وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة أبو بكر بلقايد – تلمسان –

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية والتسيير والعلوم المالية

قسم علوم التسيير

سلسلة محاضرات في مقياس رياضيات المؤسسة

سنة ثانية علوم التسيير

من إعداد:

الأستاذة: حليمي وهيبة

الموسم الجامعي: 2022/2021

I. البرمجة الخطية:

1- تعريف البرمجة الخطية:

يمكن تعريفها على أنها تلك الطريقة أو الأسلوب الرياضي الذي يستخدم للمساعدة في التخطيط واتخاذ القرارات المتعلقة بالتوزيع الأمثل للموارد المتاحة، وذلك بهدف زيادة الأرباح أو تخفيض التكاليف. حيث تبحث في توزيع الموارد المحدودة بين الاستخدامات البديلة ضمن إطار القيود والشروط المفروضة، وذلك لتحقيق الأهداف التي تسعى إلى تحقيقها منظمات الأعمال سواء كان ذلك في حالة تعظيم (maximize) قيمة دالة الهدف، كما هو الحال في تعظيم العوائد النقدية المتوقعة من خطة الإنتاج المقترحة، وقد يتعلق الأمر بتدنية (minimize) دالة الهدف، كما هو الحال في تدنية التكاليف المترتبة عن تنفيذ العمليات الإنتاجية.

عموما يمكن القول أن البرمجة الخطية هي أسلوب رياضي يمكن توظيفه لتوزيع الموارد والإمكانات المحدودة ضمن مجموعة من القيود والعوامل الثابتة وصولا إلى تحقيق مثالية التوزيع. وهي أيضا ذلك الأسلوب الرياضي الذي يستهدف الوصول إلى تحقيق الأمثلية والذي يتم بموجبه تخصيص الموارد المحدودة من أجل تحقيق الهدف المحدد.

2- استخدامات البرمجة الخطية:

يستخدم نموذج البرمجة الخطية بشكل واسع لحل المشكلات التي توجه منظمات الأعمال في مجالات كثيرة، نذكر منها الأمثلة التالية:

* في حالة التعظيم: تعظيم الأرباح

تعظيم الإنتاج

تعظيم طاقات التخزين

تعظيم استخدام رؤوس الأموال

تعظيم استخدام اليد العاملة

* في حالة التدنية: تدنية التكاليف

تدنية الخسائر

تدنية عدد الموظفين

تدنية الأجور الإجمالية

بالرغم من كل المزايا التي يتصف بها أسلوب البرمجة الخطية، إلا أن هناك بعض الانتقادات التي توجه له من الناحية التحليلية، نذكر:

* لا يأخذ أسلوب البرمجة الخطية بعين الاعتبار حالات عدم التأكد في الحياة الصناعية والتجارية، كونه يفترض أن جميع العلاقات بين المتغيرات معروضة ومؤكدة الحدوث.

* يتطلب أسلوب البرمجة الخطية في التحليل كمية من المعلومات التي قد يصعب الحصول عليها في المنشآت الصغيرة والمتوسطة الحجم في الظروف الاعتيادية.

* إن أغلب العلاقات بين المتغيرات في الحياة العملية هي علاقات ذات طبيعة غير خطية، مما يتعذر تطبيق أسلوب البرمجة الخطية كونه يتميز بصفة الخطية.

* عدم اهتمام هذا الأسلوب بالمتغيرات الوصفية (المتغيرات التي لا يمكن قياسها كميا)، والتي قد يكون لها تأثير كبير في صنع القرارات.

* يتعذر تطبيق هذا الأسلوب في حل المشكلات المعقدة والتي تحتوي على كم كبير من المتغيرات حلا يدويا، مما يتطلب استخدام برمجيات الحاسوب لحلها.

3– افتراضات نموذج البرمجة الخطية:

الافتراضات وهي الشروط العلمية الأساسية الواجب توفرها في المشكلة حتى نستطيع حلها بواسطة البرمجة الخطية.

لكي تكون نتائج تطبيق نموذج البرمجة الخطية صادقة وموثوق بها من الناحيتين العلمية والعملية، ينبغي توفر بعض الشروط الأساسية في صياغة (بناء) النموذج، يطلق على هذا الشرط بافتراضات النموذج الرياضي العام للبرمجة الخطية، نذكر:

✍ الخطية Linearity

يجب أن تكون العلاقة بين متغيرات دالة الهدف وقيود النموذج ذات طبيعة خطية، أي أن حدوث أي تغيرات في قيمة أحد المتغيرات تؤدي إلى تغيرات ثابتة ومتناسبة في قيمة المتغيرات الأخرى، الداخلة في النموذج.

✍ التأكد Certainty

يجب أن تكون معاملات المتغيرات القرارية في دالة الهدف وقيود النموذج معروفة وثابتة أثناء فترة معالجة المشكلة المدروسة.

✍ التناسبية Proportionality

يجب أن تكون مساهمة العوامل في دالة الهدف والكميات المستخدمة من الموارد في القيود متناسبة مع قيمة كل متغير من المتغيرات القرارية.

✍ الإضافية

كل نشاط يتم إضافته يتحد مع مجموعة قيود النموذج، أي عدم وجود تداخل بين الأنشطة المختلفة.

✍ قابلية القسمة

يشير هذا الافتراض إلى إمكانية أن تأخذ بعض المتغيرات القرارية قيما كسرية وليس بالضرورة أن يتم التعبير عن جميع المتغيرات بأعداد صحيحة.

✍ عدم السلبية

أن تكون قيم المتغيرات القرارية موجبة ($x_{j,}\ y_o$) وهذا يعني أنه ليس من المعقول أن يتم إنتاج عدد سالب من الحافلات أو الطائرات.

4- صياغة نموذج البرمجة الخطية:

عامة يتم صياغة النموذج الرياضي للبرمجة الخطية على الشكل التالي:

$$\text{Optimize} \quad Z= f(x_1, x_2,\ldots\ldots x_n)$$

$$\text{Subject to} \quad \left.\begin{array}{l} g_1(x_1, x_2,\ldots\ldots x_n) \\ g_2(x_1, x_2,\ldots\ldots x_n) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2,\ldots\ldots x_n) \end{array}\right\} \begin{array}{c} \leq \\ = \\ \geq \end{array} \left\{\begin{array}{l} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{array}\right. \qquad (1.1)$$

تكون القيود دائما في شكل معادلات أو متراجحات ≥،=،≤، و $b_1,\ldots b_m$ تكون أعداد ثابتة.

