots$ و هكذا و هو ما سنتبعه في هذه المطبوعة؛ كما يُرمز لعدد النتائج المكونة لمجموعة الحادث بـ: $Card(A) = n(A), Card(B) = n(B), Card(C) = n(C), \ldots$. بقي أن نعرف هذا العدد (عدد عناصر مجموعة الحادث) يُعرف بـ "عدد الحالات الملائمة (أو المواتية) لذلك الحادث" و هي الحالات التي تُؤدي إلى وقوع الحادث موضع الاهتمام في حال ظهورها عند إجراء التجربة العشوائية.

4- الأنواع الرئيسية للحوادث:

يُمكن تصنيف الحوادث إلى ثلاثة أصناف رئيسية:

أ. الحادث المستحيل:

لنفرض أنك قمت بسحب كرية بصفة عشوائية من صندوق به كريات سوداء فقط؛ فهل يُمكن أن تكون الكرية المسحوبة بيضاء؟ بالطبع لا. كذلك لا يُمكننا الحصول مثلاً على الرقم 7 عند رمينا لزهرة نرد فذلك مستحيل.

إذن يُكننا القول أن الحادث المستحيل هو حادث لا يُرجى و لا يُمكن وقوعه إطلاقاً عند إجراءنا لتجربة عشوائية ما؛ و حيث يستحيل وقوع هذا الحادث فإنه لا توجد و لا حالة تُلائم هذا الحادث و بالتالي و لا عنصر ضمن مجموعته بل ستكون مجموعة عناصره عبارة عن مجموعة خالية Ø.

ب. الحادث الأكيد:

على عكس الحادث المستحيل يُمكننا أن ندرك مباشرة أن الحادث الأكيد هو حادث يقع بالضرورة و بصفة حتمية عند إجراءنا لتجربة عشوائية ما؛ فبديهي مثلاً و أكيد أننا سوف نحصل على رقم من 1 إلى 6 لو قمنا برمي زهرة نرد. كما أننا سوف نحصل بالتأكيد على كرية سوداء اللون عند سحب كرية من صندوق به كريات سوداء فقط، و هكذا...

و حيث أن هذا الحادث مؤكد وقوعه فإن مجموعته سوف تشمل كافة فضاء العينة Ω و بالتالي كل الحالات الممكنة للتجربة تلائمه.

ج. الحادث العشوائي:

عرفنا الآن أننا بين نوعين من الحوادث و هما إما حادث يقع بصفة أكيدة عند قيامنا بتجربة عشوائية ما، أو حادث مستحيل لا يقع إطلاقاً عند إجراءنا للتجربة. إذن يتبادر إلى ذهننا أنه بقي لنا ذلك الحادث الذي قد يقع كما قد لا يقع عند إجراء التجربة العشوائية و أمر وقوعه من عدمه متروك للصدفة و العشوائية في إنتظار النتيجة النهائية للتجربة طالما لا يُمكننا الجزم بذلك مسبقاً. يُعرف هذا الحادث بـ"الحادث العشوائي" و هو لا مستحيل و لا أكيد بل مُحتمل الوقوع، و هو ما تُعالجه و تبحث فيه نظرية الاحتمالات بصفة خاصة.

فمثلاً لو أنك قمت برمي زهرة النرد مرة واحدة و كنت مهتم بالحصول على رقم فردي، فإن هذا الأمر و الحادث قد يقع (يحدث) و قد لا يقع (لا يحدث) و لا تدري مسبقاً ما هو صائر.

الأمثلة السابقة تحت عنوان الحادث كلها كانت تُعبر عن حوادث عشوائية.

5- العمليات على الحوادث:

سوف نقوم تحت هذا العنوان بالتطرق إلى جملة من العمليات و العلاقات بين الحوادث و هي مستقاة في الواقع من العمليات على المجموعات التي نعرفها في نظرية المجموعات؛ و من أجل تبسيط الأمر دعنا نفترض حادثين فقط A و B متعلقين بنفس التجربة العشوائية، و ما يُقال في هذا الشأن ينسحب على أكثر من حادثين إذ المغزى هنا الإلمام بأساس هذه العمليات.

أ. إتحاد الحوادث:

إذا كنا أمام تجربة عشوائية ما، فضاء عينتها Ω و عدد حالاتها الممكنة (عناصر Ω) هو N؛ و كان لدينا الحادثين A و B متعلقين بهذه التجربة لكل منهما مجموعته الجزئية الخاصة به و الملائمة له، فما المقصود بـ "A إتحاد B" أو إختصاراً "AUB"؟ و ماذا يعني بلغة الإحتمالات؟

للجواب على ذلك دعنا نستعين بالمثال التالي:

مثال 10:

نرمي زهرة نرد متوازنة مرة واحدة و نعتبر الحادثين A و B حيث:

A: "الحصول على رقم زوجي".

B: "الحصول على رقم أقل من 5".

