الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة أبي بكر بلقايد
– تلمسان –

كلية العلوم الإقتصادية وعلوم التسيير والعلوم التجارية
قسم العلوم المالية والمحاسبة

محاضرات و تطبيقات في مقياس
بحوث العمايات

من إعداد الدكتور: موسليم حسين   **المستوى: : ماستر سنة ثانية**

التخصص: محاسبة و جباية

السنة الدراسية: 2020 – 2021

فهرس المحتويات

المحاضرة الأولى: مدخل لبحوث العمليات..ص3- ص5.

المحاضرة الثانية: البرمجة الخطية (الصياغة الرياضية)..........................ص6 -ص12.

المحاضرة الثالثة: الطريقة البيانية لحل مسائل البرمجة الخطية..............ص13 -ص 18.

المحاضرة الرابعة: **خوارزمية Dantizig (simplex)** لحل مسائل البرمجة الخطية...ص 19 -ص24.

المحاضرة الخامسة: النموذج المرافق(المسالة الثنائية)........................ص 25 -ص29.

المحاضرة السادسة: تمارين تطبيقية محلولة:....................................ص 30-ص39.

المحاضرة الأولى:

مدخل لبحوث العمليات

1- مدخل الى بحوث العمليات:

1-1-.لمحة تاريخية عن تطور علم بحوث العمليات:

تعد بحوث العمليات من العلوم التطبيقية الحديثة التي افرزتها ظروف الحرب العالمية الثانية، حيث استخدمت بشكل اساسي في قيادة القوات البريطانية للحصول على اعلى كفاءة للعتاد الحربي و كذا للأفراد العاملين قي الجيش البريطاني، و قد اثبتت النماذج المستخدمة كفاءات كبيرة ادت الى نجاح كبير في العمليات العسكرية، و كان لها الاثر الكبير في تخفيض الخسائر و تعزيز الربح في المعارك. فقد سبق هذا الاستخدام محاولات فردية متفرقة لبعض العلماء في الولايات المتحدة الأمريكية مثل العالم **F.W.Taylor** الذي قام بدراسة و تصميم بعض النماذج لتطبيقها في مجال ادارة الانتاج الصناعي بما يساعد على تحقيق اعلى مردود ممكن لاستخدام الافراد و الالات و لكن هذه المحاولات لا يمكننا اعتبارها تطويرا لبحوث العمليات، و انما هي بمثابة مقدمات ادت فيما بعد الى نشأة بحوث العمليات كعلم قائم في حد ذاته.

بعد انتهاء الحرب العالمية الثانية، توسع استخدام بحوث العمليات في المجالات الادارية و الاقتصادية و الهندسية و غيرها من مجلات اتخاذ القرار، حيث لم يهدر الجهد العلمي الكبير المبذول في نمذجة المسائل العسكرية، اذ ان عودة الاختصاصيين في مجال بحوث العمليات الى الحياة المدنية زاد من الاهتمام بهذا العلم بحيث اصبح يدرس في الجامعات الأمريكية ثم انتقل إلى أوربا. كما يجدر بنا ذكر جهود العلماء الذين ساهموا مع تايلور في دعم حركة الادارة العلمية و تبني فكرة اتخاذ القرارات المبنية على اساس كمي لا على اساس التجربة و الخطأ و الحدس الشخصي، اين يرتكز القرار على جمع الحقائق الكمية و تحليلها و تنميطها في قوالب علمية تمهيدا لتفسيرها و اختيار افضل البدائل، مثل هؤلاء العلماء: فرانك جيلبرت **F.Gilberth** و هنري جانت **H.Gantt** ،فجميعهم ايدوا فكرة تايلور بضرورة استخدام المقاييس الكمية في وضع معايير اتخاذ القرارات الادارية. الا انه تجدر الاشارة الى ان المنطلق العلمي الصحيح لبحوث العمليات كان على يد العالم **G.B.Dantzig** سنة

1947 الذي استخدم جبر المصفوفات في معالجة مسائل المثلوية في الادارة، حيث توصل الى اسلوب جديد يسمى " البرمجة الرياضية الخطية" التي تعتبر بمثابة الأسلوب و الاساس العلمي الاول لبحوث العمليات.

في السنوات الاخيرة اخدت بحوث العمليات مكانتها في الادارة العلمية و تسيير العمليات للمؤسسات، حيث تفرعت الى عدة فروع من بينها البرمجة الرياضية بنوعها الخطية و غير الخطية التي تعتبر أقوى أساليب بحوث العمليات لاتخاذ القرارات الراشدة والعقلانية.

1-2- تعريف بحوث العمليات:

من أهم التعريفات التي قدمت للبحوث العمليات ما يلي :

تعريف جمعية البحوث العمليات البريطانية : " استخدام الأساليب العلمية لحل المشاكل المعقدة في إدارة الأنظمة الكبيرة من المعدات المواد الأولية, القوى، العاملة الأموال والأمور الخدمية الأخرى في المؤسسات والمصانع العسكرية والمدنية".

تعريف جمعية بحوث العمليات الأمريكية: " تهتم باتخاذ القرارات العلمية لتصميم ووضع أنظمة للمعدات والقوى العاملة ووفق لشروط معينة تتطلب تخصيص الموارد المحدودة بشكل أمثل" تهتم بمجال الإنتاج.

تعريف ***Dantzig*** " *بحوث العمليات* هي علم الإدارة أي علم اتخاذ القرارات وتطبيقها".

كما عرفها محمد راتول على أنها "مجموعة من الطرق والأساليب العلمية المساعدة لاتخاذ قرارات التسيير العلمي الأمثلي في الإدارة وهي تعتمد على القياس الكمي بمساعدة الأساليب الإحصائية والرياضية, جوهر ما تتناوله هو البحث عن أمثلة تسيير الموارد المادية والبشرية في مختلف المؤسسات في ظل ظروف كمية محددة".

ومن خلال التعاريف التي ذكرناها يتجلى لدينا بعض الصفات و الخصائص التي تتميز بها نماذج بحوث العمليات فهي تعتمد بالدرجة الأولى على الطريقة العلمية أي وجود منهج في البحث عن المشاكل المراد معالجتها إضافة إلى دلك فإن بحوث العمليات "تأخذ بالنظرة الشاملة إي بمفهوم النظام ككل ، فهدا يعني أن الدراسات لن تكون خاصة بكل وظيفة داخل المؤسسة عل حدى ,إنما تشمل العلاقات المتداخلة فيما بينها إلا أننا لا نجد بحوث العمليات من البحوث التي يجريها شخص واحد وإنما فريق من جميع الاختصاصات (الرياضيات، الإحصاء، الاقتصاد، السياسة.....الخ) مما يمنحها صفة التقدم والخبرة في جميع الميادين وبالتالي التوصل إلى أحسن الحلول و أنجعها.

