تمهيد

يلعب الإحصاء الإستدلالي دورا مهما في عملية اتخاذ القرارات في عدة ميادين، بحيث يهتم بإيجاد أو تقدير بعض الخصائص أو معلمات المجتمع محل الدراسة (المتوسط m، الإنحراف المعياري **σ**، نسبة صفة معينة في المجتمع P، ...)، لذلك غالبا ما تكون هذه المعلمات مجهولة و نرغب في تقديرها انطلاقاً من العينة. إن صعوبة الوصول إلى كل المجتمع بسبب ضيق الوقت و التكاليف الباهظة للبحث، يحتم على المؤسسة اللجوء إلى حساب ما يقابل معلمات المجتمع في العينة التي يشترط أن تكون ممثلة تمثيلاً صادقاً للمجتمع. تعتبر العينة صورة مصغرة من المجتمع، بحيث يمكن استخدام قيمة معلماتها كتقدير للمعلمة المناظرة لها في المجتمع، كأن يتم استخدام $\bar{x}$ لتقدير m و σ' لتقدير σ و هكذا.

1. تعريف نظرية التقدير

يعرف بأنه الطريقة العلمية التي تنطلق من الخاص إلى العام، أي الانطلاق من الدليل لإظهار نتيجته، بحيث يكون فيها استنباط القوانين من استنطاق الواقع. كما يعرف بأنه العلم الذي يدخل ضمن الإحصاء الاستدلالي الذي يهتم بمعالجة الإشارات التي تتعامل مع تقدير القيم من المعلَمات بناء على بيانات مقاسة أو تجريبية متعلقة بالعينة التي تم اختيارها عشوائياً من المجتمع المراد دراسته. المعلَمات تصف خصائص المجتمع وفقاً لتوزيع البيانات المقاسة، لذلك المقدّر يحاول أن يضع قيم تقريبية للمَعلَمات المجهولة للمجتمع، باستخدام قياسات (معلمات) مستنبطة من العينة المدروسة. ضمن نظرية التقدير، يفترض أن البيانات المقاسة تكون عشوائية مع توزيع احتمالي غالباً ما يكون طبيعي، مرتكزاً على مَعلَمات العينة التي اختيرت بالصدفة. على سبيل المثال، في الدراسات التسويقية، غالبا ما ترتبط القياسات التي تحتوي على معلومات حول محفزات الشراء بالآراء التي يدلي بها زبائن العينة المدروسة (التي تم اختيارها بالصدفة). فبدون عشوائية المشكلة تكون حتمية و لن تكون هناك حاجة تقدير.

2. معالم جودة التقدير

عندما نكون بصدد تقدير معلمة من معالم مجتمع محل دراسة، غالباً ما نحتاج إلى اختيار المعلمة ($\bar{x}$،σ'، ..) المناسبة في العينة لتقدير معلمة المجتمع (m،σ، ..). تسمى المعلمة المستخدمة في عملية التقدير بـ"**المقدر**". يتميز المقدر بمجموعة من الخصائص نذكر منها:

2.1عدم التحيز: متوسط العينة $\bar{x}$ بأنه متحيز لمتوسط المجتمع m لأن $E(\bar{x})\neq m$

2.2 **فعالية**: تشير إلى مقدار التباين الفعال لتوزيع المعاينة للإحصائية، التقدير الذي يجب اختياره يكون تباينه هو الأصغر.

3.2 **التقارب**: نقول عن مقدر أنه متقارب إذا كان يؤول إلى قيمة المعلمة المقدرة عندما يؤول حجم العينة إلى ما لا نهاية.

للقيام بالتقدير يمكن للباحث اللجوء إلى طريقتين، الأولى التقدير بقيمة المتوسط، النسبة أو بالانحراف المعياري، الذي يسمى بالتقدير النقطي المعروف ببساطته و الذي لا يعطي نتائج دقيقة، و الثانية التقدير بمجال الثقة الذي يعتبر رائج الاستخدام.

3. التقدير النقطي

يمكن لقيمة وحيدة من العينة ($\bar{\mathbf{X}}$) أن تستخدم لتقدير المعلمة المقابلة لها في المجتمع (m) و هذا ما يعرف بالتقدير النقطي. كأن نقول: بما أن متوسط رقم الأعمال اليومية لمحل معين هو $\bar{X}$=100000 فإن متوسط رقم أعمال كل المحلات المتواجدة بنفس المنطقة هو m=100000.