نقول عن النموذج الرياضي (1.1) أنه خطي إذا وفقط إذا كانت دالة الهدف $f(x_1, x_2, \ldots,x_n)$ والقيود $g_i(x_1,x_2 ,\ldots,x_n)/\ (i= 1,2,..,n)$ كانتا خطيتان وتتخذان الصيغ التالية:

$$F(x_1,x_2,\ldots, x_n)= c_1x_1+c_2x_x+\ldots+c_nx_n \qquad (1.2)$$

$$G_i(x_1,x_2,\ldots x_n)= a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_{in} \qquad (1.3)$$

$i=1,2,..,m$

$j=1,2,..,n$

حيث c_j و a_{ij} هي ثوابت معلومة.

إذن الآن يمكن كتابة النموذج الرياضي للبرمجة الخطية على الشكل التالي:

الخطوة 01: تحديد الهدف والتعبير عنه بصيغة رياضية.

الخطوة 02: تحديد جميع القيود والتعبير عنها رياضيا.

الخطوة 03: البحث عن أي شروط مخفية، والتي لم يتم التعبير عنها بشكل صريح كشروط عدم السلبية أو شروط الأرقام التامة لمتغيرات القرار.

يصاغ النموذج كما يلي:

$$\text{Optimize} \quad Z= c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+\ldots+c_nx_n$$

$$\text{Subject to} \quad a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{1n}x_n \ (\leq,=\geq)\ b_1$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\ldots+a_{2n}x_n \ (\leq,=\geq)\ b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3+\ldots+a_{in}x_n \ (\leq,=\geq)\ b_i$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+\ldots+a_{mn}x_n \ (\leq,=\geq)\ b_m$$

شروط عدم السلبية:

$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ x_3\geq 0,\ldots,\ x_n\geq 0$$

$x_1,x_2,..,x_n$ متغيرات القرار (المجهولة القيمة)

$c_1,c_2,..,c_n$ معاملات متغيرات القرار في دالة الهدف

$a_{11},a_{12},..,a_{mn}$ معاملات متغيرات القرار (والمسماة عادة المعاملات التقنية) في مختلف القيود، وتمثل a_{ij} كمية المورد i المطلوب لتوفير وحدة من x_j.

$b_1,b_2,..,b_m$ هي الحدود الثانية للقيود وتمثل عامة الكميات المختلفة المتاحة.

إن البحث عن التسمية المثالية للدالة z (تعظيم أو تدنية) هو تحديد قيم مختلف متغيرات القرار x_j وهذا باحترام القيود (التي تسمى القيود التقنية أو الوظيفية).

c_j, b_i, a_{ij} هي كميات معروفة ومعطاة (يطلق عليها أيضا اسم المعايير).

*ملاحظة: أي نموذج رياضي لا يحترم الشكل السابق (ولو شرط واحد) يعتبر نموذجا غير خطي.

نذكر بعض الحالات الخاصة في البرمجة الخطية:

- النمذجة بالأرقام التامة: وهي نمذجة خطية ولكن بتحفظ أو قيد إضافي، وهو أن مدخلات النموذج يجب أن تكون تامة بغض النظر عن المعاملات التقنية والمعاملات للمتغيرات في دالة الهدف أي (c_j, a_{ij}).

- النمذجة (الرنامج الربيعي): هي برمجة رياضية تكون فيها القيود خطية بينما دالة الهدف تأخذ الشكل التالي:

$$F(x_1,x_2,..,x_n)= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_ix_j+\sum_{i=1}^{n} d_{ij}x_j$$

حيث d_j, c_{ij} هي قيمة معلومة وثابتة.

مع: $d_1=d_2=0$

$C_{11}=1$

$C_{22}=0$

$C_{12}=c_{11}=0$

مثال: المؤسسة REMCO

تنتج نوع من الآلات الالكترونية، نميز بين النموذج الاقتصادي والنموذج الرفاهي، النموذجين يتطلبان المرور بثلاث أقسام للتوصيل للشكل النهائي.

نسمي النموذج الاقتصادي النموذج I والنموذج الرفاهي II.

في القسم A:

يتطلب النموذج I، 2سا من اليد العاملة، بينما النموذج II يتطلب 26سا.

في القسم B:

يتطلب النموذج I، 3.1سا والنموذج الثاني 3.8سا للوحدة الواحدة.

ساعات العمل المتاحة في الأقسام الثلاث (للأسبوع الواحد):

القسم A: 254سا

القسم B: 280سا

القسم C: 380سا

بالنسبة للنموذجين معا يجب بعد تجميعهما أن يمرا بقسم المراقبة والمراجعة، حيث يمكن مراجعة 110 وحدة في الأسبوع الواحد من أحد النموذجين.

تكاليف الإنتاج على الشكل:

	النموذج الاقتصادي	النموذج الرفاهي
المادة الأولية	72 ون	98 ون
اليد العاملة المباشرة	58 ون	65 ون
المراقبة	25 ون	32 ون

يوضح الجدول التالي التكاليف المتغيرة بالنسبة لكل نموذج:

	النموذج الاقتصادي	النموذج الرفاهي
التجميع	16 ون	28 ون
مراقبة النموذج الاقتصادي	6 ون	-
مراقبة النموذج الرفاهي	-	9 ون

سعر الوحدة الواحدة من النموذج الاقتصادي هو 239 ون، والنموذج الرفاهي 330 ون.

لتلبية احتياجات السوق من الواجب على المؤسسة تجميع 40 وحدة في الأسبوع من النموذج الاقتصادي وعلى الأقل 35 وحدة في الأسبوع من النموذج الرفاهي. عند كون المؤسسة متأكدة من بيع كل إنتاجها من النموذج الاقتصادي فإن قسم المبيعات يتوقع أن لا تتجاوز المبيعات من النموذج الرفاهي 60 وحدة في الأسبوع.