نستنتج أن بحوث العمليات تساعد صانع القرار على اختيار الحل الامثل الذي يتناسب مع الاهداف العليا والمهمة لصانع القرار.

1-3- بعض أساليب بحوث العمليات:

تتضمن بحوث العمليات العديد من الأساليب الرياضية:

- **البرمجة الخطية**
- **البرمجة الديناميكية.**
- **البرمجة غير الخطية.**
- **نماذج النقل.**
- **نماذج التخصيص.**
- **تحليل المخططات الشبكية.**
- **نظرية المباريات**
- **تخطيط الإنتاج**
- **تحليل الشبكة العصبية**
- **إدارة المشاريع**
- **التحليل المتعدد المعايير**
- **البرمجة بالأهداف**

المحاضرة الثانية:

البرمجـــة الخطيـــــة (الصياغة الرياضية)

1–تعريف البرمجة الخطية:

يمكن تعريف البرمجة الخطية بأنها " أسلوب رياضي لتوزيع مجموعة من الموارد و الإمكانيات المحدودة على عدد من الحاجيات المتنافسة على هذه الموارد ضمن مجموعة من القيود بحيث يحقق هذا التوزيع أفضل نتيجة ممكنة , أي أن يكون توزيعا أمثليا", كما يمكن تعريفها على أنها "مشكلة تحسين دالة خطية خاضعة للعديد من القيود تكون عبارة عن معادلات أو متراجحات لمتغيرات غير سالبة"، بمعنى آخر (البحث عن الحل الأمثل). فمن خلال هذين التعريفين للبرمجة الخطية يتضح لنا أنها " تعالج مشكلة تعظيم أو تدنية دالة معينة تسمى دالة الهدف ضمن مجال محدد .يتحدد هذا المجال بواسطة مجموعة من قيود مفروضة على متغيرات الدالة , و غالبا ما تكون هذه القيود على شكل متراجحات أو معادلات تسمى بالقيود أو الشروط ".

إن تسمية مصطلح البرمجة الخطية يعود إلى أن:

- **برمجـــة: تعني مرادف لكلمة تخطيط ,وتعني استخدام أسلوب منطقي في تحليل المشكلة ووضع خطوات للحل .**
- **خطيــة: يقصد بها جميع الدوال التي يتضمنها النموذج (دالة الهدف و القيود) يجب أن تكون على شكل دوال خطية .**

ومن الأمثلة التي تكون فيها البرمجة الخطية دعما لمتخذ القرار ما يلي:

- **عندما يريد مدير الإنتاج تحديد المزيج الإنتاجي باستخدام الموارد المتاحة له بما يلبي الطلب على المنتجات في فترة أو فترات قادمة، فان الهدف سيكون تقليل أو تدنية إجمالي تكاليف الإنتاج و التخزين .**

– اختيار حقيبة الاستثمار في الأسهم و السندات المالية الذي يسعى إلى تحقيقه المدير المالي أو المحلل المالي من أجل تعظيم الأرباح.

– عندما يخطط مدير التسويق إلى توزيع المبلغ المخصص لموازنة الإعلان على وسائل الإعلان المختلفة، فانه يهدف إلى تحديد المزيج الإعلاني الذي يحقق تعظيم فاعلية الإعلان .

– تحقيق الاستغلال الأمثل لمنافذ التوزيع و تحديد كمية البضائع و السلع التي يتم تجهيزها إلى مراكز الاستلام بحيث تكون التكاليف اقل ما يمكن .

2– بناء نموذج البرمجة الخطية (الصياغة الرياضية)

تعتبر عملية بناء أو صياغة النموذج من أهم مراحل تطبيق أسلوب البرمجة الخطية، فهي تتضمن رموزا و مبادئ رياضية للتعبير عن خصائص مشكلة معينة، إذ لا توجد طريقة معينة تمكن من بناء نموذج ذات نتائج مضمونة، و لهذا هي تعتبر فنا أكثر منه علما، يزداد الفرد تمكنا و كفاءة كلما تكرر أداءه لهذا العمل .

من أهم الخطوات التي يجب إتباعها عند بناء نموذج أو صياغة مشكلة برمجة خطية هي كما يلي :

– تحديد طبيعة المشكلة (تحديد الهدف):

"هي تتعلق بكيفية الوصول إلى أقصى (الأرباح) أو اقل تكلفة ممكنة، و ربما أيضا اقل الخسائر الممكنة و كذلك ما هي الإيرادات و المصروفات المتعلقة بالمشكلة , في هذه الخطوة يمكن أن نتساءل مثلا أين توجد المشكلة ما هو سبب المشكلة" , ويمكن أن تكون مشاكل كمية أو مشاكل اختيار و التي تستعمل عادة في اختيار المشاريع، أو الموظفين،...،الخ.

- تحديد متغيرات القرار:

تتمثل متغيرات القرار في عدد الوحدات التي يمكن إنتاجها و بيعها إذا تعلق الأمر بعملية إنتاج ما، أو نوع آخر في مجال الاقتصاد والعمليات التسييرية بصفة عامة، فعلى سبيل المثال إذا اعتبرنا مؤسسة ما تنتج نوعين من المنتوجات p_2, p_1 فان متغيرا ت القرار هي:

x_1: عدد الوحدات الواجب إنتاجها من المنتج p_1.

x_2:عدد الوحدات الواجب إنتاجها من المنتج p_2 .