4. التقدير بفترة (مجال الثقة)

التقدير بنقطة نادراً ما يساوي المعلمة التي المراد تقديرها، لذلك يجب تحديد فترة أو مجال يحتوي على مجموعة من القيم تتضمن قيمة معلمة المجتمع، تسمى هذه الفترة بفترة الثقة. احتمال وقوع المعلمة في هذا المجال يسمى بدرجة الثقة و يرمز لها بـ [1-α]، و مكمل هذه القيمة يسمى بمستوى **المعنوية** و يرمز له بـ [α]. مثلاً إذا كانت درجة الثقة 95% يكون مستوى المعنوية 0.05. كما يشار لهذا الأخير بأنه مستوى خطأ التقدير.

فإذا كان أمامنا تقدير المعلمة m بفترة ثقة، و إيجاد مجال من الشكل $[m_1- m_2]$ بحيث تنتمي هذه المعلمة إلى هذا المجال باحتمال معين، يسمى هذا الاحتمال **بقياس الثقة** (1 - α) يعبر عنه بالمعادلة التالية:

$$\mathbf{P\ [m \in (m_1 - m_2)] = P\ (m_1 \leq m \leq m_2) = 1 - \alpha}$$

بحيث أن m_1, m_2: تعبر عن حدود مجال الثقة أي الحد الأدنى و الحد الأقصى.

5. درجة و معامل الثقة

كما رأينا في الدرس الأول بأنه عندما تتوزع x توزيعاً طبيعياً، فإنه من بين خصائص المنحنى الطبيعي أن: **%68.26** من البيانات محصورة بين $[\bar{x} \mp 1.\sigma_x]$، و **%95.44** بين $[\bar{x} \mp 2.\sigma_x]$، و أن **%99.72** من البيانات محصورة بين $[\bar{x} \mp 3.\sigma_x]$، بحيث يمثل x المتغير و الانحراف (الخطأ) المعياري. بنفس المبدأ إذا كان لدينا مجتمعاً إحصائياً يتوزع توزيعاً طبيعياً، و سحبنا منه عينات كبيراً نسبياً لها نفس الحجم $(n_i \geq 30)$، فإن توزيع المعاينة للوساط الحسابي للمجتمع **(m)** يكون له هو الآخر توزيعاً طبيعياً، بحيث يرتكز تقديره على الوسط الحسابي للعينة $(\bar{\mathbf{X}}_i)$ ، بمعنى أن تقدير المتوسط الحسابي للمجتمع يساوي المتوسط الحسابي للعينة $\mp$ الانحراف المعياري لمتوسط للعينة.

لو قمنا بالتعبير عن هذا التقدير بالرموز لوجدنا ما يلي:

$$P[m= \bar{x} \mp 1.\sigma_{\bar{x}}]=0.6826$$

$$P[m= \bar{x} \mp 2.\sigma_{\bar{x}}]=0.9544$$

$$P[m= \bar{x} \mp 3.\sigma_{\bar{x}}]=0.9972$$

بحيث أن:

- **P:** يعبر عن الاحتمال؛
- **m:** الوسط الحسابي المقدر للمجتمع؛
- **1، 2، و 3:** معامل التقدير أو $t\alpha$ **الجدولية**؛
- **m:** الخطأ المعياري للمتوسط الحسابي
- **درجة الثقة:** 0.6826، 0.9544، 0.9972؛

6. تقدير الوسط الحسابي للمجتمع بفترة ثقة:

ليكن لدينا مجتمع إحصائي يتوزع توزيع طبيعي [أي $N(m, \sigma)$]، وسطه الحسابي m مجهول و انحرافه المعياري σ معلوم، سحبنا منه عينة عشوائية ذات حجم n، عناصرها على التوالي: x_1، x_2،...، x_n. ، وسطها الحسابي $\bar{\mathbf{X}}$ وانحرافها المعياري σ'. لا يمكننا إيجاد قيمة محددة لمتوسط المجتمع m بل نحاول حصر قيمتها داخل مجال معين بين m_1 و m_2 يسمى هذا المجال المحصور بفترة الثقة، وذلك يكون تحت احتمال P، بحيث أن هذا الأخير يساوي $1-\alpha$، وتكتب على النحو الآتي:

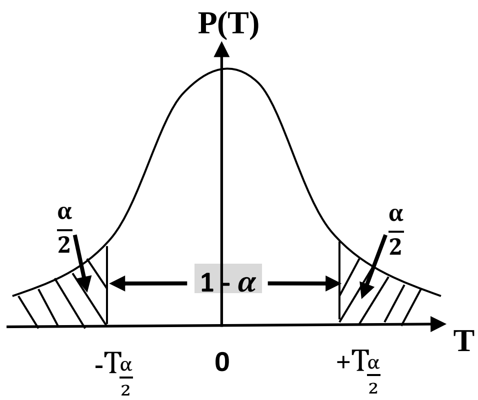
إذا كان لدينا: $(n \leq 0.05N)$ $\quad N \rightarrow +\infty$

فإن: $P/ m \in [m_1 - m_2] = 1 - \alpha$

ليكن $\bar{\mathbf{X}}$ متغير عشوائي لأي عينة غير حصرية (شاملة) ذات حجم n أكبر من 30 مرفقة لمتوسط هذه العينة، $\bar{\mathbf{X}}$ يأخذ بصفة متتالية القيم التالية: $\bar{\mathbf{X}}_1$، $\bar{\mathbf{X}}_2$، ....

نفرض أن كل الشروط متوفرة لاستخدام نتائج نظرية النهاية المركزية والقيام بالتقريبات التالية:

المتغير العشوائي يتبع القانون الطبيعي $N(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ بمعنى المتغير العشوائي $T= \frac{\bar{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ يتبع القانون الطبيعي الموسط المختصر $N(0, 1)$.



$$\bar{X} \sim N(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}), \quad T \sim N(0, 1), \quad T = \frac{\bar{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$\Leftrightarrow \quad P(-T_{\frac{\alpha}{2}} \leq T \leq +t_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad P(-T_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq +T_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad P(-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}T \leq \bar{X} - m \leq +\frac{\sigma}{\sqrt{n}}T_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad P(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}T_{\frac{\alpha}{2}} \leq m \leq \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}T_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

إذاً مجال تقدير متوسط المجتمع **m** هو: $P(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}T_{\frac{\alpha}{2}} \leq m \leq \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}T_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$

نقول أن $[\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}T_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}T_{\frac{\alpha}{2}}]$ هو مجال الثقة لـm مع معامل الثقة $1 - \alpha$، مركزه هو المتوسط $\bar{\mathbf{X}}$ للعينة التي تم اختيارها بالصدفة. و نلاحظ أننا طرحنا القيمة $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}T_{\frac{\alpha}{2}}$ على يسار المتوسط $\bar{\mathbf{X}}$ كما أننا أضفنا تلك القيمة على اليمين.

σ	الحالة الأولى: $n \geq 30$	الحالة الثانية: $n < 30$ نفرض أن المجتمع يخضع إلى التوزيع الطبيعي
معلومة	نقرأ $T_{\frac{\alpha}{2}}$ من الجدول(**02**) و نعوض في معادلة التقدير	نقرأ $T_{\frac{\alpha}{2}}$ من الجدول (02) و نعوض في معادلة التقدير
مجهولة	نقرأ $T_{\frac{\alpha}{2}}$ من الجدول (02) ؛ نقرأ أو نقدر σ بـ S بحيث أن: **تباين المجتمع:** $S^2 = \frac{\sum(x_i-\bar{X})^2}{n-1}$ **وتباين العينة:** $S'^2 = \frac{\sum(x_i-\bar{X})^2}{n}$	نقرأ **σ** بـ **S** بحيث أن: **المجتمع: التباين:** $\sigma^2=S^2 = \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$ **الإنحرف المعياري:** σ=S **العينة:التباين:** $\sigma'^2=S'^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}$ **الإنحرف المعياري:** σ'=S' نقرأ $T_{\frac{\alpha}{2}}$ من الجدول (03) و نعوض في معادلة التقدير
ملاحظة: الجدول(2) هو جدول القانون الطبيعي الموسط المختصر الذي يدعى بالفرنسية بـ la Loi Normale Centrée Réduite		