حينئذ يكون لدينا عدد الحالات الممكنة N = 6 و $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

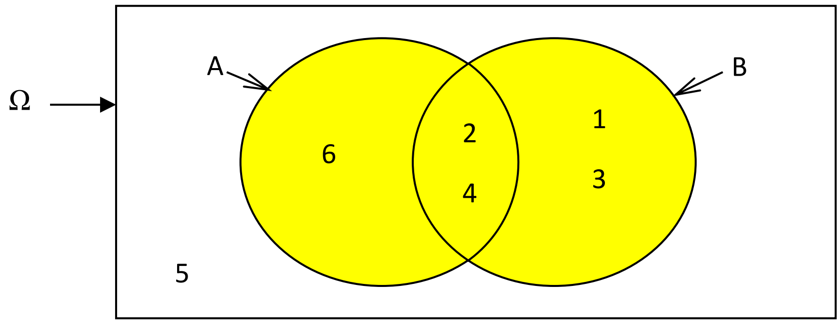
A: "الحصول على رقم زوجي".

مجموعة عناصر هذا الحادث هي: $A = \{2, 4, 6\}$ و عدد الحالات الملائمة له هو "ثلاثة".

B: "الحصول على رقم أقل من 5".

مجموعة عناصر هذا الحادث هي: $B = \{1, 2, 3, 4\}$ و عدد الحالات الملائمة له هو "أربعة".

الآن نهتم بالحادث الذي بدوره يُمثل إتحاد الحادثين السابقين A و B (AUB)، و من أجل ذلك نستعين بالمخطط التوضيحي الشائع ألا و هو مخطط "فن" (Venn).



كما يوضحه الشكل فإن الحادث " AUB" يعني " الحصول على رقم زوجي أو رقم أقل من 5"، أي "A أو B" و يحصل ذلك بجمع العناصر الملائمة لكلا الحادثين في مجموعة واحدة تُعبر عن الإتحاد دون تكرار للعناصر المشتركة طبعاً، و يُمكن أن نكتب:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}.$$

و عليه يُمكن القول أن إتحاد حادثين A و B يُعبر عن وقوع أحدهما على الأقل، بمعنى وقوع أحدهما (الأول أو الثاني) أو ممكن كليهما (في حال وجود تقاطع و عناصر مشتركة بينهما كما في هذا المثال) و هو ما يدل على أن كلمة "أو" هنا ليست إقصائية إما A فقط أو B فقط بل ممكن الإثنين معاً.

ختاماً فإن الحادث "A أو B" الذي يدل على الإتحاد هو عبارة عن مجموعة جزئية من المجموعة الكلية (من فضاء العينة Ω) التي تحتوي على النتائج الممكنة الواقعة إما في A أو في B أو ممكن فيهما معاً (إذا كان ذلك ممكنا بتقاطع)، و هي المجموعة الجزئية المُعبر عنها رياضياً (AUB) و التي تعني "وقوع حادث واحد على الأقل".

ب. تقاطع الحوادث:

بخلاف الإتحاد الذي كان يُعبر عن وقوع إما الحادث A أو B أو كلاهما في حال وجود التقاطع؛ فإن تقاطع الحادثين A و B يُعبر عن وقوعهما معاً و في آن واحد، و عليه نجده يشمل كافة النتائج (العناصر) المشتركة بينهما، و يُعبر عن ذلك رياضياً بـ "$A \cap B$ ".

مثال 12:

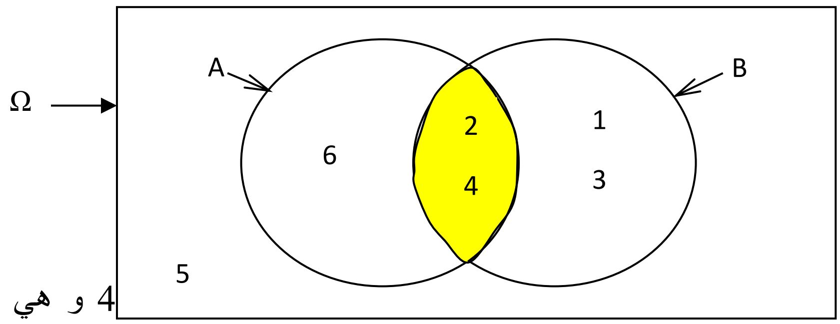
إعتماداً على معطيات المثال 10 السابق كان لدينا:

A: "الحصول على رقم زوجي". $A = \{2, 4, 6\}$

B: "الحصول على رقم أقل من 5". $B = \{1, 2, 3, 4\}$

فإذا ما أردنا تحديد تقاطع هذين الحادثين فإن هذا التقاطع يعني الحصول على رقم زوجي و في نفس الوقت يكون أقل من 5، و نكتب هذا الحادث "$A \cap B$ " المعبر عن تقاطع الحادثين A و B كما يلي:

$A \cap B$: " الحصول على رقم زوجي و أقل من 5". و لو مثلنا هذا سيكون الشكل كاتالي:



و كما هو 4 و هي العناصر المشتركة بين المجموعتين و المعبرة عن التقاطع بين الحادثين و عليه نكتب:

$A \cap B = \{2, 4\}$.