- تحديد دالة الهدف

تعتبر دالة الهدف أو الدالة الاقتصادية العنصر الأساسي في بناء النموذج الرّياضي للمسألة (الصياغة الرّياضية للمسألة المراد دراستها)، بحيث يمكن أن تأخذ شكلين إمّا حالة التعظيم إذا تعلّق الأمر بمسألة تعظيم أو حالة التدنية إذا تعلّق الأمر بمسألة تدنية. هذان الشكلان المتعلقان بدالة الهدف يمكن التّعبير عنهما رياضيّا كمايلي:

$$Max\,Z = \sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j \,; \qquad cas\ de\ maximisation$$

أو:

$$Min\,Z = \sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j \,; \qquad \text{cas de minimisation}$$

- تحديـــد القيـــود:

"هي مجموعة من المحددات التي تحد من درجة تحقيق الأهداف، و عملية تحقيق الهدف تشترط الاستجابة لهذه المتطلبات بشكل جماعي , وقد تتمثل هذه المتطلبات في الموارد المتاحة : اليد العاملة , الأموال , المواد الأولية , الآلات و المعدات،...،الخ

هناك ثلاثة أنواع من القيود:

- قيود على شكل أصغر أو يساوي (≤)،التي تسمّى بالمتراجحات، بحيث الجانب الأيمن يعبّر عن الكمية القصوى للموارد المتاحة التي لا يمكن تجاوزها. ويعبّر عنها ريّاضيا بالمتراجحة التّالية:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \le b_i \,;$$

- قيود على شكل أكبر أو يساوي $(\geq)$، التي تسمّى بالمتراجحات، بحيث الجانب الأيمن يعبّر عن الحد الأدنى للموارد المتاحة التي يجب تجاوزها. ويعبّر عنها ريّاضيا بالمتراجحة التّالية:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \ x_j \ \geq b_i \ ;$$

- قيود على شكل مساواة $(=)$، التي تسمّى بالمعادلات، بحيث الجانب الأيمن يعبّر عن الكمية للموارد المتاحة التي يجب تحقيقها كاملا. ويعبّر عنها ريّاضيا بالمعادلة التّالية:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ ;$$

– النموذج الرياضي أو الصياغة الرياضية للمسألة:

من خلال ماسبق، يمكن وضع ملخص لبناء النموذج الرياضي على الشكل التالي :

1- تحديد متغيرات القرار.
2- كتابة دالة الهدف.
3- وضع القيود على شكل متراجحات أو معادلات.
4- شرط عدم السلبية. إن متغيرات القرار يجب أن تكون موجبة , حيث انه من غير المنطقي أن يكون كمية الإنتاج و المبيعات سالبة.

و بالتالي يمكن كتابة النموذج بإحدى الأشكال التالية:

$$\text{Min } or\ Max\ Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \ .$$

$$subject\ to \begin{cases} g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i \ ; \\ g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq b_i; \\ g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i; \\ \quad i = 1,2, \dots, \text{m}; \\ \quad x_1, x_2, \dots x_n \geq 0 \ ; \end{cases}$$

أو:

$$Min\ or\ Max\ Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j .$$

$$subject\ to \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i ; \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i ; \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i ; \\ x_j \geq 0; \\ i = 1,2,\dots,m. \end{cases}$$

أما الشكل المتعارف عليه هو كاالتالي:

$$Min\ or\ Max\ Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n.$$

$$subject\ to \begin{cases} a_{11}\ x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n \geq b_3; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots.\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m; \\ x_1x_2, x_3, \dots, x_n \geq 0. \end{cases}$$

مثال 1 :مشكلة كمية

تنتج مؤسسة منتوجين p_1 و p_2 ربحهما الوحدوي 200 وحدة نقدية و 300 وحدة نقدية على التوالي , يمر كل منتج ب3 أقسام D_1 وD_2 وD_3 .

يبين الجدول التالي الوقت المطلوب لإنتاج وحدة واحدة و الطاقة المتاحة للأقسام الثلاثة :

الأقسام	الوقت اللازم لإنتاج وحدة واحدة		الطاقة القصوى
	p_1	p_2	
D_1	**7**	**3**	**4200**
D_2	**5**	**5**	**3500**

4800	8	4	D_3

للقيام بصياغة هذه المشكلة يجب أن نمر بالمراحل السابقة الذكر :

1. تحديد المشكلة :تتمثل المشكلة في تعظيم الربح .

2. تعيين متغيرات القرار:

x_1 : عدد الوحدات المباعة من المنتوج p_1 .

x_2: عدد الوحدات المباعة من المنتوج p_2 .

3.دالة الهدف:

تتمثل دالة الهدف في تعظيم ربح المؤسسة حيث يمكن للمؤسسة أن تحقق ربح قدره 200 و.ن إذا باعت وحدة واحدة من x_1, و ربح قدره 300 و.ن إذا باعت وحدة واحدة منx_2 .

$$\mathrm{Max}Z = 200x_1 + 300x_2.$$

4.تحديد القيود :

- القسم D_1

: يتطلب إنتاج وحدة واحدة من x_1 7ساعات عمل و لإنتاج وحدة واحدة من x_2 3 ساعات عمل , بحيث لا تتجاوز عدد ساعات العمل المتاحة في هذا القسم 4200 ساعة عمل .

$$7X_1 + 3X_2 \leq 4200$$

- القسم D_2

: من اجل إنتاج وحدة واحدة من x_1 و x_2 يتطلب 5 ساعات في كل منهما , بحيث لا تتجاوز عدد الساعات المتاحة 3500ساعة عمل .

$$5X_1 + 5X_2 \leq 3500$$

- القسم

D_3 : عدد ساعات المطلوبة لإنتاج كل من x_1, x_2 هي على التوالي 8,4 بحث الطاقة القصوى لإنتاجهما هي 4800 ساعة عمل.

$$4X_1 + 8X_2 \leq 4800$$

5. شرط عدم السلبية : $X_1 \geq 0$ و $X_2 \geq 0$.

و بالتالي الصياغة الرياضية لهذا المثال هي كالتالي :

$$MaxZ = 200x_1 + 300x_2.$$

$$subject\ to \begin{cases} 7x_1 + 3\,x_2 \leq 4200\,; \\ 5x_1 + 5\,x_2 \leq 3500; \\ 4x_1 + \ 8x_2 \leq 4800; \\ \quad x_1, x_2 \ \geq 0. \end{cases}$$

مثال 2: مشكلة اختيار

ترغب شركة في تعيين عاملين **x** و **y** للقيام بأربع مهام **A; B, C, D** حيث يقوم كل عامل بمهمتين فقط و الجدول التالي يبين ساعات العمل التي يستغرقها كل عامل في انجاز هذه المهام :

المهام / العاملين	A	B	C	D
X	**7**	**5**	**8**	**4**
Y	**6**	**7**	**5**	**3**

المطلوب: اكتب نموذج البرمجة الخطية الذ يسمح بالقيام بالمهام الأربعة في ادنى وقت ممكن؟

1– تحديد متغيرات القرار

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ اذا انجزت العملية} \\ 0 \text{ اذا لم تنجز العملية} \end{cases}$$

حيث

$i = \{1,2\}$ العاملين

$j = \{1,2,3,4\}$ المهام

2–كتابة دالة الهدف

$$\mathrm{MinZ} = 7\mathrm{x}_{11} + 5\mathrm{x}_{12} + 8\mathrm{x}_{13} + 4\mathrm{x}_{14} + 6\mathrm{x}_{21} + 7\mathrm{x}_{22} + 5\mathrm{x}_{23} + 3\mathrm{x}_{24}\,.$$

