ترتكز نظرية الإحتمالات على مجموعة من المبادئ الأساسية التي تتمثل في: التجربة العشوائية، فضاء العينة (**Ω**)، الحدث (المستحيل، العشوائي و الأكيد)، و حساب الاحتمالات [**$P(X=x_i)$**]. كما تهتم ببناء قوانين في مجال الظواهر التي تعتمد على الصدفة. تلعب نظرية الاحتمالات دوراً مهما في حصر الظواهر العشوائية التي تستوجب وضع مجموعة من القوانين الرياضية حول التجربة العشوائية، التي يلعب فيها المتغير العشوائي دوراً أساسياً في حساب الاحتمالات. سينصب تركيزنا على التوزيعات المستمرة و يتعلق الأمر بالتوزيع الطبيعي و التوزيع الطبيعي القياسي.

جدول.5: تذكير عن قوانين التوزيعات المتقطعة الشهيرة.

التوزيع	متى يستخدم	القيم الممكنة للمتغيرة	الاحتمال	التوقع والتباين
الهندسي الزائد **$X \sim H(N, b,p)$**	سحب بدون إرجاع. كريات من صنفين.	**$X = \{0,1,2,\ldots,b\}$,** **$b \leq b + r = N$**	$P(X=x) = \dfrac{C_b^x \cdot C_r^{n-x}}{C_N^n}$	$\mu = np,$ $\sigma^2 = npq\left(\dfrac{N-n}{N-1}\right)$ $q = r/N$ و $p = b/N$ n عدد الكريات المسحوبة N العدد الكلي للكريات b عدد الكريات البيضاء r ع الكريات الحمراء
برنولي $X \sim B(1, p)$	تجربة واحدة (غير مكررة) تقبل نتيجتين.	**$X = \{0, 1\}$**	**$P(X = 1) = p,$** **$P(X = 0) = 1 - p = q$**	$\mu = p, \quad \sigma^2 = pq$
الثنائي **$X \sim B(n, p)$**	تجارب ثنائية النتيجة، مكررة ومستقلة (p ثابت).	**$X = \{0,1,2\ldots,n\}$**	**$P(X = x) = C^x_n\, p^x\, q^{n-x}$** $C_n^x = \dfrac{n!}{x!(n-x)!}$	$\mu = np,\ \sigma^2 = npq$
الهندسي	X هي عدد التجارب اللازمة للحصول على النجاح الأول في تجارب برنولية مكررة.	**$X = \{1,2,\ldots,+\infty\}$**	**$P(X = x) = q^{x-1}p$**	$\mu = 1/p,$ $\sigma^2 = q/p^2$
بواسون $X \sim P(\lambda)$ **$\lambda > 0$**	X عدد النجاحات في عدد كبير جدا من التجارب البرنولية (عدد الوحدات التالفة في شحنة). أو أيضا عدد من الأحداث في فترة زمن.	**$X = \{0,1,2,\ldots,+\infty\}$**	$P(X=x) = \dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$ **$P(X = 0) = e^{-\lambda}$** **$P(X \geq 1) = 1 - e^{-\lambda}$**	$E(x) = V(x) = \lambda$

مصدر. ص.51

1 التوزيع الطبيعي $X \sim N(\mu ,\sigma)$

1.1 تعريف: يعد من أهم و أفضل التوزيعات العشوائية المستمرة و أكثرها استخداماً و فائدة لما له من خصائص تنطبق على نسبة كبيرة من الظواهر الطبيعية والاجتماعية والاقتصادية. لسببين مهمين:

- أن توزيعات كثيرة لمتغيرات مثل الطول والوزن تتبع توزيعات طبيعية، فمثلاً لو قمنا بالصدفة باختيار مجموعة من الأشخاص متواجدين في مكان ما و قسنا أطوالهم لوجدنا نسبة كبيرة منها تقترب من المتوسط، بحيث أن نسبة قليلة من طوال القامة متواجدة في أقصى اليمين و نسبة متناظرة معها من قصار القامة في أقصى اليسار. و نفس الشيء ينطبق مع الأحداث الأخرى. لو قمنا بتمثيل هذه البيانات في معلم متعامد متجانس، لكان المنحنى الذي يمثلهم يشبه شكل الجرس (متماثل حول المتوسط) و هذا ما نسميه بالتوزيع الطبيعي (الشكل.1)
- النتيجة الرياضية التي تسمى بنظرية النهاية المركزية. نظرية النهاية المركزية تقول بأنه إذا أضفنا عدداً كبيراً كبراً كافياً من المتغيرات العشوائية المستقلة والمتماثلة في التوزيع إلى بعضها البعض بأي طريقة كانت، فإن توزيع مجموع هذه القيم يقترب من التوزيع **الطبيعي**..

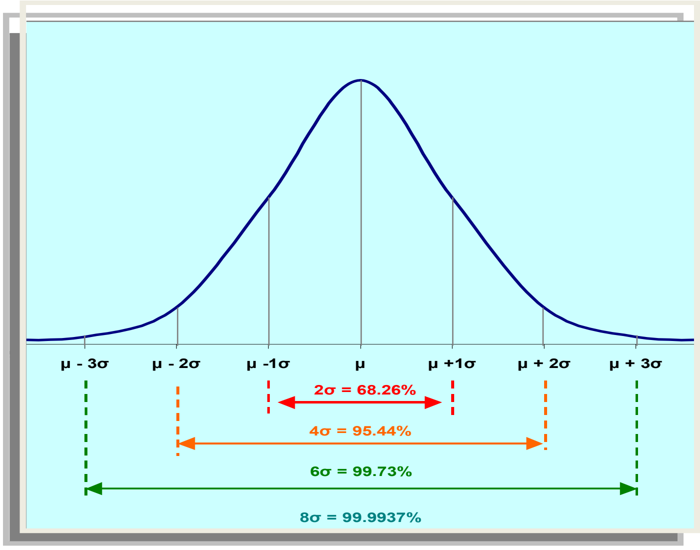
2.1 مميزاته

يتميز التوزيع الطبيعي بأن بياناته تتوزع كما يلي:

- %68.26 بين $[\mu-\sigma ، \mu+\sigma]$؛
- %95.44 بين $[\mu-2\sigma ، \mu+2\sigma]$؛
- %99.73 بين $[\mu-3\sigma ، \mu+3\sigma]$؛

بحيث أن μ هو المتوسط و σ الانحراف المعياري.

و نقول أن X تتوزع توزيع طبيعي بالمعلمتين μ و σ . و يعبر



شكل.1: منحنى التوزيع الطبيعي

3.1 خصائص التوزيع الطبيعي

1. يتوزع المتغير العشوائي X توزيعاً طبيعياً بالمعلمين: $X \sim N(\mu ,\sigma)$

μ (التوقع الرياضي) و δ (إنحرافه المعياري)،

لذلك دالة كثافته الاحتمالية معطاة على النحو التالي:

$$X \sim N(\mu, \sigma) \qquad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{xi-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

علما أن: $-\infty \leq x \leq +\infty$; $e=2.7183$ و $\pi=3.1416$

2. يتميز شكل منحناه بأنه جرسي (متناظر حول المستقيم μ) و متماثل، ذو قمة واحدة يبلغ عند هذه النقطة نهايته العظمى.
3. تدل قيمة μ على مكان مركز الجرس، كما تدل σ على كيفية الانتشار.
4. القيمة الصغيرة لـ σ تعني أنه لدينا جرس طويل مذبذب، القيمة الكبيرة لـ σ تعني أن الجرس قصير ومفرطح.
5. المساحة المحصورة بين منحنى دالة الكثافة f(x) و المحور الأفقي يساوي الـ 1. $\int_{+\infty}^{-\infty} f(x)dx = 1$

6. توجد على المنحنى نقطتان تسميان بنقطتا الإنقلاب (Infliction point) بحيث أن العمود الساقط من إحدى هاتين النقطتين على المحور الأفقي يساوي إنحرافه المعياري ($\sigma = -1$ على يسار μ ، و$\sigma = +1$ على يمين μ).