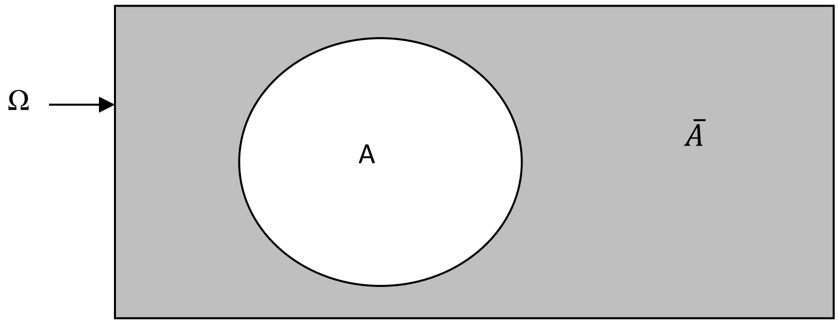
و كملاحظة يُمكن أن نلحظ أن الإتحاد يُعبر عنه لفظاً بـ " أو" و هو يعني وقوع حادث واحد على الأقل و يُرمز له بـ " ∪" كما هو معروف و جبرياً يدل على الجمع "+"؛ في حين أن التقاطع يُعبر عنه لفظاً بـ " و" و هو يعني وقوع الحوادث مجتمعة (معاً) في آن واحد و يُرمز له بـ " ∩" كما هو معروف و جبرياً يدل على الضرب "×"، كما سنتطرق له لاحقاً عند دراستنا لقوانين الإحتمال.

ج. الحدث العكسي:

يُعرف كذلك بالحادث المكمل أو المتمم، و ما من حادث إلا و له حادث عكسي، فإذا ما إعتبرنا A حادثاً متعلقاً بتجربة عشوائية معينة، فإن الحادث العكسي له، الذي نرمز له بـ" $\bar{A}$"، هو الحادث الحادث الذي ينفي وقوع A، فهو يقع إذا و فقط إذا لم يقع هذا الأخير، و بالتالي فالحادث العكسي يشمل كل نتائج التجربة العشوائية (كافة عناصر المجموعة الكلية أو جميع الحالات الممكنة) ما عدا تلك النتائج المكونة للحادث A (عناصر مجموعة A أو الحالات الملائمة لـA).

من خلال التعريف السابق يُمكن أن نستنتج نقطتين غاية في الأهمية و هما:

1) أي حادث و عكسه هما متانفيان دائما حيث يستحيل وقوعهما معاً طالما أنه ليست هناك و لا حالة ملائمة لهذا و ذاك في نفس الوقت، بمعنى أن ليس هناك تقاطع بينهما إطلاقاً بل التقاطع بينهما عبارة عن مجموعة خالية. (أنظر الشكل اللاحق)
2) طالما أن الحادث العكسي يشمل جميع نتائج فضاء العينة غير الملائمة لـ A فإن ذلك يعني أنه لو جمعنا و أضفنا عدد الحالات الملائمة لـ A مع عدد الحالات الملائمة للعكسي له $\bar{A}$ لحصلنا على العدد الإجمالي للحالات الممكنة، بمعنى أن إتحادهما سوف يُعطينا فضاء العينة Ω كاملاً. (أنظر الشكل اللاحق)



$A \cap \bar{A} = \emptyset$ $\qquad$ $A \cup \bar{A} = \Omega$

II. الإحتمال:

1- تعريف:

الإحتمال باختصار هو "عدد يصف إمكانية وقوع حادث ما"؛ فلو أننا قمنا مثلاً برمي زهرة نرد متوازنة مرة واحدة، و نهتم بالحصول على رقم فردي، و ليكن حادثاً A، لتبادر إلى ذهننا مباشرة أن عدد الحالات الممكنة لهذه التجربة العشوائية هو "ستة" (من 1 إلى 6) في حين أن عدد الحالات الملائمة للحادث محل إهتمامنا هي "ثلاثة" (1، 3، 5)؛ فإذا ما أردنا الآن حساب إحتمال وقوع هذا الحادث "الحصول على رقم فردي" لقلنا أن النسبة ثلاثة من ستة (3/6) تُعبر عن قياس منطقي و معقول لإمكانية وقوع هذا الحادث و بالتالي إحتمال الحصول على رقم فردي. و هذه النسبة ما هي في الحقيقة إلا عدد الحالات الملائمة لـ A قسمة عدد الحالات الممكنة.

و عليه يُمكن أن نعرف الإحتمال بصفة عامة كما يلي:

إذا كان Ω فضاء عينة خاصاً بتجربة عشوائية معينة عدد عناصره، التي نطلق عليها بعدد الحالات الممكنة للتجربة، هو N. و كان A مثلاً حادثاً متعلقاً بهذه التجربة عدد عناصره، التي تُعرف بعدد الحالات الملائمة له، هو n؛ فإن إحتمال وقوع الحادث A هو: "عدد الحالات الملائمة لـ A مقسوماً على عدد الحالات الممكنة". و ذلك بفرض أن جميع نتائج فضاء العينة (أي جميع الحالات الممكنة) لها نفس الحظ في الوقوع (متساوية الإمكانية).

و بالتالي نكتب رياضياً:

$$P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة لـ A}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} = \frac{n_A}{N}$$

حيث يدل الحرف P على كلمة Probability.

2- خصائص الإحتمال:

أ. مثلما يُمكن ملاحظته في كافة الأمثلة السابقة المتعلقة بحساب الإحتمالات، فإن نتيجة أي إحتمال هي تتراوح بين "الصفر" و "الواحد" و لا يُمكن أبدا أن تخرج عن هذا المجال فهي محصورة فيه دائما. و إن وُجدت نتيجة خارج ذلك المجال فذلك يدل على وجود خطأ ما.