4.القيود

يقوم كل عامل بمهمتين فقط

$$;x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=2$$

$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=2;$$

إذا قام عامل x بمهمة الأولى مثلا فان الموظف y لا يقوم بها

$$x_{1j}+x_{2j}=1$$

الصياغة الرياضية كالتالي :

$$\text{MinZ}=7x_{11}+5x_{12}+8x_{13}+4x_{14}+6x_{21}+7x_{22}+5x_{23}+3x_{24}\,.$$

$$\text{subject to}\begin{cases}x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=2;\\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=2;\\ x_{1j}+x_{2j}=1\,;\end{cases}$$

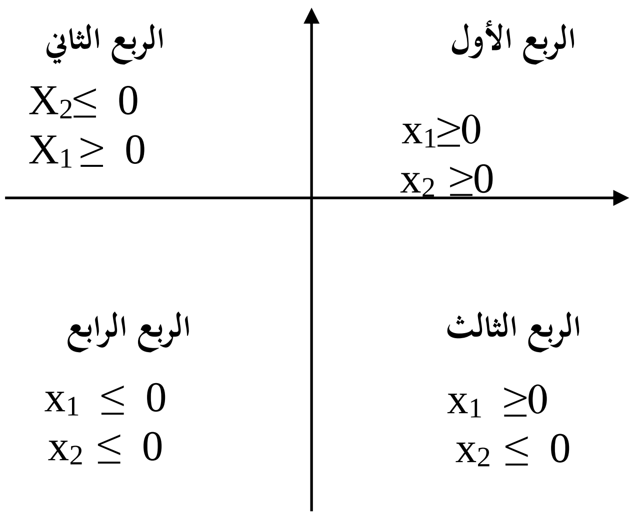
المحاضرة الثالثـــــــــة

الطريقة البيانية لحل مسائل البرمجة الخطية

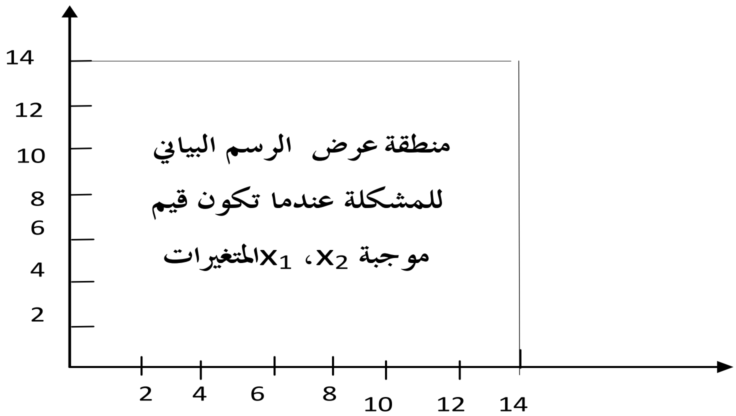
تمهيد : تعتبر الطريقة البيانية أو الهندسية من الطرق الأساسية لحل نموذج البرمجة الخطية من أجل التعرف على الحل الأمثل، تستعمل عندما يكون النموذج الرياضي يحتوي على متغيرين قرار، إلا أنها في الواقع العملي غير موجودة نظرا لوجود عدة متغيرات إقتصادية..

1–طريقة الرسم أو التمثيل البياني:

إن مجال الرسم في الطريقة البيانية يعتمد على الإحداثيات الأفقية (محور الفواصل) و الإحداثيات العمودية (محور التراتيب) بالنسبة للنماذج الرياضية التي تحتوي على متغيرين قرار كما هو موضح في الشكل التالي :



من خلال الشكل أعلاه، نلاحظ أن قيم المتغيرات الواقعة في الربع الأول موجبة , وهذا ما يتطابق مع الافتراض الذي ينص على أن تكون متغيرات القرار موجبة , ولذا يتم التركيز على الربع الأول و عدم إظهار بقية الأرباع الثلاثة الأخرى. إن الربع الأول هو الذي يهمنا في إيجاد منطقة الحلول الممكنة كما هو موضح في الشكل التالي :



يمكن تلخيص خطوات الرسم البياني لنموذج رياضي من أجل التعرف على الحل الأمثل كما يلي :

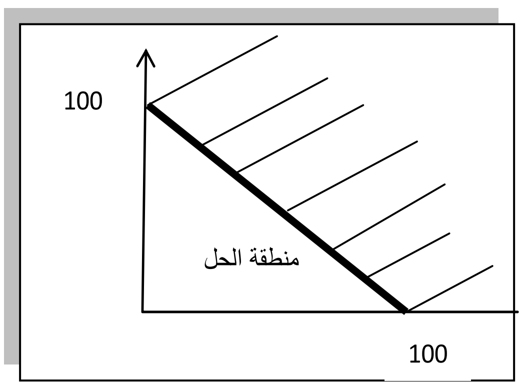
1. تكوين رسم ثنائي البعد بأخذ محور الأفقي x_1 و المحور العمودي x_2 .
2. تحويل إشارة المتراجحات اكبر أو تساوي و اصغر أو تساوي ($\geq , \leq$) الى اشارة تساوي(=).
3. تمثيل كل قيد بمستقيم الذي يسمى بالمستقيم المولد، وتحديد منطقة حل كل قيد كما يلي :

الحالة الأولى: حالة قيد من الشكل أصغر أو يساوي

في هذه الحالة، مجال منطقة الحلول الممكنة يقع تحت القيد باتجاه نقطة الأصل كما هو موضح في الشكل التالي:

على سبيل المثال لو نأخذ القيد التالي، تكون منطقة الحلول الممكنة موضحة في الشكل كمايلي:

$$x_1 + x_2 \leq 100$$

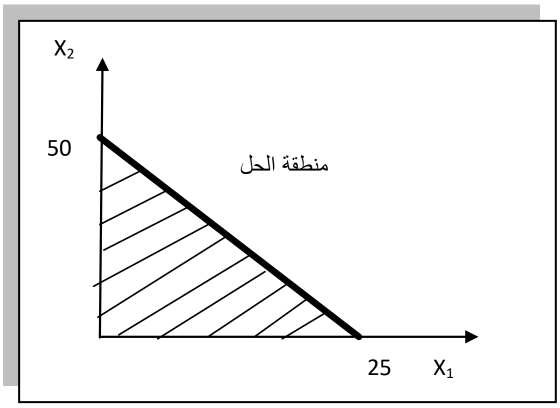


الحالة الثانية: حالة قيد من الشكل أكبر أو يساوي

في هذه الحالة، مجال منطقة الحلول الممكنة يقع فوق القيد مبتعدا عن نقطة الأصل كما هو موضح في الشكل التالي:

على سبيل المثال لو نأخذ القيد التالي، تكون منطقة الحلول الممكنة كما هي في الشكل كمايلي:

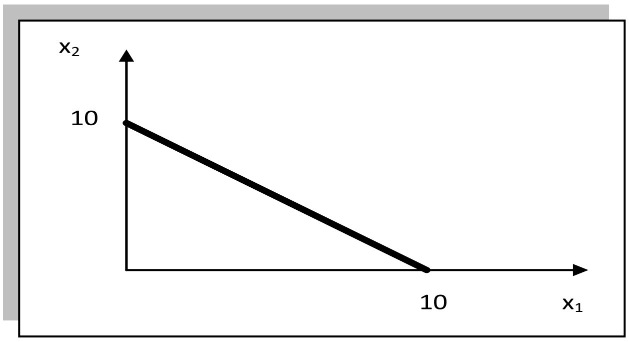
$$\mathbf{2x_1 + x_2 \geq 50}$$



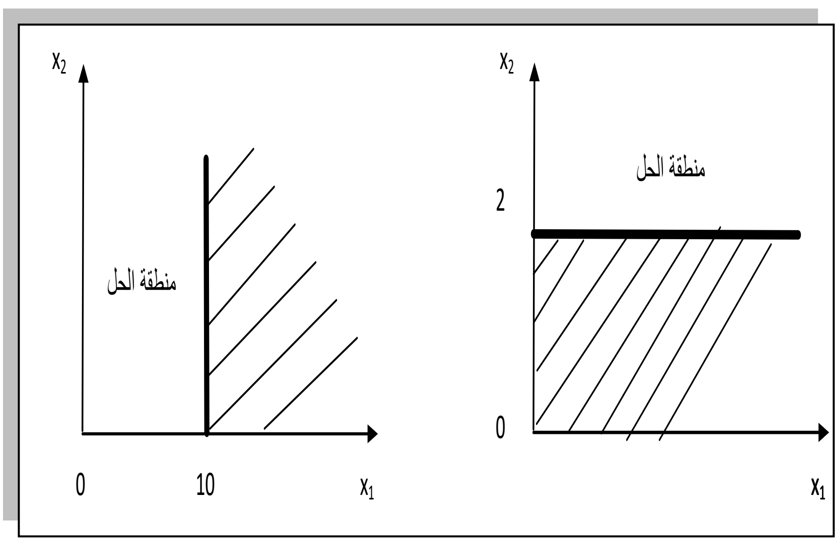
الحالة الثالثة: حالة قيد من الشكل يساوي

في هذه الحالة، مجال منطقة الحلول الممكنة هي كل النقط التي تقع على المستقيم الذي يمثل القيد على سبيل المثال لو نأخذ القيد التالي، تكون منطقة الحلول الممكنة كما هي في الشكل كمايلي:

$$x_1 + x_2 = 10$$



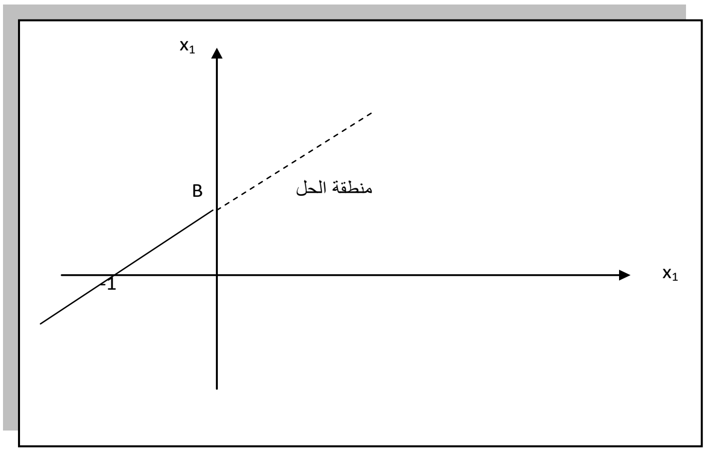
في بعض الأحيان يكون القيد يحتوي على متغير واحد فقط , ففي هذه الحالة يكون عمودي على محور الاحداثيات الذي يناسبه كما هو موضح في الشكل التالي :



الشكل3–6: يوضح الحالتين للقيدين $5x_2 \geq 10$ و $x_1 \geq 10$

حالات خاصة:

في بعض الأحيان يقع القيد في الربع السالب كما في القيد التالي : $-x_1 + x_2 \leq 1$



2– تحديد منطقة الحلول الممكنة من خلال تقاطع هذه القيود:

- شرط عدم السلبية هو الذي يحدد أن تكون منطقة الحلول الممكنة في الربع الأول. وعلى أساس أركان هذه المنطقة للحلول، يمكن استنتاج قيمة Z التي تمثل إحدى النقاط الركنية لمنطقة الحلول الممكنة سواء عن طريق حساب قيمة Z جبريا أو بتحريك المستقيم الذي يمثل دالة الهدف إلى آخر نقطة يصل إليها من منطقة الحلول الممكنة في حالة التعظيم و أول نقطة يصل إليها في حالة التدنية.

ولتوضيح هذه الطريقة نستعين بالمثال التالي :

نفترض أنه لدينا النموذج الرياضي التالي:

$$Max\,Z = 40x_1 + 50x_2$$

$$s.t \quad \begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 15 \quad ; \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \quad ; \\ x_1 \geq 0 \;\; x_2 \geq 0. \end{cases}$$

إن أول خطوة نقوم بها في الرسم البياني هو تحويل متراجحات القيود إلى معادلات وهي:

$$3x_1 + x_2 = 15 \;:(1)$$

$x_1 + 2x_2 = 12$:(2)

*إيجاد قيم x_1 وx_2.