4.1 حساب الاحتمال في حالة التوزيع الطبيعي

– للحصول على قيمة احتمال أن تقع X بين نقطتين X_1 و X_2 فإن الاجراء العادي هو حساب تكامل الدالة $f(x)$ بين القيمتين X_1 , X_2 ، و هذا يتم باستعمال طريقة التكامل العددي كالآتي:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

– تختلف التوزيعات الطبيعية باختلاف قيم المعالم μ و σ، إلا أنه يمكن تحويل أي توزيع طبيعي للمتغير X_i إلى توزيع Z_i ذو معلمين $\mu=0$، و$\sigma^2=1$ و يسمى بالتوزيع الطبيعي المعياري (القياسي، أو النظامي).

2. التوزيع الطبيعي القياسي $Z \curvearrowright N(1\ ,\ 0)$

يعتبر التوزيع الطبيعي القياسي حالة خاصة من التوزيع الطبيعي بحيث أن متوسطه يساوي الصفر [$\mu=0$] و انحرافه المعياري يساوي الواحد [$\sigma=1$]، و يرمز له بـ Z_i.

1.2 تعريف

يقال أن المتغير العشوائي المتصل Z_i يتبع توزيع طبيعي قياسي متوسطه $\mu=0$ و إنحرافه المعياري $\sigma=1$ ، و يكتب باختصار:

$$Z \curvearrowright N(1\ ,\ 0)$$

تعطى دالة كثافة الاحتمالية بالشكل التالي: $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}zi^2}$ علماً أن $+\infty$ $-\infty$<Zi<

2.2 معنى متغير عشوائي موسط مختصر Variable Aléatoire Centrée Réduite

أ– إذا وضعنا $Zi = \frac{xi-\mu}{\sigma}$، فإننا سنجد متوسطه (توقعه) يساوي الصفر، لذلك يسمى بالمتغير العشوائي الموسط (centrée)، و يعبر عنه بالمعادلة المقابلة:

$$E(z)=\frac{\sum ni.zi}{ni} = \frac{\sum ni\,(\frac{xi-\bar{X}}{\delta})}{ni} = 0$$

ب– أما إذا حسبنا الإنحراف المعياري سيصبح المتغير العشوائي Z_i متغير مختزل (réduite) لأن $(E(z)=0)$ $V(x)=1$ كما هو مبين في العبارة التالية:

$$\sigma^2 = \int Z^2.F(z)\,dz - E^2(z) = 1$$

لذلك نقول أن المتغير العشوائي Z_i متغير موسط مختزل أو مختصر.

3.2 تحويل التوزيع الطبيعي إلى التوزيع الطبيعي القياسي

يمكننا المرور من أي توزيع طبيعي كيفي إلى توزيع طبيعي قياسي من خلال تغيير القيم الغير قياسية المتمثلة في X_i التي تتبع توزيع طبيعي إلى قيم قياسية المعبر عنها بـ Z_i التي تتبع التوزيع الطبيعي القياسي، و يكون ذلك وفقاً للعلاقة التالية:

$$X \curvearrowright N(\mu, \sigma) \Longrightarrow Z \curvearrowright N(0, 1)$$

$$Z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$$

على سبيل المثال إذا كان لدينا متغير عشوائي يتبع توزيع طبيعي

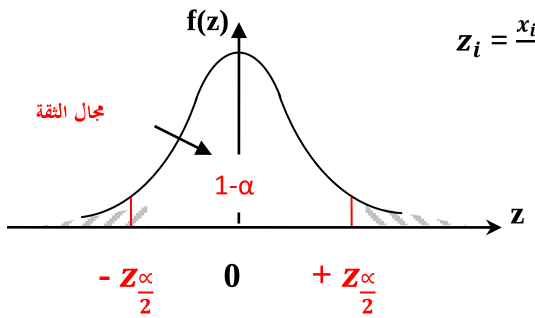
$$X \curvearrowright N(16, 3)$$

فيمكن تحويله إلى توزيع طبيعي قياسي من خلال العملية الحسابية الآتية:

$$z_i = \frac{x_i - 16}{3}$$

نقول إذاً أن X_i تتوزع توزيع طبيعي بالمعلمتين μ و σ يمكن أن نحولها إلى توزيع طبيعي معياري Z_i بالمعلمتين $\mu=1$ و $\sigma=0$.

ملاحظة: في التعبير عن متغير التوزيع الطبيعي القياسي كثيراً ما يتم استخدام T_i بدلا من Z_i نسبة إلى T لـ Student.



شكل.2: مجال الثقة للتوزيع الطبيعي القياسي

3 توزيع Student

1.3 تعريف: يعرف هذا النوع من التوزيع بدالة الكثافة الاحتمالية التالية:

يسمى هذا التوزيع بتوزيع T بحيث أن v تعبر عن درجة الحرية،

و c الثابت الذي يعتمد على v ليجعل المساحة تحت المنحنى تساوي الواحد.

2.3 استخدام جدول توزيع T

n>30: على الرغم من التشابه الكبير في الموجود بين توزيع T و التوزيع القياسي Z كون أن شكلهم يشبه الجرس، إلا أن توزيع T هو أكثر انخفاضاً من Z، و أنه كلما تزداد درجة الحرية فإن توزيع T يقترب من التوزيع القياسي Z، لذلك و لحساب الاحتمال في حالة متغير عشوائي قياسي غالباً ما نستعمل جدول توزيع Student المعبر عنه بـ **T**. (جدول.**1**).

n≤30: يختلف جدول توزيع T بعض الشيء عن التوزيع القياسي بحيث أن يعتمد على درجات الحرية التي تمثل العمود الرأسي و المساحات التي تمثل الخط الأفقي، بينما الأعداد الموجودة داخل الجدول تمثل قيم T المناظرة لدرجات الحرية و المساحة، عندما تكون (جدول.**3**).

مثال.1: عدد سنوات العمل (**x**) لمجموعة من الموظفين يتوزع توزيع طبيعي، بحيث أن متوسطه: **μ=20** و انحرافه المعياري **σ =5**.

1. أحسب احتمال أن يكون عدد سنوات العمل لموظف ما أقل من 25 سنة.
2. ما هي نسبة الموظفين الذين عدد سنوات عملهم ما بين 25 و 40 سنة ؟

الحل: **μ=20** و **σ =5**

X ↷ N(20, 5) ⟸ **Z ↷ N(0, 1)** بحيث أن $Z_i=\dfrac{x_i-20}{5}$

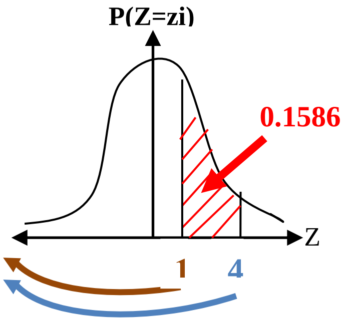
1. حساب احتمال أن يكون عدد سنوات العمل لموظف ما أقل من **25** سنة:

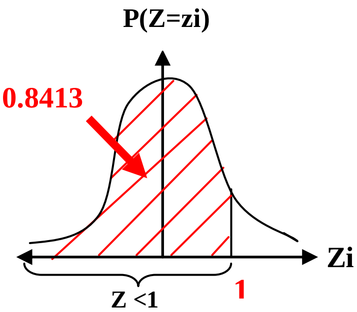
P(x<25)= $P(Z<\frac{25-20}{5})$ = P(Z <1)= **0.8413.**