و يُمكن التعبير عن هذه الخاصية رياضياً و إستنتاجها كما يلي:

إذا كان A مثلاً حادثاً متعلقاً بتجربة عشوائية معينة فضاء عينتها Ω فإننا لو نظرنا في عدد الحالات الملائمة لهذا الحادث (n) من العدد الكلي الممكن لوجدنا هذا العدد إما "صفرا" كحد أدنى يدل على عدم وجود أي حالة ملائمة (و بالتالي تكون مجموعته عبارة عن مجموعة خالية)، أو نجده يساوي عدد الحالات الممكنة كافة (N) كحد أقصى (مجموعته مطابقة لفضاء العينة)؛ و بقسمة كل الأطراف على عدد الحالات الممكنة (N) عند حسابنا للإحتمال سوف نجد أن إحتمال الحادث A يتراوح بين "الصفر" و "الواحد". أي:

$$\forall A \epsilon \Omega: A \subseteq \Omega: 0 \leq n \leq N \Leftrightarrow \frac{0}{N} \leq \frac{n}{N} \leq \frac{N}{N}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$$

ب. إحتمال الحادث العكسي:

تحت عنوان الحادث العكسي سابقاً عرفنا أن ما من حادث إلا و له حادث عكسي، و عرفنا كذلك أن الحالات الملائمة للعكسي هي كافة الحالات الممكنة ماعدا تلك الملائمة للحادث المباشر، بمعنى هي المجموعة الكلية مطروحا منها مجموعة هذا الأخير كما (راجع الشكل السابق)؛ فإذا علمنا أن عدد الحالات الكلية الممكنة (مجموعة Ω) هو N، و عدد الحالات الملائمة للحادث A مثلاً هو n (مجموعة A)، فيمكننا حينئذ الحصول على عدد الحالات الملائمة للحادث العكسي لـ A و الذي نرمز له بـ $\bar{A}$ و هذا العدد يساوي: N-n، و إحتمال هذا الحادث العكسي هو:

$$P(\bar{A}) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة لـ } \bar{A}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} = \frac{n_{\bar{A}}}{N} = \frac{N-n}{N} = \frac{N}{N} - \frac{n}{N} = 1 - P(A).$$

و بالتالي لدينا دائما العلاقة التالية: $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ ، و هذا طبيعي طالما أن إتحاد أي حادث و عكسه يُشكل لنا المجموعة الكلية Ω ، و أنهما متنافيان (غير متقاطعان أبداً).

ملاحظات:

- من خلال هذه العلاقة التالية إذا كان أحد الإحتمالين معلوم يُمكن مباشرة إيجاد إحتمال الآخر بطرحه من الواحد؛
- نلجأ عادة إلى حساب إحتمال الحادث العكسي كطريق مختصر لحساب إحتمال الحادث الأصلي (المباشر) بالإستفادة من العلاقة السابقة، لأنه عادة ما تكون الحالات الملائمة للعكسي أقل بكثير من تلك الملائمة للمباشر بمعلومية عدد الحالات الكلية طبعاً.

III. قوانين (قواعد) الإحتمال:

يوجد قانونين أساسيين في نظرية الإحتمالات لابد من معرفتهما و الإلمام الجيد بهما حيث تدور عليهما العديد من المسائل، ألا و هما "قانون الجمع" و "قانون الضرب". فما المقصود بكل منهما؟ و كيف يتم حسابه؟

من أجل ذلك سوف نفترض القيام بتجربة عشوائية ما فضاء عينتها Ω بعدد حالات ممكنة قدره N، و نعتبر الحادثين A و B متعلقان بهذه التجربة طبعاً عدد الحالات الملائمة لهما هي n_A و n_B على التوالي. فأحياناً نحتاج لحساب إحتمال وقوع أحدهما على الأقل، أو كذلك إحتمال وقوع الإثنين معاً، و هو ما سنراه في ما يلي:

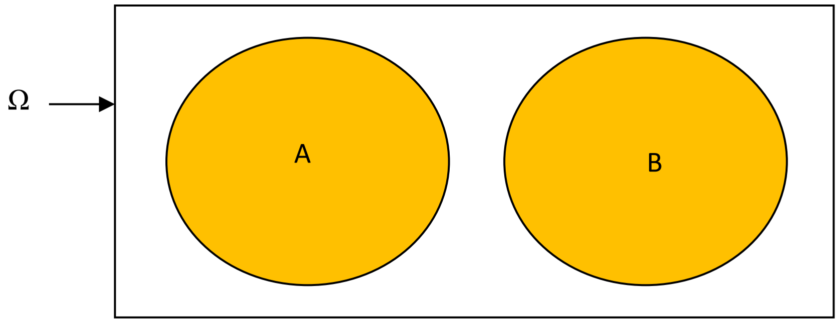
1. قانون الجمع:

سبق و ذكرنا تحت عنوان العمليات على الحوادث أن جمع و ضم حادثين إلى بعضهما البعض يعني وقوع أحدهما على الأقل، و بلغة المجموعات فذاك يعني "إتحادهما U"، و هو ما يُعبر عنه بقولنا "أو" (هذا أو ذاك أو ممكن كلاهما).