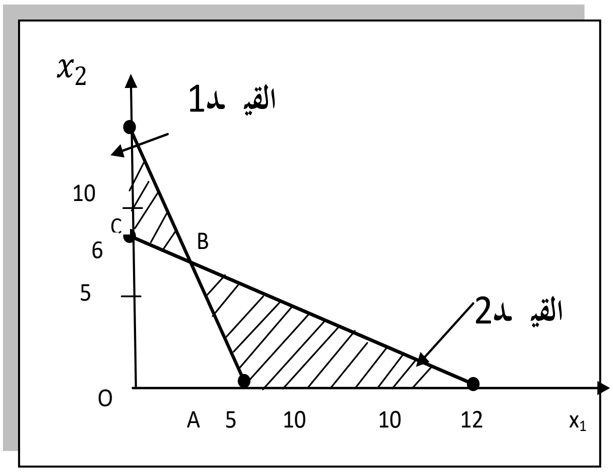
- القيد1 : $3x1 + x2 = 15$

x_1	0	5
x_2	15	0

- القيد2: $x1 + 2x2 = 12$

x_1	0	12
x_2	6	0

عندما نجد إحداثيات النقطتين x_1و x_2 في كل قيد نقوم بالرسم على معلم متعامد ومتجانس.



OABC هي منطقة الحلول الممكنة

* إيجاد إحداثيات كل نقطة من النقاط الركنية

- النقطة O:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

- النقطة **A**:

$$\begin{cases} 3x_1 + x2 = 15 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

-
- النقطة **C**:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 12 \\ x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x1 = 0 \\ x2 = 6 \end{cases}$$

- النقطة **B**: بحل جملة المعادلتين نجد

$$\begin{cases} 3x_1 + x2 = 15 \\ x_1 + 2x_2 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3.6 \\ x_2 = 4.2 \end{cases}$$

الحل الأمثل:

يتم تحديد الحل الأمثل بتعويض قيم إحداثيات كل نقطة في دالة الهدف على النحو التالي:

قيمة **Z**	دالة الهدف **$Z = 40x1 + 50x2$**	القيد2 **$x_1 + 2x_2 \leq 12$**	القيد 1 **$3x1 + x2 \leq 15$**	النقاط الركنية
0	**$Z0 = 40(0) + 50(0)$**	**$0 + 2(0) = 0$**	**$3(0) + 0 = 0$**	**0 (0.0)**
200	**$ZA = 40(5) + 50(0)$**	**$5 + 2(0) = 5$**	**$3(5) + 0 = 15$**	**A (5.0)**
354	**$ZB = 40(3.6) + 50(4.2)$**	**3.6 $2(4.2) = 12$**	**$3(3.6) + 4.2 = 15$**	**B (3.6 ,4.2)**
300	**$ZC = 40(3) + 50(6)$**	**$0 + 2(6) = 12$**	**$3(0) + 6 = 6$**	**C (0,6)**

من خلال الجدول أعلاه نستنتج أن أكبر قيمة لدالة الهدفz هي 354 وبالتالي الحل الأمثل يكمن في أن النقطة الركنية المثلى هي B(3.6،4.2) .

المحاضرة الرابعة

خوارزمية **Dantizig** (**simplex**) لحل مسائل البرمجة الخطية

1- تمهيــد:

إن الطريقة البيانية التي تطرقنا إليها في المحاضرة السابقة تتعلق بإيجاد الحل الأمثل إذا كان الأمر يتعلق بمتغيرين فقط , إلا انه في الواقع نجد أن معظم مسائل البرمجة الخطية ممثلة بأكثر من متغيرين , فإذا افترضنا أن دالة الهدف تحتوي على **n** متغير و **m** قيدا فان الطريقة البيانية غير مناسبة نتيجة لصعوبة تحديد منطقة الحلول الممكنة في فضاء ذو أبعاد متعددة. وعليه سنتطرق إلى الطريقة العامة مهما كان عدد متغيرات القرار. تسمى هذه الطريقة بخوارزمية **simplex** التي تنسب إلى العالم **Dantizig** و فريقه.

2- حالات تطبيق طريقة Dantzig

هناك ثلاث حالات لتطبيق طريقة **Dantzig**

- إذا كانت دالة الهدف من الشكل **Max** و جميع القيود على شكل اصغر أو يساوي نستعمل طريقة **simplex** العادية
- إذا كانت دالة الهدف من الشكل **Max** و وجود إحدى القيود من الشكل اكبر أو يساوي على الأقل نستعمل طريقة **simplex** الموسعة (طريقة المرحلتين أو **Big-M**) .
- إذا كانت دالة الهدف من الشكل **Min** نستعمل طريقة **simplexe** الموسعة (طريقة المرحلتين أو **Big-M**)

3- أساسيات طريقة Dantzig :

تعتمد طريقة **Dantzig** على خطوات متتالية و منتظمة من اجل إيجاد قيم المتغيرات التي تعظم أو تقلل دالة الهدف وهي :

الخطوة الأولى : تحويل نموذج البرمجة الخطية من الصيغة العامة إلى الصيغة القياسية

وذلك بإضافة متغيرات جديدة تسمى متغيرات الفروقات أو الانحرافات، و التي تعبر عن الكمية المتبقية من المادة الأولية أو ساعات العمل غير المستغلة ...الخ, و التي يتم إدراجها على النحو التالي :

✵ إذا كان القيد من الشكل اصغر أو يساوي نضيف متغير الفرق (الانحراف) بمعامل (**+1**) مثلا :

$$a_{11}\, x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1;$$

بعد إضافة متغير الفرق يصبح القيد:

$$a_{11}\, x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + e_1 = b_1;$$

إذا كان القيد من الشكل اكبر أو يساوي نضيف متغير الفرق (الانحراف) بمعامل (-1) مثلا :

$$a_{11}\,x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1;$$

بعد إضافة متغير الفرق يصبح القيد:

$$a_{11}\,x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n - e_1 = b_1;$$

كما تضاف هذه المتغيرات (متغيرات الفرق) إلى دالة الهدف بمعاملات صفرية , بالإضافة إلى تطبيق شرط عدم السلبية.

يطلق على المصفوفة التي نتحصل عليها بمصفوفة الحل الأساسي:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots\ldots\ldots a_{2n} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots\ldots\ldots a_{mn} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

الخطوة الثانية : وضع معجم (جدول) الحل الابتدائي (القاعدي)

- بعد تحويل المتراجحات إلى معادلات بإضافة متغيرات الفرق نجد أن عدد المتغيرات اكبر من عدد المعادلات
- إن المتغيرات التي تأخذ قيم صفرية هي متغيرات غير أساسية (**non–basic variable**)باقي المتغيرات هي متغيرات أساسية. إن الحل الذي تم التوصل إليه من خلال كتابة المتغيرات الأساسية بدلالة المتغيرات غير الأساسية هو حل ابتدائي أساسي الذي يكون في احد النقاط الركنية لمنطقة الحلول الممكنة و المتمثل في نقطة الأصل التي تكون دالة الهدف عندها مساوية إلى الصفر.