نفترض أيضا لا يوجد أي تحفظات حول التموين بالمركبات الداخلة في تكوين النموذجين معا.

ترغب المؤسسة في تحديد نموذج للإنتاج الأسبوعي، والذي يسمح لها بتعظيم أرباحها وهذا باحترام الشروط السابقة كلها.

<u>الحل:</u>

1- متغيرات القرار:

- ما هي المتغيرات المجهولة لمشكل البرمجة لهذه المؤسسة؟

- الكمية الواجب إنتاجها في الأسبوع الواحد بالنسبة للنموذجين

- كم عدد المتغيرات؟

- متغيرين اثنين فقط، بما أن المؤسسة تصنع نموذجين فقط.

إذن نسمي:

x_1 عدد الوحدات المصنعة في الأسبوع الواحد من النموذج الاقتصادي.

x_2 عدد الوحدات المصنعة في الأسبوع الواحد من النموذج الرفاهي.

2- القيود:

- ما هي التحفظات على التصنيع داخل هذه المؤسسة؟

يجب تحديد موارد المؤسسة: هناك موردين أساسيين يخصان:

* الوقت المتاح بالنسبة للأقسام الثلاث

* قدرة المراقبة لدى قسم الرقابة

إذن هناك 4 قيود بالنسبة لكل قسم.

- هل هناك تحفظات أخرى؟

نعم تلك الخاصة باحتياجات السوق:

* الطلب الأدنى بالنسبة لكل نموذج.

* البيع الأقصى للنموذج الرفاهي.

إذن هناك 3 قيود إضافية، وعليه يجب صياغة 7 قيود.

○ بالنسبة لساعات العمل:

	النموذج II	النموذج I	(الأسبوع/سا) المتاح
القسم A	2	2.6	254
القسم B	3.5	1.8	280
القسم C	2.5	3.8	380

القسم A: $2x_1 + 2.6x_2 \leq 254$

القسم B: $3.5x_1 + 1.8x_2 \leq 280$

القسم C: $2.5x_1 + 3.8x_2 \leq 380$

- بالنسبة لطاقة الرقابة:

قسم الرقابة: الأسبوع/الوحدة $x_1 + x_2 \leq 110$

5- طرق حل نموذج البرمجة الخطية:

هناك عدة طرق لحل نموذج البرمجة الخطية، يتوقف استخدام أي من هذه الطرق على طبيعة المشكل وحجمه، نذكر من بين هذه الطرق:

- الطريقة الأولى: الطريقة البيانية

تصلح هذه الطريقة للوصول إلى الحل الأمثل للنماذج التي تحتوي على متغيرين قراريين فقط، أي x_1 و x_2، حيث يجب إتباع الخطوات التالية:

1- كتابة قيود النموذج على هيئة معادلات بدلا من المتباينات بدون إضافة أي شيء.

2- التمثيل البياني لهذه المعادلات أي القيود على نفس المعلم.

3- تحديد منطقة الحل الممكن.

4- تعويض قيم إحداثيات زوايا منطقة الحل الممكن في دالة الهدف Z.

5- اختيار نقطة الحل الأمثل.

مثال:

أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية باستخدام الطريقة البيانية:

Max $Z= 5x_1 + 6x_2$

Sub to $2x_1 + 3x_2 \leq 30$

$$5x_1 + 4x_2 \leq 60$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

الحل:

1-كتابة المتراجحات على شكل معادلات:

القيد الأول: $2x_1 + 3x_2 = 30$

القيد الثاني: $5x_1 + 4x_2 = 60$

2- التمثيل البياني: نعتبر القيد الأول هو($\triangle_1$) والقيد الثاني هو ($\triangle_2$) نختار قيم مساعدة لتمثيلهما:

بالنسبة لـ: ($\triangle_1$):

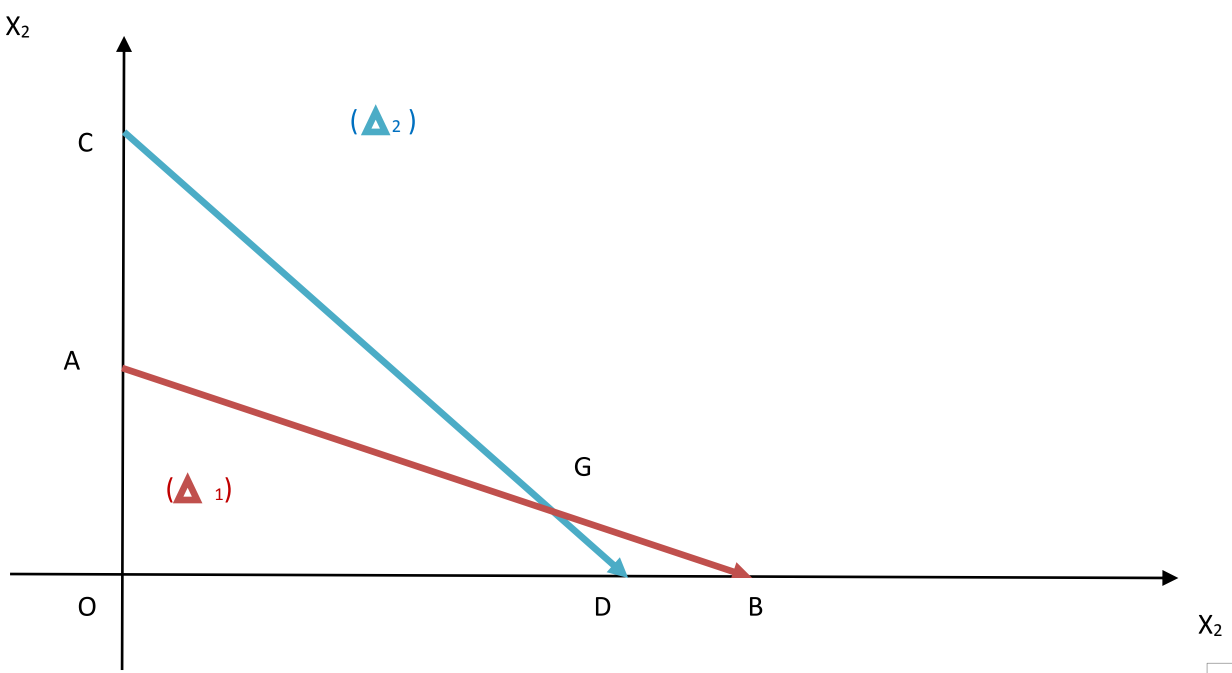
النقطة الأولى: $x_1 = 0 \Rightarrow 3x_2 = 30 \Rightarrow x_2 = 10 \Rightarrow A(0.10)$