و عليه فإن قانون الجمع يهتم بدراسة إحتمال وقوع أحد الحوادث على الأقل، بمعنى أنه يُجيبنا على السؤال " $P(A \cup B) = ?$"، و حيث أن ذلك مبني على إتحاد المجموعات فإننا نُميز في هذا الصدد بين حالتين:

أ. الحوادث المتنافية:

من خلال نظرية المجموعات نعلم أن المقصود بمجموعتين متنافيتين هو عدم وجود عناصر مشتركة بينهما بمعنى أن ليس هناك تقاطع. إذن نقول عن الحادثين A و B أنهما متنافيان إذا لم يكن ممكناً وقوعهما معاً (في آن واحد) حيث أنهما غير متقاطعان ($A \cap B = \emptyset$) كما يوضحه الشكل أسفله:



$$A \cap B = \emptyset$$

فعدد الحالات المعبرة عن إتحاد هذين الحادثين هو عدد الحالات الملائمة لـ A مضافاً إليه عدد الحالات الملائمة لـ B، و الإحتمال نحصل عليه من خلال العلاقة التالية:

$$P(A \cup B) = \frac{n_A + n_B}{N} = \frac{n_A}{N} + \frac{n_B}{N} = P(A) + P(B)$$

باختصار إحتمال الإتحاد في هذه الحالة هو مجموع الإحتمالات و هو يعني وقوع واحد فقط هنا طالما أنهما متنافيان (غير ممكن الإثنين معاً)

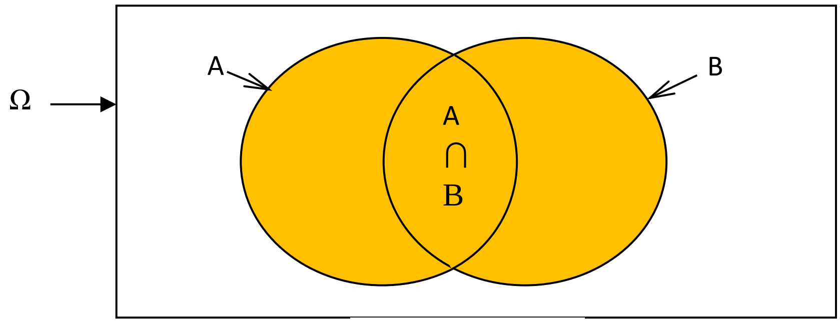
ب. الحوادث غير المتنافية:

بخلاف الحالة السابقة فإن التقاطع موجود هنا، أي هناك عناصر مشتركة بين المجموعات و بالتالي فإن الحوادث يُمكن أن تقع معاً. فإذا كان ($A \cap B \neq \emptyset$) دعنا نرمز لعدد الحالات الملائمة لهذا التقاطع المعبر عن العناصر المشتركة بـ $n_{(A \cap B)}$ ، أما الإحتمال في هذه الحالة فيساوي:

$$P(A \cup B) = \frac{n_A + n_B - n_{(A \cap B)}}{N} = \frac{n_A}{N} + \frac{n_B}{N} - \frac{n_{(A \cap B)}}{N} = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

لاحظ أنه يتم طرح عدد حالات التقاطع مرة واحدة حتى لا يتم إحتسابها مرتين (مرة مع A و مرة مع B) في الإتحاد و منه تُخصم قيمة إحتمال هذا التقاطع عند حسابنا للإحتمال النهائي.

الشكل الموالي يُبين هذه الوضعية:



$A \cap B \neq \emptyset$

2. قانون الضرب:

مثلما سبق بيانه، فإنه إذا كنا في قانون الجمع نبحث عن إحتمال الإتحاد "∪" المدلول عليه بكلمة "أو" و رياضياً بالجمع "+"؛ فإننا في قانون الضرب هنا نبحث عن إحتمال التقاطع "∩" المدلول عليه بكلمة "و" و رياضياً برمز الضرب "×".

إذن ما إحتمال وقوع الحادثين A و B معاً (في آن واحد)؟ أي: $P(A \cap B) = ?$.

من أجل الإجابة على هذا السؤال و إستخلاص قانون الضرب سوف نتطرق أولاً إلى ما يُعرف بـ "الإحتمال الشَرطي".

أ. الإحتمال الشَرطي:

-مقدمة:

مثال 19: (تمهيدي)

دعنا ننطلق من تجربة أن أحدهم قام برمي زهرة نرد و أنك تهتم أنت بالحصول على رقم زوجي فإن:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

A:"الحصول على رقم زوجي". $A = \{2, 4, 6\}$

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

فأنت تعلم عند عملية الرمي أن إحتمال حصول ماتهتم به (رقم زوجي) هو "$\frac{1}{2}$". الآن تصور معي أنه، بعد الرمي، تم إخبارك أن النتيجة كانت "رقماً لايزيد عن 3" لكن دون معرفتك للنتيجة بالضبط.

فما علاقة هذه المعلومة المكتسبة (علمك أن الرقم لايزيد عن ثلاثة) بما تهتم به أنت (الحصول على رقم زوجي)؟ و ما الشيئ الذي تغير في ذهنك و في طريقة حسابنا للإحتمال محل إهتمامنا؟

حتى نُجيب نفرض الحادث B كما يلي:

B: "الحصول على رقم لا يزيد عن 3".