المثال1: تقوم مؤسسة معينة بإنتاج نوع من البطاريات، بحيث أن متوسط مدة اشتغال 50 بطارية من تلك التي أنتجتها هو 1000 سا. إذا علمت أن الإنحراف المعياري لمدة إشتغال البطاريات التي تنتجها المؤسسة هو 40 سا. قدر مستوى إشتغال هذه البطاريات بفترة ثقة (قياس الثقة 95%).

الحل: $\bar{X}=1000$ h, $n = 50$, $\sigma = 40$ h, $1-\alpha = 95\%$

$$\mathbf{P(-t_{\frac{\alpha}{2}} \leq T \leq +t_{\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha}$$

$$\bar{X} \curvearrowright N(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}), \quad T \curvearrowright N(0,1), \quad T = \frac{\bar{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$\mathbf{P(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}} \leq m \leq \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha}$$

من الجدول (02): $t_{\frac{\alpha}{2}}= 1.96$ لأن **$\alpha = 5\%$** و **$1-\alpha = 95\%$**

$$P(1000 - \frac{40}{\sqrt{50}}(1.96) \leq m \leq 1000 + \frac{40}{\sqrt{50}}(1.96)) = 0.95$$

$$\mathbf{P(988,90 \leq m \leq 1071,08) = 95\%}$$

المثال2: متوسط الدخل الفردي الشهري لعينة مكونة من 80 مواطن يقطنون بحي معين هو 32000 ون، بانحراف معياري (للعينة) قدره 600 ون. قدر متوسط الدخل الفردي الشهري لسكان هذا الحي بفترة ثقة. (قياس الثقة بـ 98%)

الحل $n = 80$, $\bar{X}=12000$، $1-\alpha = 98\%$, $\sigma' = 600$, $\sigma = ?$

$$\bar{X} \curvearrowright N(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}), \quad T \curvearrowright N(0,1), \quad T = \frac{\bar{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$\mathbf{P(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}} \leq m \leq \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha}$$

σ للمجتمع مجهولة لذلك تقدرها بـ S

نعلم أن: $\sum(x_i-\bar{x})^2 = \sigma^2.n$ إذن $\mathbf{S^2} = \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$

$$\sigma^2= \frac{\sum(x_i-\bar{X})^2}{n} \Rightarrow S^2 = \frac{n.\sigma^2}{n-1} \Rightarrow S^2 = \frac{80.(600)^2}{80-1} =603.78$$

من الجدول.2: $t_\alpha= 2.32$ لأن **$\alpha = 2\%$** و **$1-\alpha = 98\%$**

$$P(12000 - \frac{603.78}{\sqrt{80}}(2.32) \leq m \leq 12000 + \frac{603.78}{\sqrt{80}}(2.32)) = 0.98$$

$$P(988,90 \leq m \leq 1071,08) = 95\%$$

المثال.4: الدخل الشهري للعائلات

متوسط الدخل الشهري العائلي لعينة مكونة من 80عائلة (سحبت بدون إرجاع) متواجدة بحي معين هو 32000دج، بانحراف معياري قدره 600دج. إذا علمت أنه يسكن بهذا الحي 945 عائلة، قدر متوسط الدخل الشهري لعائلات هذا الحي بفترة ثقة. (قياس الثقة بـ 98%).

الحل: $\bar{X} = 32000$ DA, $n = 80$, $\sigma = ?$ $\sigma' = 600$ DA, $1-\alpha = 98\%$

بما أن $n=80 > [0.05(945)=47.25]$ إذا نقوم بتعديل الانحراف المعياري بضربه بـ $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$.

$$P(-T_{\frac{\alpha}{2}} \leq T \leq +T_{\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$$

$$P\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}.T_{\frac{\alpha}{2}} \leq m \leq \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}.T_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

σ للمجتمع مجهولة لذلك نقدرها بـS، كذلك نعلم أن تباين العينة: $\sigma'^2 = S'^2 = \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}$