النقطة الثانية: $x_2 = 0 \Rightarrow 2x_1 = 30 \Rightarrow x_2 = 15 \Rightarrow B(15.0)$

بالنسبة لـ: ($\triangle_2$):

النقطة الأولى: $x_1 = 0 \Rightarrow 4x_2 = 60 \Rightarrow x_2 = 15 \Rightarrow C(0.15)$

النقطة الثانية: $x_2 = 0 \Rightarrow 5x_2 = 60 \Rightarrow x_2 = 12 \Rightarrow D(12.0)$



من الشكل منطقة الحل الممكن هي المساحة المحدودة بالنقاط (G.D.O.A).

حيث نعلم أن: $O(0.0)$, $A(0.10)$, $D(12.0)$

أما النقطة G يجب حل جملة معادلة القيدين (نقطة تقاطعهما) لإيجاد إحداثياتها، أي:

$$2x_1 + 3x_2 = 30 \ldots (1)$$

$$5x_1 + 4x_2 = 60$$

الحل يكون بالتعويض أو بالطرح:

$$(2x_1 + 3x_2 = 30)*5 \ldots (1)$$

$$(5x_1 + 4x_2 = 60)*2$$

$$10x_1 + 15x_2 = 150$$

بالطرح:

$$-\ (10x_1 + 8x_2 = 120)$$

$$0x_1 + 7x_2 = 30 \Rightarrow (x_2 = 4.3)$$

تعوض قيمة x_2 في المعادلة (Δ_1):

$$2x_1 + 3(4.3) = 30 \Rightarrow 2x_1 + 12.9 = 30$$

$$\Rightarrow 2x_1 = 17.1$$

$$\Rightarrow x_1 = 8.6$$

إذن: $G(8.6 ; 4.3)$

لتحديد الحل الأمثل نقوم بالاستعانة بالجدول التالي:

نقاط الحدود	الإحداثيات		$Z= 5x_1 + 6x_2$	Max Z
	x_1	x_2		
O	0	0	0	/
A	0	10	60	/
G	8.6	4.3	68.8	68.8*
D	12	0	60	/

وعليه يكون الحل الأمثل لهذا النموذج على النحو التالي:

$(x_1 = 8.6 ,\ x_2 = 4.3 ,\ Z^* = 68.8)$

تمرين:

أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطي التالي بيانيا.

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{Sub to } \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 10 \\ x_1 \leq 8 \\ x_2 \leq 7 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

ملاحظة:

إن مشكلات البرمجة الخطية لا تملك دائما حلا أمثل وحيد، هناك بعض المشكلات تشكل ما يسمى بالحالات الخاصة نذكر منها:

* قد تملك بعض المشكلات منطقة حلول غير محدودة وهي نادرة الحدوث (لكنها موجودة).

* نتحدث عن الحلول المنحلة (المفككة) إذا كانت قيمة أحد المتغيرات الأساسية وأغلبها مساوية للصفر، فيصبح عدد المتغيرات الأساسية أقل من عدد القيود.

* حالة عدم وجود حلول مقبولة تحدث عندما تكون قيود المشكلة متعارضة (متعاكسة) ولا تشكل منطقة مشتركة بسبب عدم تقاطعها.

* حالة تعدد الحلول المثلى تحدث عندما يكون أحد قيود النموذج موازيا للدالة الهدف Z أو منطبقا عليها (لديهما نفس المعادلة).

* حالة وجود قيود فائضة في النموذج وليس لها أهمية أو أي تأثير يذكر على منطقة الحل الممكن للمشكلة ولمعالجة هذا النوع من المشكلات على متخذ القرار حذف القيد أو القيود التي يراها غير ضرورية في النموذج وليس لها تأثير في منطقة الحل الممكن.

- الطريقة الثانية: الطريقة الجبرية

هي إحدى الطرق الجبرية البحتة التي تعتمد أسلوب التعويض الجبري للقيم المتوقعة للمتغيرات الداخلة في النموذج الرياضي وفقا إلى عدد الطرق الممكنة لهذه القيم، تستخدم هذه الطريقة عند احتواء النموذج على متغيرين فقط هما x_1 و x_2.

تقضي هذه الطريقة إتباع الخطوات التالية:

* تصنيف متغيرات النموذج الرياضي إلى نوعين هما:

1- المتغيرات الأساسية: وهي تلك المتغيرات التي لها دور مهم في المشكل، وتكون قيمها أكبر تماما من الصفر $x_j y_o$.

2- المتغيرات الغير أساسية: والتي ليس لها دور مهم في المشكل، وتكون قيمها مساوية للصفر دائما $x_j=0$.

* تحويل النموذج الرياضي من الصيغة القانونية إلى الصيغة المعيارية:

وذلك باستخدام المتغيرات الراكدة (الفائض والفرق) في دالة الهدف والقيود كما يلي:

اتجاه القيد	آلية استخدام المتغيرات الراكدة في القيود	آلية استخدام المتغيرات الراكدة في دالة الهدف	
		Max Z	Min Z
أصغر أو يساوي $\leq$	$+x_i$	$+ox_i$	$+ ox_i$
أكبر أو يساوي $\geq$	$-x_i$	$-ox_i$	$-ox_i$
يساوي =	/	/	/

* استخدام جدول يتضمن المتغيرات الأساسية والغير أساسية لغرض الوصول إلى الحل الأمثل للمشكل بموجب الطريقة الجبرية:

مثال:

باستخدام الطريقة الجبرية، حل النموذج التالي:

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 6x_2$$

$$\text{Sub to } 2x_1 + 3x_2 \leq 30$$

$$5x_1 + 4x_2 \leq 60$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

الحل:

1- تحويل النموذج للصيغة المعيارية:

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

$$\text{Sub to } 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 30$$

$$5x_1 + 4x_2 + x_4 = 60$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

2- تحديد عدد الطرق الممكنة لاختيار متغيرين من 4 متغيرات وفقا للصيغة الآتية:

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$C^4_2 = \frac{4!}{2!(4-2)} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4.3.2!}{2.1.2!} = 6$$

$$\{x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3, x_2x_4, x_3x_4\}$$

3- الجدول:

عدد الحالات الممكنة	المتغيرات الغير أساسية	المتغيرات الأساسية	دالة الهدف	Max Z
	$x_j=0$ $x_i=0$	$x_j>0$ $x_i>0$	$Z = 5x_1+6x_2+0x_3+0x_4$	
1	$x_1=0$ $x_2=0$	$x_3=30$ $x_4=60$	0	
2	$x_1=0$ $x_3=0$	$x_2=10$ $x_4=20$	60	
3	$x_1=0$ $x_4=0$	$x_2=15$ $(x_3=-15)$	90 تهمل	
4	$x_2=0$ $x_3=0$	$x_1=15$ $(x_4=-15)$	75 تهمل	
5	$x_2=0$ $x_4=0$	$x_1=12$ $x_3=6$	60	
6	$x_3=0$ $x_4=0$	$x_1=8.6$ $x_2=4.3$	68.8	68.8*

مثال:

أوجد الحل لهذا النموذج جبريا:

$$\text{Max } Z = 18x_1 + 30x_2$$

$$\text{Sub to } \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 200 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 300 \\ x_1 \leq 100 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

6- طرق حل البرمجة الخطية:

قبل التطرق إلى طرق حل نموذج البرمجة الخطية يجب أولا إعادة صياغة النموذج لتحويله من صيغته القانونية إلى صيغته النظامية.

6.1- الصيغة النظامية (القياسية أو المعيارية):

يتم التحصل على هذه الصيغة بإتباع الخطوات التالية:

1- يجب تحويل جميع القيود من شكل المتراجحة إلى شكل المعادلة عن طريق إضافة متغيرات الفرق (في حالة التعظيم)، أو طرح متغيرات الفائض (في حالة التدنية)، تضاف هذه المتغيرات إلى الجانب الأيسر من المتراجحة، حيث يمثل متغير الفرق ما يسمى بنفايات تلك المرحلة من النظام المتمثلة بذلك القيد، بينما يمثل متغير الفائض فائض المدخلات في تلك المرحلة من النظام المتمثلة بهذا القيد.

2- إضافة نفس تلك المتغيرات إلى دالة الهدف Z بمعاملات معدومة.

3- إدماج نفس هذه المتغيرات في شروط عدم السلبية إلى جانب متغيرات القرار.

مثال:

نعتبر نموذج البرمجة الخطي التالي، المطلوب هو كتابة الصيغة المعيارية لهذا النموذج:

$$\text{Max } Z = 10x_1 + 20x_2$$

$$\text{Sub to } 2x_1 + 3x_2 \leq 30$$

$$5x_1 + 4x_2 \leq 60 \qquad\qquad x_1, x_2 \geq 0$$

$$\text{Max } Z= 10x_1+20x_2+0x_3+0x_4$$

$$\text{Sub to } 2x_1+3x_2+x_3 =30$$

$$5x_1+4x_2+x_4 =60$$

$$x_1,x_2,x_3,x_4 \geq 0$$

3– الطريقة الثالثة: الطريقة المبسطة simplex méthode

تعتبر هذه الطريقة أسلوب رياضي متقدم في حل مشكلات البرمجة الخطية،كونها تعالج المشكلات التي تحتوي على عدد كبير من المتغيرات (متغيرين فأكثر) على عكس كل من الطريقتين السابقتين.

يتم إيجاد حل مشكلات البرمجة الخطية بموجب هذه الطريقة وفقا لثلاث مراحل أساسية هي كما يلي:

*المرحلة الأولى: إيجاد الحل الأساسي الممكن (الإبتدائي أو الأولي).

*المرحلة الثانية: تحسين الحل الأساسي للحصول على الحل الأفضل (best solution).

*المرحلة الثالثة: تحسين الحل الأساسي للحصول على الحل الأمثل (optimal solution).

وقد يتم الوصول إلى الحل الأمثل بخطوة واحدة أو عدد من الخطوات.

3.1– حل مشكلات البرمجة الخطية باستخدام الطريقة المبسطة في حالة التعظيم Max:

لإيجاد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية بموجب الطريقة المبسطة، نتبع الخطوات الآتية:

1– تحويل نموذج البرمجة الخطية من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية (النمطية المعيارية)، بعد إدخال متغيرات الفرق أو الفائض إلى كل من دالة الهدف Zوقيود النموذج.

2– تصميم جدول الحل الأساسي الممكن.

3– تحديد المتغير الداخل على أساس أكبر قيمة ($\Delta_j= c_j- Z_j$) (العمود المحوري).

4– تحديد المتغير الخارج عن طريق قسمة قيم الموارد المتاحة على ما يقابلها من قيم المعاملات في العمود المحوري والمتغير الذي يقابل أقل قيمة موجبة من خوارج القسمة في عمود النسبة يعد هو المتغير الخارج، ليحل محل المتغير الداخل.

5- العمود الذي يوجد فيه المتغير الداخل، يسمى بالعمود المحوري (عمود الدوران).

6- الصف الذي يوجد فيه المتغير الخارج، يسمى بالصف المحوري (صف الدوران).

* **تصميم جدول الحل الأساسي (الابتدائي):**

ß	$^{C}/_{Zj}$	b	5	6	0	0	O
			x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0	30	2	(3)	1	0	30/3=10 Min
x_4	0	60	5	4	0	1	60/4=15
$\Delta_j= Z_j - C_j$		0	5	6 max	0	0	

ß: المتغيرات الاصطناعية

C_b: معاملات المتغيرات التكميلية في دالة الهدف Z.