و حيث أننا قد علمنا أن نتيجة الرمية هي بالفعل رقم لا يزيد عن 3 فإننا نقول أن الحادث B قد وقع فعلاً، و بوقوع هذا الحادث فإن تفكيرك أصبح مقتصراً على المجموعة $\{1,2,3\}$، التي هي مجموعة B، و التي أصبحت في الواقع تُشكل فضاء عينة جديد حيث تم إستبعاد الأرقام 4، 5 و 6 من الفضاء الأولي Ω. و الرقم الزوجي الوحيد في هذا الفضاء الجدبد B (الذي حالاته ثلاثة) هو "2" فقط (حالة واحدة ملائمة هنا)؛ و بالتالي فإن إحتمال حصولك على رقم زوجي في ظل هذه المعلومة المكتسبة هو (واحد من ثلاثة أي $\frac{1}{3}$).

هذا هو الإحتمال الشرطي و الذي نقصد منه " أنك تحسب إحتمال حادث ما علماً أن (شرط أن) حادثاً آخراً قد وقع فعلاً". و رياضياً نكتب هذا الإحتمال الشرطي المعبر عن الشرط كالتالي: (بالتطبيق على مثالنا السابق).

$$P(A/B) = \frac{1}{3}$$

و هو إحتمال الحصول على رقم زوجي علماً أن الرقم لا يزيد عن 3.

☚ لا حظ أن ما هو معلوم (الحادث الذي وقع) يكون دائماً تحت الشرط (/).

-صيغة حساب الإحتمال الشرطي:

في المثال التمهيدي السابق لدينا باختصار:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

A:"الحصول على رقم زوجي". $A = \{2,4,6\}$ ؛ $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

B: "الحصول على رقم لا يزيد عن 3". $B = \{1,2,3\}$ ؛ $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

و توصلنا إلى أن: $P(A/B) = \frac{1}{3}$

لوضع صيغة لحساب الإحتمال الشرطي نقوم بحساب إحتمال تقاطع هذين الحادثين:

$A \cap B$: "الحصول على رقم زوجي لا يزيد عن 3 " و ليس هناك سوى الرقم 2 الملائم و منه حالة واحدة لهذا التقاطع ($A \cap B = \{2\}$). فإحتماله إذن هو:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

و لو تمعنا في إحتمال الشرط لوجدنا أنه ماهو إلا:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}$$

و هي نفس النتيجة السابقة.

و كخلاصة فإننا نتوصل إلى أن:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.❶$$

و يُقرأ إحتمال A شرط B.

و كذلك إحتمال B شرط A هو:

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.❷$$

☚ في كلتا الصيغتين السابقتين يُفترض أن المقام أكبر تماماً من الصفر.

ب. قانون (قاعدة الضرب):

إعتماداً على هاتين الصيغتين نتوصل إلى قانون أو قاعدة الضرب كما يلي:

$$❶ \Rightarrow P(A\cap B)= \ P(A/B)\times P(B)$$

و:

$$❷ \Rightarrow P(A\cap B)= \ P(B/A)\times P(A)$$

و هو ما يُمكننا وضعه في قانون واحد:

$$P(A\cap B)= \ P(A/B)\times P(B)=P(B/A)\times P(A)$$

هذا هو قانون (قاعدة) الضرب.

☚ لاحظ في المثال التمهيدي السابق أنه كان لديناإبتداءاً: $P(A)=\frac{1}{2}$ و بمعلومية وقوع الحادث B أصبح هذا الإحتمال: $P(A/B)=\frac{1}{3}$ ؛ و بالتالي فإن وقوع B قد أثر في إحتمال وقوع A (إحتمال هذا الأخير تغير) و هذا ما يقودنا للحديث عن إستقلالية الحوادث.

ج. إستقلالية الحوادث:

نقول عن الحادثين A و B مثلاً أنهما مستقلان إذا لم يكن لوقوع أحدهما أي تأثير في إحتمال وقوع الآخر.

من هذا التعريف يُمكن بنا أن نستنتج العلاقات التالية:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.❶$$

وقوع B لم يؤثر في إحتمال وقوع A.

و كذلك:

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=P(B) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.❷$$

وقوع A لم يؤثر في إحتمال وقوع B.

و بالتالي فإن قاعدة الضرب، في حال الحوادث المستقلة، سوف تُختزل لتُصبح:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

☚ تُعرف هذه المعادلة الأخيرة بـ " شرط إستقلالية الحوادث" و هي كافية للتحقق من ذلك.