و يعود السبب في اختيار نقطة الأصل دون النقاط الركنية الأخرى التي تعتبر أيضا من الحلول الأساسية هو الابتعاد عن أسلوب التجربة و الخطأ و الإطالة في إيجاد المتغيرات الأساسية .

الخطوة الثالثة : تعيين المتغير الداخل و الخارج

يتم الانتقال من الحل الأساسي الابتدائي إلى الحل الجديد و ذلك باختيار احد المتغيرات غير الأساسية ليصبح متغيرا أساسيا و يسمى بالمتغير الداخل , وبما أننا نرغب في أن يظل عدد المتغيرات **m** فإننا نختار احد المتغيرات الأساسية ليصبح متغيرا غير أساسي و يسمى بالمتغير الخارج .

وبما أن قيمة دالة الهدف عند الحل الأساسي هي الصفر فيبدو من الواضح أن إدخال أي متغير ذو قيمة موجبة سيزيد من قيمة دالة الهدف , من هذا نستنتج أن الحل الأساسي هو ليس الحل الأمثل.

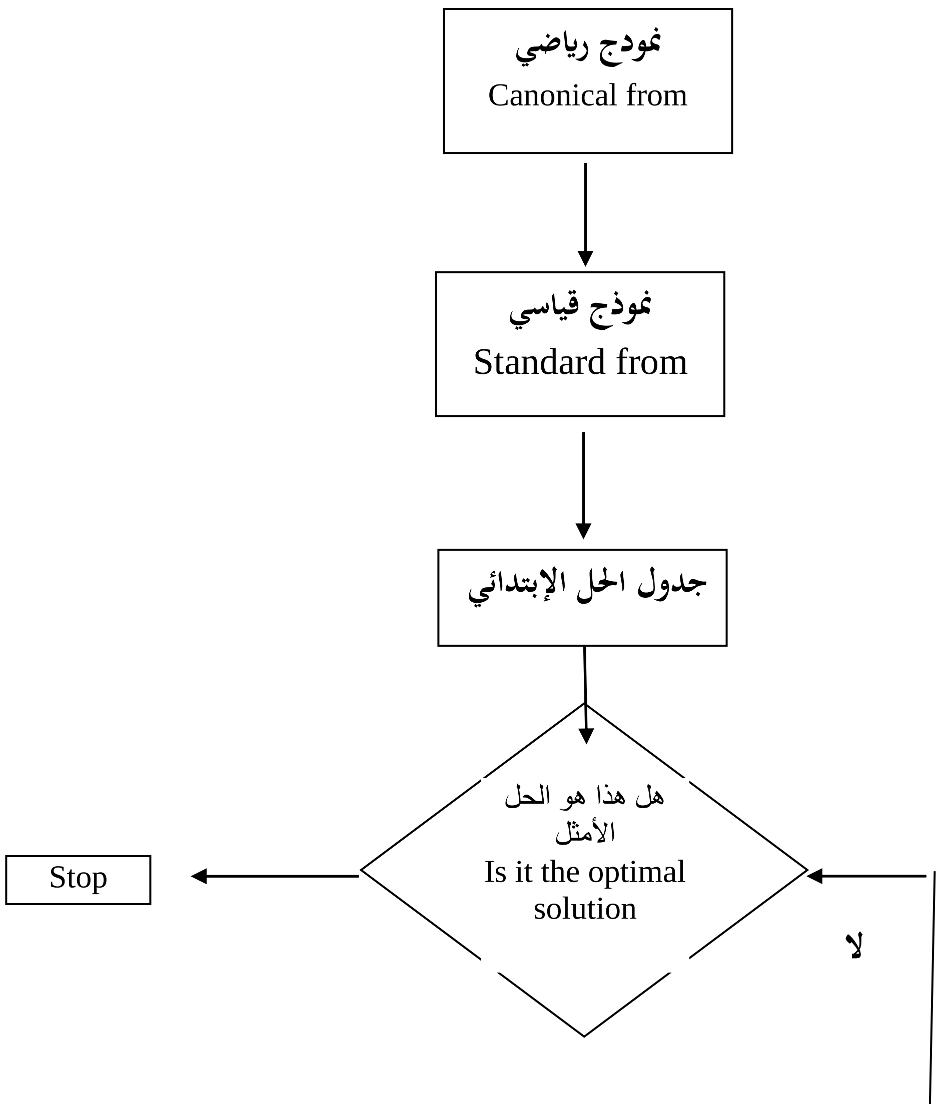
- المتغير الداخل : ذلك المتغير الذي تؤدي زيادته إلى زيادة قيمة دالة الهدف بأكبر ما يمكن , بتعبير آخر سنختار المتغير الذي له اكبر معامل في دالة الهدف ليكون المتغير الداخل للأساس , وتجدر الإشارة إلى أن اختيار هذا المتغير قد لا يؤدي بالضرورة إلى زيادة قيمة دالة الهدف بأكبر ما يمكن في حالة التعظيم بسبب القيود المفروضة على هذا المتغير .
- المتغير الخارج : ذلك المتغير الذي تصل قيمته إلى الصفر قبل غيره من المتغيرات ,و ذلك عند زيادة قيمة المتغير الداخل .

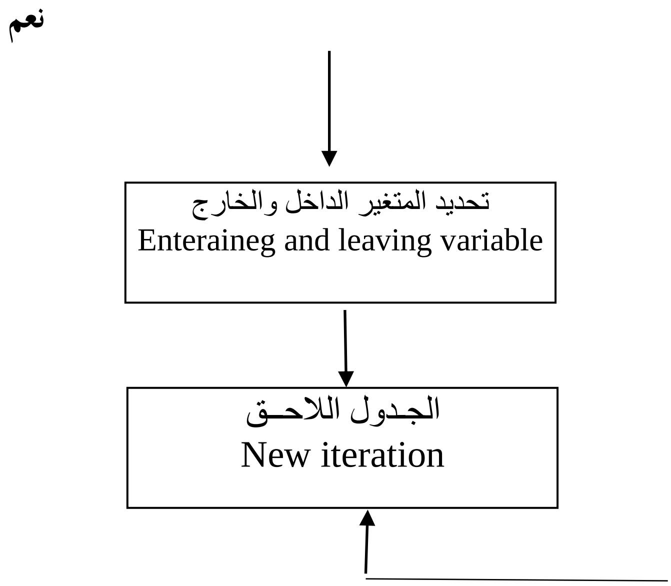
الخطوة الرابعة :اختبار قيمة دالة الهدف

يتم اختبار قيمة دالة الهدف في كل مرحلة حيث نصل إلى الحل الأمثل عندما تؤدي الزيادة في متغيرات إلى نقص قيمة دالة الهدف، بمعنى أخر عندما تكون معاملات السطر الأخير سالبة أو معدومة.