ومنه $\sum(x_i-\bar{x})^2 = \sigma'^2.n = (600)^2.80 = 28800000$

– نعلم كذلك أن تباين المجتمع: $\sigma^2 = \frac{28800000}{80-1} = 364556.96 = \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n-1}$

ومنه الانحراف المعياري للمجتمع يساوي: $\sigma = 603.78$

من جدول (02) التوزيع الطبيعي المركز المختصر: $T_{\frac{\alpha}{2}} = 2.326$ لأن $\alpha = 2\%$ و $1-\alpha = 98\%$

$$P\left(32000 - \frac{603.78}{\sqrt{80}}\sqrt{\frac{945-80}{945-1}}(2.326) \leq m \leq 32000 + \frac{603.78}{\sqrt{80}}\sqrt{\frac{945-80}{945-1}}(2.326)\right) = 0.98$$

$$P(31849.78 \leq m \leq 32150.296) = 98\%$$

الاستنتاج: متوسط الدخل الشهري لعائلات هذا الحي محصور بين 31849.78ون و 32150.296ون و هذا بنسبة 98%.

7. تقدير النسبة في المجتمع بفترة ثقة

نسبة عناصر المجتمع التي تتميز بخاصية معينة هي **P**، نسحب منه عينة ذات حجم **n**، نسبة عناصرها التي تتميز بالخاصية هي $\hat{p}$، تقدير نسبة المجتمع **P** بمجال الثقة باستعمال نسبة العينة $\hat{p}$ يتم كالآتي:

$$T \sim N(0,1),\ \hat{P} \sim N\left(P, \sqrt{\frac{p.q}{n}}\right) \qquad T = \frac{\hat{P}-P}{\sqrt{\frac{p.q}{n}}}$$

$$P(-t_{\frac{\alpha}{2}} \leq T \leq +t_{\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha \iff P\left(-t_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\hat{P}-P}{\sqrt{\frac{p.q}{n}}} \leq +t_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$\iff P\left(-\sqrt{\frac{p.q}{n}}\,t_{\frac{\alpha}{2}} \leq \hat{P} - P \leq +\sqrt{\frac{p.q}{n}}\,t_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

ملاحظة هامة: نعوض **P** (الموجود تحت الجذر التربيعي) بـ $\hat{P}$ في جدول المتراجحة نجد:

$$P\left(\hat{P} - \sqrt{\frac{p.q}{n}}\,t_{\alpha} \leq P \leq \hat{P} + \sqrt{\frac{p.q}{n}}\,t_{\alpha}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\hat{P} - \sqrt{\frac{\hat{p}.\hat{q}}{n}}\,t_{\frac{\alpha}{2}} \leq P \leq \hat{P} + \sqrt{\frac{\hat{p}.\hat{q}}{n}}\,t_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

حيث أن t_α تقرأ من جدول.2 للتوزيع الطبيعي و $n \geq 30$، و $[q=1-p]$

مثال.5: ضمن عينة مكونة من 80 عائلة في مدينة معينة، وجدنا 45 عائلة تملك سيارة. قدر نسبة العائلات في هذه المدينة التي تملك سيارات بفترة ثقة (قياس الثقة 98%).

الحل: $1-\alpha= 0.98$، $P= \frac{45}{80}=0.56$، $n=80$ ،

$$P(\widehat{P} - \sqrt{\frac{\hat{p}.\hat{q}}{n}}\, t_{\frac{\alpha}{2}} \leq P \leq \widehat{P} + \sqrt{\frac{\hat{p}.\hat{q}}{n}}\, t_{\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$$

حيث أن $t_{\frac{\alpha}{2}}$ تقرأ من جدول.2 للتوزيع الطبيعي و $n \geq 30$: $t_{\frac{\alpha}{2}}= 2.32$ $\quad \alpha= 0.02 \quad 1-\alpha=0.98$

$$P(0.56 - \sqrt{\frac{0,56.0.44}{80}}(2.32) \leq P \leq 0.56 + \sqrt{\frac{(0.56)(0.44)}{80}}(2.32)) = 98\%$$