مثال 20:

نرمي قطعة نقود متوازنة ثلاثة مرات في الهواء، و نعتبر الحادثين A و B حيث:

A: "الحصول على P في الرمية الأولى"

B: "الحصول على P في الرميتين الأخرتين"

1- إذا علمت أن نتيجة الرمية الأولى هي Pile، فما إحتمال أن تكون نتيجة الرميتين الأخرتين كذلك Pile؟
2- هل الحادثان A و B مستقلان؟

الجواب:

لدينا عدد الحالات الممكنة هو "ثمانية" كما يوضحه فضاء عينة هذه التجربة:

$$\Omega = \{(P,P,P);(F,P,P);(P,F,P);(P,P,F);\ (F,F,P);\ (F,P,F);\ (P,F,F);\ (F,F,F)\}$$

بغرض الإجابة على السؤالين السابقين علينا أولاً حساب إحتمال كل حادث:

A: "الحصول على P في الرمية الأولى"

$$A = \{(P,F,P);(P,P,F);\ (P,F,F);\ (P,P,P)\}$$

و منه إحتمال A هو:

$$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

B: "الحصول على P في الرميتين الأخرتين" (الثانية و الثالثة)

$$B = \{(P,P,P);(F,P,P)\}$$

إذن:

$$P(B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

1- من صيغة السؤال نُدرك أن هذا إحتمال شرطي، حيث أننا نريد حساب إحتمال أن تكون نتيجة الرميتين الأخرتين كذلك Pile شرط أن نتيجة الرمية الأولى هي Pile فهذه الأخيرة قد عُلمت، بمعنى هنا أن الحادث الذي وقع و يكون تحت الشرط هو الحادث A، و بناءاً عليه نريد حساب إحتمال B. $P(B/A) = ?$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

فلابد إذن من إيجاد إحتمال التقاطع:

$(A \cap B)$: " الحصول على P في الرمية الأولى و في الرميتين الأخرتين" (بمعنى في الرميات الثلاث).

$$(A \cap B) = \{(P,P,P)\}$$

إذن:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{8}$$

و بالتالي فإن الإحتمال الشرطي المطلوب هو:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/8}{4/8} = \frac{1}{4}$$

2- يُمكننا التحقق من إستقلالية A و B (من عدمها) بطريقتين:

الطريقة الأولى:

لاحظ مباشرة من خلال نتيجة الإحتمال الشرطي في السؤال الأول أن:

$$P(B/A) = \frac{1}{4} = P(B)$$

مما يدل على أن وقوع الحادث A لم يكن له أي تأثير على إحتمال وقوع B وبقي كما هو $\frac{1}{4}$ ، و بالتالي نستنتج أن الحادثين A و B مستقلان.

الطريقة الثانية:

من خلال شرط الإستقلالية الذي رأيناه سابقاً نتحقق هل المساواة محققة أو لا:

$$P(A \cap B) =^{?} P(A) \times P(B)$$

لدينا:

$$P(A \cap B) =^{?} P(A) \times P(B)$$

$$\frac{1}{8} =^{?} \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

المساواة محققة أي أن شرط الإستقلالية متوفر، و بالتالي نفس الإستنتاج السابق: A و B مستقلان عن بعضهما البعض.

مثال 21:

نرمي قطعتين نقديتين متوازنتين، و نعتبر الحادثين A و B حيث:

A: "الحصول على F مرة واحدة فقط"

B: " الحصول على F مرة واحدة على الأقل"

1) -أحسب $P(A)$ ، $P(B)$، $P(A \cap B)$ ، $P(A \cup B)$، $P(\bar{A})$ ، $P(\bar{B})$.
2) هل الحادثان A و B مستقلان أم لا؟

الجواب:

عدد الحالات الممكنة هو أربعة:

$$\Omega = \{(P,P);(P,F);(F,P);(F,F)\}$$

1) A: "الحصول على F مرة واحدة فقط". $A = \{(P,F);(F,P)\}$

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

B: " الحصول على F مرة واحدة على الأقل ". $B = \{(P,F);(F,P);\ (F,F)\}$

$$P(B) = \frac{3}{4}$$

$A \cap B$: " الحصول على F مرة واحدة فقط ". $A \cap B = \{(P,F);(F,P)\}$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$A \cup B$: " الحصول على F مرة واحدة على الأقل ". $A \cup B = \{(P,F);(F,P);\ (F,F)\}$

$$P(A \cup B) = \frac{3}{4}$$

$\bar{A}$: " عدم الحصول على F أو الحصول عليها مرتين". $\bar{A} = \{(P,P);(F,F)\}$

$$P(\bar{A}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$\bar{B}$: " عدم الحصول على F ". $\bar{B} = \{(P,P)\}$

$$P(\bar{B}) = \frac{1}{4}$$

2) هل الحادثان A و B مستقلان أم لا؟

ندرس ذلك مباشرة من خلال شرط الإستقلالية:

$$P(A \cap B) =^{?} P(A) \times P(B)$$

$$\frac{1}{2} =^{?} \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{2} \neq \frac{3}{8}$$

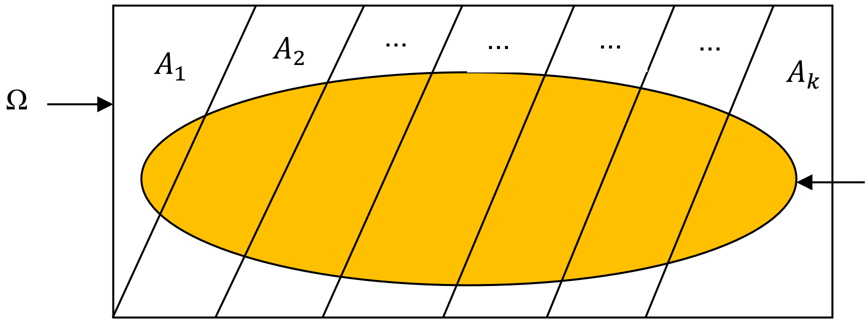
و بالتالي نستنتج أن الحادثين A و B غير مستقلين. (طالما أن المساواة غير محققة)