B_i: الموارد المتاحة

C_j: معاملات المتغيرات في دالة الهدف

في حالة: Max ← $\Delta_j = c_j - Z_j$

Min ← $\Delta_j = Z_j - c_j$

في المحور الأفقي Δ_j نختار أكبر قيمة موجبة.

في المحور العمودي O نختار أصغر قيمة.

كيف يحسب Δ_j:

$$\Delta_{jx1}= C_{jx1}-Z_{jx1}=5-[(2*0)+5(0)]=5-0=5$$

$$\Delta_{jx2}=C_{jx2}-Z_{jx2}=6-[(3*0)+(4*0)]=6-0=6$$

$$\Delta_{jx3}=C_{jx3}-Z_{jx3}=0-[1(0)+0(0)]=0$$

$$\Delta_{jx4}=C_{jx4}-Z_{jx4}=0-[0(0)+1(0)]=0$$

3- المتغير الداخلي هو x2، المقابل لأقصى قيمة في دالة الهدف.

4- المتغير الداخلي هو x3، المقابل لأدنى قيمة في عمود O.

ملاحظة: في عمود النسب يتم إهمال القيم السالبة أو∞.

5- تحويل العمود الذي يحتوي على محور الدوران إلى عمود وحدي وملئ بقية المصفوفة على هذا الأساس.

6- العنصر الذي يقع في التقاطع بين عمود المتغير الداخل وصف المتغير الخارج يسمى بمحور الدوران (العنصر المحوري).

7- يتم الحصول على المعادلة المحورية من خلال قسمة القيم في صف المتغير الخارج على محور الدوران (العنصر المحوري).

8- لغرض تحسين الحل الممكن والحصول على الحل الأفضل نتبع الآتي:

أ- إيجاد معاملات دالة الهدف الجديدة كالآتي:

معاملاتZ_i الجديدة = معاملات Z القديمة – معامل المتغير الداخل في صف دالة الهدف * المعادلة المحورية.

ب- إيجاد معاملات القيود الجديدة للمتغيرات كالآتي:

معاملات x_i الجديدة = معاملات x_i القديمة – معامل المتغير الداخل في صف x_i * المعادلة المحورية.

9- يمكن الحصول على الحل الأمثل لمشكلة التعظيم عندما تكون جميع معاملات الصف Δ_j أصغر أو تساوي الصفر.

مثال: باستخدام الطريقة المبسطة حل نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\text{Max } Z = 5x_1+6x_2$$

$$\text{Sub to} \begin{cases} 2x_1+3x_2 \leq 30 \\ 5x_1+4x_2 \leq 60 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

الحل:

* الخطوة الأولى:

1- تحويل نموذج البرمجة الخطية إلى صيغته المعيارية:

$$\text{Max } Z = 5x_1+6x_2+0x_3+0x_4$$

$$\text{Sub to } 2x_1+3x_2+x_3=30$$

$$5x_1+4x_2+x_4=60$$

$$x_1,x_2,x_3,x_4 \geq 0$$

ß	C/Z_j	b	5	6	0	0	O
			x1	x2	x3	x4	
x2	6	c 10	a(2/3)	1	1/3	c 0	10(2/3)=15
x4	0	f 20	b(7/3)	0	g-4/3	d 1	20/7/3=60/7=8.5 min
$\Delta_j = Z_j - C_j$		h -60	1 max	0	j -2	k 0	

قسمة السطر كاملا على محور الدوران: a=2/3

c=0/3=0

e=30/3=10

f=60-4(30)/3=60-40=20

b=5-2(4)/3=5-8/3=15-8/3=7/3

d=1-(0*4)/3=1

g=0-1(4)/3=4/3

h=0-(6*30)/3=-60

i=5-(6*2)/3=1

j=0-(1*6)/3=-2

k=0-(0*6)/3=0

2- لغرض تحسين الحل الممكن والحصول على الحل الأفضل نتبع الخطوات الآتية:

أ- إيجاد معاملات دالة الهدف الجديدة: معاملات Z القديمة – معامل المتغير الداخل في صف دالة الهدف جداء المعادلة المحورية.

ب- إيجاد معاملات القيود الجديدة للمتغيرات: معاملات x_i الجديدة= معاملات x_i القديمة – معامل المتغير الداخل في صف x_i جداء المعادلة المحورية.

3- نتحدث عن الوصول للحل الأمثل لمشكلة التعظيم عندما تصبح جميع قيم Δ_j سالبة أو مساوية للصفر.

ß	$C/_{Zj}$	b_i	5	6	0	0	O
			x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	6	4.28	0	1	5/7	-2/7	
x_1	5	8.5	1	0	-4/7=-12/21	3/7	
$\Delta_j= Z_j – C_j$		-68.6	0	0	-10/7	-3/7	

a=10-(2/3)(20)3/7=10-40/7=70-40/7=30/7=4.28

b=1/3-(2/3)(-4/3)3/7=1/3+8/21=15/21=5/7

c=0-(1)(2/3)3/7=-2/7

f=-60-(1)(20)3/7=-60-60/7=-480/7=-68.5

d=-2-(-4/3)(1)3/7=-2+4/7=-14+4/7=-10/7

e=0-(1)(1)3/7=-3/7

بما أن جميع قيم Δ_j إما سالبة أو معدومة، نتوقف هنا ويصبح الحل الأمثل هو:

x_2=4.28=30/7

x_1=8.5=60/7

x_3=0x4=0

$Z=6(30/7)+5(60/7)$

$=480/7=68.5$

$Z=68.5$

4- تصميم جدول الحل الأساسي (الابتدائي):

متغيرات الفرق أو الفائض	المتغيرات				الثوابت b_i	النسبة B_i/x_2
	x_1	x_2	x_3	x_4		
x_3	2	$(3)_{pivo}$	1	0	30	(30/3=10) Min
x_4	5	4	0	1	60	60/4=15
Z	-5	-6	0	0	0	

Max بالقيمة المطلقة

(3): محور الدوران (العنصر المحوري)

5- المتغير الداخل هو x_2 المقابل لأقصى قيمة في دالة الهدف بالقيمة المطلقة (6).

6- المتغير الخارج هو x_3 المقابل لأدنى قيمة في عمود النسبة.

ملاحظة: في عمود النسبة يتم إهمال القيم السالبة أو ∞.