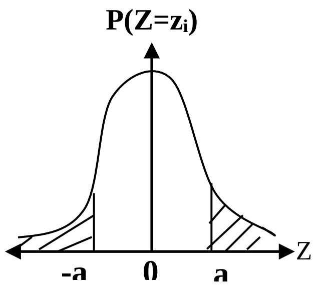
2. نسبة الموظفين الذين عدد سنوات عملهم ما بين **25** و **40** سنة

P(25<x<40)= $P(\frac{25-20}{5}< Z < \frac{40-20}{5})$ = P(1< Z <4)

= P(Z <4) - P(Z <1) =0.9999 - 0.8413 = **0.1586**







P(Z >a)=1 – P(Z≤a)

P(Z< -a) = 1 - P(Z≤a)

P(Z >-a)= P(Z<a)

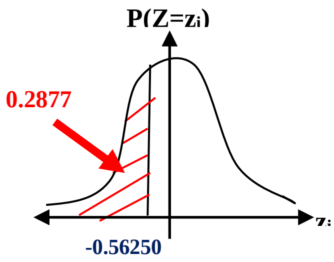
ملاحظة: عند حساب احتمال Z يقل أو يزيد عن قيمة a، فإنه من الضروري علينا تحويله إلى احتمال Z يقل عن القيمة a، ثم نذهب لجدول التوزيع الطبيعي لـ Student كي نقرأ قيمة الاحتمال($P(Z=z_i)$) .

مثال$_2$: إذا كان دخل **1000** أسرة متواجدة بمدينة ما يتبع توزيع طبيعي متوسطه **30000 دج** و انحرافه المعياري **8000** دج، لنفرض أن **x** متغير عشوائي يعبر عن دخل الأسر أوجد:

1. احتمال أن يكون دخل أسرة ما أقل من **25500** دج.

$$P(x<25500)= P\left(Z <\frac{25500-30000}{8000}\right)=P(Z <-0.5625)$$

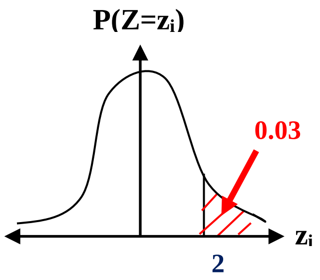
$$= 1- P(Z<+0.5625) =1 -0.7123 = \mathbf{0.2877}$$



2. نسبة الأسر التي دخلها عن **44000** دج.

$$P(x>44000)= P\left(Z >\frac{46000-30000}{8000}\right)$$

$$=P(Z>2)=1 - P(T<2) = 1-0.9773=\mathbf{0.03}$$



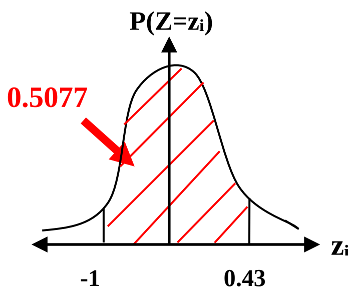
3. احتمال أن يكون دخل أسرة ما محصور بين 22000 و 33500 دج.

$$P(33500\le x\le 22000) = P(x\le 33500) - P(x\le 22000)$$

$$=P\left(Z \le\frac{33500-30000}{8000}\right)- P\left(Z \le\frac{22000-30000}{8000}\right)$$

$$=P(Z \le 0.43) - P(Z \le -1) \quad =P(Z \le 0.43) - [1- P(Z < +1)]$$

$$= 0.6664 - [1- 0.8413]= 0.6664 \ - [0.1587]= \mathbf{0.5077}$$



4. أوجد **عدد** الأسر التي يتراوح دخلها ما بين 22000 و 33500 دج.

Le nombre = P(33500≤x≤22000) = (0.5077) . 1000 = **507.7**≅ **508**