IV. نظرية الإحتمالات الكلية و نظرية "بايز Bayes":

إذا كانت الحوادث $_1, A_2, A_3, \dots, A_k$ حوادث شاملة، أي:

- $P(A_i) > 0$ من أجل $i = 1,2,\dots,k$ ؛
- $A_i \cap A_j = \emptyset$ (لكل $i \neq j$ بمعنى أنها حوادث متنافية مثنى مثنى) ؛
- $A_1 \cup\ A_2 \cup\ A_3 \cup \dots \cup A_k = \Omega$ (إتحادها جميعاً يُعطينا فضاء العينة).

و كان B حادثاً من هذا الفضاء Ω كما يُوضحه الشكل التالي:



1- نظرية الإحتمالات الكلية:

السؤال المطروح هنا: ما إحتمال الحادث B؟

نُجيب على هذا السؤال مبرهنين هذه النظرية فيما يلي:

لاحظ أن B هو محتوى في Ω و بالتالي فإن التقاطع بينهما هو B نفسه. $\left(B \subset \Omega \Rightarrow B \cap \Omega = B\right)$

$$P(B) = P(B \cap \Omega)$$

$$= P[B \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_k)]$$

$$= P[(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3) \cup \dots \cup (B \cap A_k)]$$

$$= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) + \cdots + P(B \cap A_k)$$

من خلال قاعدة الضرب لدينا:

$$P(B \cap A_i) = P(B/A_i).P(A_i) \qquad i = 1, \dots, k$$

إذن:

$$P(B) = P(B/A_1).P(A_1) + P(B/A_2).P(A_2) + \cdots + P(B/A_k).P(A_k)$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(B/A_i).P(A_i)$$

هذه العلاقة الأخيرة هي علاقة الإحتمال الكلي أو التام.

2- نظرية "بايز Bayes":

تحت هذه النظرية سنُجيب على التساؤل التالي:

-إذا علمت أن الحادث B قد وقع فعلاً، فما إحتمال وقوع أي حادث من الحوادث A_i؟

لاحظ أن هذا التساؤل عبارة عن إحتمال شرطي طالما هناك حادث قد وقع و عُلم، فنحن نبحث عن:

$$P(A_i/B) = ?$$

و بتطبيق كل من قانون الإحتمال الشرطي، قاعدة الضرب، و علاقة الإحتمال الكلي السابقة نحصل على:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(B/A_i).P(A_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(B/A_i).P(A_i)}$$

تُعرف هذه الصيغة الأخيرة بنظرية "بايز" أو علاقة الإحتمال السببي.

مثال 22:

في مصنع معين هناك ثلاثة أقسام تضمن الإنتاج اليومي من قطع ميكانيكية معينة، حيث يقوم القسم الأول بإنتاج 60% من الإنتاج اليومي منها 2% غير صالحة و القسم الثاني إنتاجه 30% من القطع اليومية منها 5% فاسدة بينما يُنتج القسم الثالث البقية منها 6% فاسدة.

بغرض المراقبة اليومية للإنتاج تقوم مصالح الجودة بإختيار مجموعة من القطع من أجل إختبار مدى سلامتها؛ فبفرض أننا قمنا بإختيار قطعة من الإنتاج اليومي للمصنع:

1) ما إحتمال أن تكون فاسدة؟
2) إذا تبين أنها فاسدة، ما إحتمال أن تكون قد أُنتجت من طرف القسم الأول؟

الجواب:

على حسب نص و مضمون المثال دعنا نفترض الحوادث التالية:

A: "القطعة تم إنتاجها من طرف القسم الأول"

B: "القطعة تم إنتاجها من طرف القسم الثاني"

C: "القطعة تم إنتاجها من طرف القسم الثالث"

ثم لدينا أمر آخر ألا و هو صلاح القطعة من عدمه، فلنفرض هذا الأمر حادثاً آخراً بدوره.

D: "القطعة المنتجة فاسدة"

و بالتالي تسهل الآن عملية كتابة معطيات المثال رياضياً على نحو موال:

$P(A) = 0.6 \qquad P(D/A) = 0.02$

$P(B) = 0.3 \qquad P(D/B) = 0.05$

$P(C) = 0.1 \qquad P(D/C) = 0.06$

1) إحتمال أن تكون فاسدة: $P(D) = ?$

$$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C)$$

$$= P(D/A) \times P(A) + P(D/B) \times P(B) + P(D/C) \times P(C)$$

$$= (0.02) \times (0.6) + (0.05) \times (0.3) + (0.06) \times (0.1)$$

$$= 0.033 = 3.3\%$$

2) هذا إحتمال شرطي طالما أننا قد علمنا أن القطعة فاسدة بمعنى أن الحادث D قد وقع و نبحث إحتمال A بناءاً على ذلك. إذن:

$$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D/A) \times P(A)}{P(D)}$$

$$= \frac{0.012}{0.033} = 0.36$$