$$P(0.43\leq P \leq 0.68) = 98\%$$

8. تقدير الفرق للوسطين الحسابين للمجتمعين بفترة ثقة

نعتبر مجتمعين الأول وسطه الحسابي m_1 و انحرافه المعياري σ_1، و الثاني وسطه الحسابي m_2 و انحرافه المعياري σ_2. نسحب من الأولى عينة ذات حجم n_1 و وسطها الحسابي $\overline{X}_1$، و نسحب من الثانية عينة ذات حجم n_2 و وسطها الحسابي $\overline{X}_2$. عندما يطلب منا إيجاد فترة الثقة للفرق بين متوسطي المجتمعين أي فترة الثقة لـ $m_1 - m_2$، نفرض أن حجم المجتمع **الأول** يؤول إلى ∞ و نفس الشيء بالنسبة للمجتمع **الثاني** ثم نكتب ما يلي:

$$P(\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\, t_{\frac{\alpha}{2}} \leq (m1 - m2) \leq \overline{X}_1 - \overline{X}_2 + \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\, t_{\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$$

σ_1 و σ_2	الحالة الأولى: $n \geq 30$	الحالة الثانية: $n< 30$ نفرض أن المجتمع يخضع إلى التوزيع الطبيعي
معلومتين	نقرأ من الجدول $t_{\frac{\alpha}{2}}$ (02) و نعوض في معادلة التقدير	نقرأ من الجدول $t_{\frac{\alpha}{2}}$ (02) و نعوض في معادلة التقدير
مجهولتين	نقرأ $t_{\frac{\alpha}{2}}$ من الجدول (02) ؛ نقدر σ_1 بـ S_1 و σ_2 بـ S_2 بحيث أن: تباين المجتمع: $S^2 = \frac{\sum(x_i-\overline{X})^2}{n-1}$ وتباين العينة: $S'^2 = \frac{\sum(x_i-\overline{X})^2}{n}$	نفرض أن للمجتمعين نفس التباين بحيث أننا **نقرأ** (أو **نقدر**) σ_1^2 و σ_2^2 **بالتباين مشترك** S^{*2} $S^{*2} = \frac{\sum(x_{1i}-\overline{X}_1)^2+\sum(x_{2i}-\overline{X}_2)^2}{n_1+n_2-2}$ **نقرأ من الجدول.3** (درجة الحرية $dl = n_1 + n_2 - 2$)
ملاحظة: **الجدول(2) هو** جدول القانون الطبيعي الموسط المختصر الذي يدعى بالفرنسية بـ la Loi Normale Centrée Réduite		

مثال.4: متوسط أجور عينة من 24 عامل يشتغلون في مؤسسة أ هو 32000 دج بانحراف معياري (للعينة) قدره 900 دج و متوسط أجور عينة من 22 عامل يشتغلون في المؤسسة ب هو 28000 دج بانحراف معياري (للعينة) قدره 600 دج.

– قدر الفرق بين متوسطي أجور العمال في المؤسسة بفترة ثقة (قياس الثقة **95%**).

الحل: $n_2 =22<30$, $\overline{X}_2 = 28000$, $\sigma'_2= 600$ $\quad n_1 =24<30$, $\overline{X}_1 = 32000$, $\sigma'_1= 900$

تخضع أجور العمال إلى توزيعين طبيعيين لهما نفس التباين. **σ_1 و σ_2 مجهولين**: نفرض أن للمجتمعين نفس التباين و **نقدر** σ_1^2 و σ_2^2 بـ S^{*2}.

$$S^{*2} = \frac{\sum(x_{1i}-\overline{X}_1)^2+\sum(x_{2i}-\overline{X}_2)^2}{n_1+n_2-2}$$

$$\sigma_1^2 = \frac{\sum(x_{1i}-\bar{X}_1)^2}{n_1} \quad \sum(x_{1i}-\bar{X}_1)^2 = \sigma_1^2.n_1 = 900^2.24 = \mathbf{19440000}$$

$$\sigma_2^2 = \frac{\sum(x_{2i}-\bar{X}_2)^2}{n_2} \quad \sum(x_{2i}-\bar{X}_2)^2 = \sigma_2^2.n_2 = 600^2.22 = \mathbf{7920000}$$

$$S^{*2} = \frac{19440000+7920000}{24+22-2} = \mathbf{621818.18}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{1-\alpha} = 0.95 \quad \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0.05} \\ \mathbf{dl} = 25+20-2=\mathbf{43} \end{array}\right\}$$