7- يصبح محور الدوران (العنصر المحوري) هو 3.

8- حساب المعادلة المحورية وذلك بقسمة قيم الصف المحوري على محور الدوران 3.

الصف المحوري= [2/3,3/3,1/3,0/3,30/3]

= [2/3;1;1/3;0;10]

9- حساب القيم الجديدة لكل من المتغير x_4 ودالة الهدف Z كما يلي:

x_4 الجديدة =[5;4;0;1;60] – (4)[2/3;1;1/3;0;10]

=[5;4;0;1;60] - [8/3;4;4/3;0;40]

=[7/3;0;-4/3;1;20]

Zالجديدة$= [-5;-6;0;0;0] - (-6)[2/3;1;1/3;0;10]$

$=[-1;0;2;0;60]$

10- إدخال النتائج في جدول الحل الثاني:

متغيرات الفرق أو الفائض	المتغيرات				b_i	النسبة
	x_1	x_2	x_3	x_4		
x_2	2/3	1	1/3	0	10	
x_4	7/3	0	-4/3	1	20	
Z	$(-1)_{max}$	0	2	0	60	

يتضح من النتائج النهائية لحل المشكلة بأن المنشأة الإنتاجية ستتخذ قرارا بإنتاج 8.5 من x_1 و 4.28 من x_2 بما يحقق للمنشأة ربحا أقصى بمقدار 68.6 ون.

مثال: حل نموذج البرمجة الخطية التالي باستخدام الطريقة المبسطة

$$\text{Max } Z= 6x_1+8x_2+4x_3$$

$$\text{Sub to } \begin{cases} x_1+x_2 \leq 2 \\ x_1+3x_3 \leq 6 \\ x_2 \leq 1 \end{cases}$$

$$x_1,x_2,x_3 \geq 0$$

1- تحويل النموذج إلى الصيغة القياسية:

$$\text{Max } Z= 6x_1+8x_2+4x_3+0x_4+0x_5+0x_6$$

$$\text{Sub to } \begin{cases} x_1+x_2+x_4=2 \ldots(1) \\ x_1+3x_3+x_5=6 \ldots(2) \\ x_2+x_6=1 \end{cases}$$

$x_i \geq 0$

$i=(1;2;3;4;5;6)$

الحل الابتدائي:

$0=x_3=x_2=x_1$

$(1) \Rightarrow x_4= 2$ $\qquad$ $Z=0$

$(2) \Rightarrow x_5= 6$ $\qquad$ $\Delta_j = \partial =6-(1.0+1.0+0.0)=6$

$(3) \Rightarrow x_6= 1$

Max $\qquad \Delta_j = c_j - Z_j$

Min $\qquad \Delta_j = Z_j - c_j$

ß	C/Z_j	b_i	6	8	4	0	0	0	$O= b_i/x_2$
			x_1	$x_2\downarrow$	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	0	2	1	1	0	1	0	0	2/1=2
x_5	0	6	1	0	3	0	1	0	6/0=/
$\leftarrow x_6$	0	1	0	$(1)_{pivo}$	0	0	0	1	$1/1=1_{min}$
$\Delta_j= Z_j - C_j$		0	6	8_{max}	4	0	0	0	
ß	C/Z_j	b_i	c_j						O
			$x_1\downarrow$	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$\leftarrow x_4$	0	1	$(1)_{pivo}$	0	0	1	0	-1	$1/1=1_{min}$
x_5	0	6	1	0	3	0	1	0	6/1=6

x_2	8	1	0	1	0	0	0	1	1/0عدم التعيين
$\Delta_j = Z_j - C_j$		-8	6_{max}	0	4	0	0	-8	
ß	C/Z_j	b_i	c_j						O
			x_1	x_2	$x_3\downarrow$	x_4	x_5	x_6	
x_1	6	1	1	0	0	1	0	-1	1/0عدم التعيين
$\leftarrow x_5$	0	5	0	0	$(3)_{pivo}$	-1	1	1	$5/3_{min}$
x_2	8	1	0	1	0	0	0	1	1/0 عدم التعيين
$\Delta_j = Z_j - C_j$		-14	0	0	4_{max}	-6	0	-2	
ß	C/Z_j	b_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	O
x_1	6	1	1	0	0	1	0	-1	
x_3	4	5/3	0	0	1	-1/3	1/3	1/3	
x_2	8	1	0	1	0	0	0	1	
$\Delta_j = Z_j - C_j$		-62/3	0	0	0	-14/3	-4/3	-10/3	

$x_1=6;x_3=5/3;x_2=1;Z=62/3$

– حل المشكلات باستخدام الطريقة المبسطة في حالة التدنية Min:

إن حل مشكلات البرمجة الخطية باستخدام الطريقة المبسطة في حالة التدنية، أي عندما تكون القيود بصيغة أكبر أو تساوي (≥) أو (=) في حالات خاصة جدا يتم بواسطة إحدى الطريقتين:

✵ طريقة M الكبيرة (big M):

بموجب هذه الطريقة يتم إضافة متغيرات اصطناعية إضافة لمتغيرات الفرق أو الفائض إلى قيود نموذج البرمجة الخطية وإلى دالة الهدف على أن تقترن المتغيرات الاصطناعية y_i في دالة الهدف بمعاملات كبيرة جدا تدعى (M)، وتحمل هذه المعاملات إشارة موجبة في دالة الهدف في حالة التقليل أو التدنية، وإشارة سالبة في حالة التعظيم، ولإيجاد الحل الأمثل نتبع الخطوات التالية:

1– تحويل نموذج البرمجة الخطية من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية بعد إضافة متغيرات الفرق أو الفائض، إلى القيود ودالة الهدف، ثم إضافة المتغيرات الاصطناعية y_i إلى القيود ودالة الهدف أيضا.

2- صياغة دالة الهدف الجديدة Z بدلالة المتغيرات الأساسية والفرق أو الفائض بعد تعويض قيم y_i بما يساويها من المتغيرات السابقة الذكر، مع مراعاة جعل الدالة مساوية إلى قيمة M فقط.

3- تصميم جدول الحل الأساسي الممكن.

4- الحل باستخدام الطريقة المبسطة كما في حالة التعظيم.

5- في حالة التدنية للوصول للحل الأمثل يجب أن تكون جميع $o \leq b_j$ في جدول الحل.

- **طريقة الحل عبر مرحلتين:**

تعد هذه الطريقة أبسط من طريقة big m في حل نماذج البرمجة الخطية في حالة التدنية، إذ يمكن الحصول على الحل الأمثل للنموذج بعد أن تتأكد بأن هناك حل للنموذج وذلك من خلال الحصول على قيمة دالة الهدف الجديد (r) مساوية للصفر (r=0) وبعد فلا وجود للحل.

مسائل النقل والتخصيص

I- مسائل أو نماذج النقل:

تعد نماذج النقل أحد الأساليب الرياضية الكمية المشتقة من النموذج الرياضي العام للبرمجة الخطية، حيث تدرس القرارات المتعلقة بنقل وتسويق السلع والبضائع المختلفة من مصادر إنتاجها إلى مراكز الاستلام بهدف إيصالها إلى المستهلك الأخير بأقل كلفة ممكنة.

I-1- صياغة النموذج الرياضي لمشكلة النقل:

دالة الهدف:

$$\text{Min } Z = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} cij \, X_{ij}$$

قيود مراكز التوزيع:

$$\text{Sub to} \begin{cases} \sum_{j=0}^{n} \quad x_{ij} = a_j \text{ , } i=1;2;3 ;\dots ;m \end{cases}$$

قيود مراكز التسليم:

$$\sum_{i=0}^{m} x_{ij} = b_j \text{ , } j=1;2;3\ ;\ldots\ ;n$$

شرط عدم السلبية:

$$x_{ij} \geq 0$$

I-2- أنواع مشاكل النقل: تنقسم مشاكل النقل من حيث توازن جدول النقل أو عدم توازنه إلى ما سيأتي:

*مشاكل النقل المغلق: يكون فيها مجموع الكميات المعروضة من قبل مراكز التوزيع مساويا لمجموع الكميات المطلوبة من قبل مراكز الاستلام، وهذا يعني أن الجدول في حالة توازن: $\sum_{i=1}^{m} ai = \sum_{j=1}^{n} bj$

*مشاكل النقل المفتوح: يكون فيها مجموع الكميات المعروضة من قبل مراكز التوزيع مختلفا عن مجموع الكميات المطلوبة من قبل مراكز الاستلام، أي أن الجدول في حالة عدم توازن: $\sum_{i=1}^{m} ai \neq \sum_{j=1}^{n} bj$

في هذه الحالة نميز حالتين:

حالة $\sum_{i=1}^{m} ai > \sum_{j=1}^{n} bj$:

لإعادة الجدول لحالة التوازن يجب خلق مركز استلام وهمي بكلف مساوية للصفر D_0.

حالة $\sum_{i=1}^{m} ai < \sum_{j=1}^{n} bj$:

يجب خلق مركز توزيع وهمي بكلف مساوية للصفر S_0.

I-3- الطرق المستخدمة لحل مشكل النقل:

هناك عدة طرق مستخدمة لحل مشكل النقل سيتم تناول فقط طريقتين: طريقة الركن الشمالي الغربي، وهي إحدى طرق إيجاد الحل الممكن، وطريقة Vogel (فوجل) وهي إحدى طرق إيجاد الحل الأفضل.

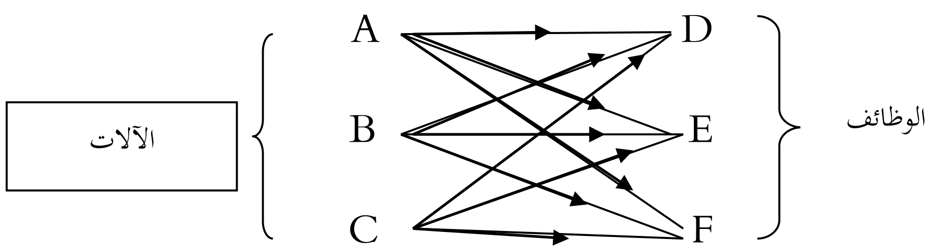
مسائل التخصيص

*تمهيد:

تتلخص إشكالية مسائل التخصيص في كيفية توزيع مجموعة من الوظائف على مجموعة من الأشخاص أو مجموعة من الآلات على مجموعة من المهام، بحيث يؤدي ذلك إلى استخدامها بأعلى كفاءة ممكنة، مما يؤدي إلى تحمل تكلفة

أقل أو جني أرباح أكبر، شرط أن يتم تخصيص لكل وظيفة شخص واحد أو آلة واحدة فقط، وهذا يقتضي أن يكون عدد الوظائف مساويا لعدد الأشخاص أو عدد الآلات.

مثلا حسب الشكل التالي لدينا ثلاث آلات A,B,C وثلاث وظائف D,E,F، بحيث يمكن لكل آلة أن تنجز أي من الوظائف الثلاث إنما بتكاليف قد تكون مختلفة.



كأمثلة على مشاكل التخصيص تذكر تخصيص عدد من الحافلات لعدد من الأحياء السكنية، أو عدد من المقاولين لإنجاز عدد من المشاريع ...إلخ.

1- إشكالية التخصيص:

تمثل مسألة التخصيص حالة خاصة من مسائل النقل، ويمكن طرحه باعتماد المثال التالي:

تمتلك مؤسسة لانجاز الآبار 3 آلات للحفر A,B,C، حيث كلفت بحفر 3 آبار D,E,F في 3 مناطق.

إن تكلفة الحفر تختلف حسب كل آلة وحسب الطبيعة الجيوفيزيائية للتربة التي يحفر فيها كل بئر، كما يوضحه الجدول التالي:

الوظائف / الآلات	D	E	F
A	18	6	14
B	12	14	10
C	16	8	10

ويكون المطلوب هو إيجاد أفضل تخصيص للآلات، بحيث تكون التكاليف في حدها الأدنى.

1- طرق الحل: هناك عدة طرق لحل مسائل التخصيص، نذكر منها:

* طريقة البرمجة الخطية.

* طريقة النقل.

* الطريقة الهنكارية.