عندما ننظر في

الجدول.3 سنجد

$$\mathbf{t_\alpha = 1.95}$$

$$\mathbf{P}\left(\bar{X}_1-\bar{X}_2-\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\ t_{\frac{\alpha}{2}} \le m_1 - m_2 \le \bar{X}_1-\bar{X}_2+\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\ t_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$\mathbf{P}\left(4000-\sqrt{\frac{621818.18}{24}+\frac{621818.18}{22}}.(1.95) \le m_1 - m_2 \le 4000+\sqrt{\frac{621818.18}{24}+\frac{621818.18}{22}}.(1.95)\right) = 95\%$$

$$\mathbf{P(3546.14 \le m_1 - m_2 \le 4453.86) = 0.95}$$

9. تقدير الفرق بين نسبتين للمجتمعين بفترة ثقة:

لنفرض أنه لدينا مجتمعين يتميز كل واحد منهما على التوالي بالخاصية P_1 و P_2. نسحب من المجتمع الأول عينة ذات حجم n_1 بحيث أن نسبة الخاصية فيها هي $\hat{P}_1$، و نسحب من المجتمع الثاني عينة ذات حجم n_2 و نسبة الخاصية فيها هي $\hat{P}_2$. عندما يطلب منا إيجاد فترة الثقة للفرق بين متوسطي المجتمعين أي فترة الثقة لـ $\mathbf{m_1}$ – $\mathbf{m_2}$، نفرض أن حجم المجتمع **الأول** يؤول إلى ∞ و نفس الشيء بالنسبة للمجتمع **الثاني** ثم نكتب ما يلي

$$\mathbf{P}\left(\hat{P}_1-\hat{P}_2-\sqrt{\frac{\hat{p}_1.\hat{q}_1}{n_1}+\frac{\hat{p}_2.\hat{q}_2}{n_2}}\ t_{\frac{\alpha}{2}} \le P_1-P_2 \le \hat{P}_1-\hat{P}_2+\sqrt{\frac{\hat{p}_1.\hat{q}_1}{n_1}+\frac{\hat{p}_2.\hat{q}_2}{n_2}}\ t_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

مثال.6: اقترحت صيغة جديدة لبيع السيارات، فكانت نسبة الموافقين على هذه الصيغة في عينة مكون من 70 شخص يسكنون بمدينة "أ" هي 68%، و كانت نسبة الموافقين على نفس الصيغة في عينة مكونة من 95 شخص في المدينة "**ب**" هي 62%.

– قدر الفرق بين نسبتي الموافقين على تلك الصيغة بين المدينتين "أ" و "**ب**" بفترة ثقة. (قياس الثقة 95%)

الحل $\mathbf{n_1=70,\quad P_1=0.68\ (q_1=0.32),\ \ n_2=95,\quad P_2=0.62\ (q_2=0.38)}$

حيث أن $\mathbf{t_{\frac{\alpha}{2}}}$ تقرأ من جدول.**2**. $t_{\frac{\alpha}{2}}= 1.96$ $\quad \alpha= 0.05 \quad 1-\alpha=0.95$

$$\mathbf{P}\left(\hat{P}_1-\hat{P}_2-\sqrt{\frac{\hat{p}_1.\hat{q}_1}{n_1}+\frac{\hat{p}_2.\hat{q}_2}{n_2}}\ t_{\frac{\alpha}{2}} \le P_1-P_2 \le \hat{P}_1-\hat{P}_2+\sqrt{\frac{\hat{p}_1.\hat{q}_1}{n_1}+\frac{\hat{p}_2.\hat{q}_2}{n_2}}\ t_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(0.68-0.62-\sqrt{\frac{(0.68).(0.32)}{70}+\frac{(0.62).(0.38)}{95}}(1.96) \le P_1-P_2 \le 0.68-0.62+\sqrt{\frac{(0.68).(0.32)}{70}+\frac{(0.62).(0.38)}{95}}(1.96)\right) = 95\%$$

$$\mathbf{P(-\,0.086 \le P_1-P_2 \le 0.2062\,) = 95\%}$$