ويمكن توضيح هذه الخطوات بالمخطط الانسيابي التالي :

خطوات الحل الانسيابي لطريقة Dantzig





4- خوارزمية Simplex:

ترتكز هذه الطريقة على جداول تسمى بجداول simplexe ، بحيث يحتوي كل جدول من هذه الجدول على المعلومات الأساسية لحل مسالة البرمجة الخطية مثل معاملات المتغيرات التي تسمى بالمعاملات التكنولوجية، و معاملات الطرف الأيمن في المعادلات .

مثال: لدينا النموذج التالي:

$$\mathrm{MaxZ} = 40\mathrm{x}_1 + 50\mathrm{x}_2$$

$$subject\ to\ \begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 15; \\ x_1 + 2x_2 \leq 12\ ; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{cases}$$

لإيجاد الحل الأمثل نتبع نفس الخطوات السابقة الذكر :

الخطوة الأولى :تحويل المتراجحات إلى معادلات بإضافة متغيرات الفرق (الصيغة القياسية)

$$MaxZ = 40x_1 + 50x_2 + 0e_1 + 0e_2$$

$$subject\ to \begin{cases} 3x_1 + x_2 + e_1 = 15; \\ x_1 + 2x_2 + e_2 = 12; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, e_1 \geq 0, e_2 \geq 0; \end{cases}$$

و بالتالي تصبح مصفوفة القيود كالتالي :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

الخطوة الثانية : إعداد جدول **simplex** رقم **1**

الجدول الأول من جداول **Simplex**

يتم وضع المعطيات في جدول يطلق عليه بجدول **simplex** من اجل البدء في عملية تحسين الحل

المتغيرات	c_b	40	50	0	0	b_i	o_i
		x_1	x_2	e_1	e_2		
e_1	0	3	1	1	0	15	15
e_2	0	1	2	0	1	15	6
$\Delta_j = c_j - z_j$		40	50	0	0	0	

حيث أن :

Δ_j : صافي ربح الوحدة .

c_j : الربح المفقود للوحدة .

z_j: عائد الوحدة الاجمالية .

$$* \quad \Delta_j = c_j - z_j \ \Rightarrow \Delta_j = 40 - [(3 * 0) + (1 * 0)]$$
$$\Rightarrow \Delta_j = 40$$
$$* \quad \Delta_j = c_j - z_j \ \Rightarrow \Delta_j = 50 - [(1 * 0) + (2 * 0)]$$
$$\Rightarrow \Delta_j = 50$$

من خلال قراءة الجدول نلاحظ أن قيمة دالة الهدف تساوي 0 هذا نتيجة عدم وجود إنتاج في المرحة الأولى أي $x_1 = 0$ و$x_2 = 0$ و الطاقات غير المستغلة $e_1 = 15$ و $e_2 = 12$.

الخطوة الثالثة تعيين المتغير الداخل و الخارج

- المتغير الداخل : المتغير الداخل هو x_2 يسمى بعمود محور الدوران .
- المتغير الخارج : يحدد المتغير الخارج بقسمة ثوابت b_i على معاملات عمود محور الدوران (o_i) .
- المتغير الخارج هو الذي يقابل اقل قيمة موجبة تماما .
- القيمة التي يتقاطع فيها عمود محور الدوران مع سطر المتغير الخارج يطلق عليها بعنصر الارتكاز .

بعد تعيين هذين المتغيرين (الداخل و الخارج)

- نحول محور الدوران إلى شعاع وحدة .
- نحول السطر الذي ينتمي إليه عنصر الارتكاز بتقسيم جميع قيمه على هذا العنصر.
- بقية العناصر تحسب إما بطريقة **Gauss–Jordan** أو بطريقة **Pivot** .

– الجدول الثاني من جداول **Simplex**:

المتغيرات	c_b	40	50	0	0	b_i	o_i
		x_1	x_2	e_1	e_2		
e_1	0	5/2	0	1	−1/2	9	18/5
x_2	50	1/2	1	0	1/2	6	12
$\Delta_j = c_j - z_j$		15	0	0	−25	300	

قراءة الجدول:

نلاحظ أن الربح ارتفع من 0 و.ن إلى 300 و.ن و ذلك بإنتاج 6 وحدات من x_2 وعدم انتاج أي وحدة من x_1 من خلال استنفاد كل الكمية المتاحة من e_2 و بقاء كمية غير مستغلة من $e_1 = 9$.

الخطوة الرابعة اختبار قيمة دالة الهدف

نلاحظ في الجدول أعلاه أن قيم Δ_j ليست جميعها سالبة او معدومة، وبالتالي لم نصل بعد إلى الحل الأمثل، وعليه المتغير الداخل هو x_1.

الجدول الثالث:

المتغيرات	c_b	40	50	0	0	b_i	o_i
		x_1	x_2	e_1	e_2		
x_1	40	1	0	2/5	−1/5	18/5	
x_2	50	0	1	−1/5	3/5	42/10	
$\Delta_j = c_j - z_j$		0	0	−6	−22	354	

قراءة الجدول :

بما أن جميع قيم Δ_j سالبة أو معدومة فقد وصلنا الى الحل الامثل فادخال أي وحدة من المتغيرات ذات المعاملات السالبة في السطر الأخير من الجدول تؤدي الى تخفيض الربح. وعليه نستنتج أن الربح الأقصى الذي يمكن الوصول إليه هو 354 و.ن وذلك بإنتاج 5/18 وحدة من x_1 و10/42 وحدة من x_2 و ان جميع الكميات المتاحة قد استغلت .

المحاضرة الخامسة

النموذج المرافق(المسالة الثنائية)

1-مقدمة:

إن السياسة المثلى التي ينتهجها كل منتج هي الوصول إلى أقصى ربح في ظل القيود المتمثلة في ندرة الموارد الاقتصادية المتاحة و تكلفتها , فهو يسعى لبلوغ هدفه للوصول إلى مستوى معين من الإنتاج بأدنى تكلفة ممكنة و على هذا الأساس فان نموذج البرمجة الخطية قد عالج مشكلة التعظيم في ظل قيد التكاليف (ساعات العمل , الكميات المتاحة,...الخ) كما عالج مشكلة التدنية في ظل قيد الإنتاج (عدد الوحدات المنتجة , ...الخ) أي هناك علاقة تربط بين نموذج التعظيم و التدنية و التي يطلق عليها مصطلح نظرية الترافق(المقابل) أو الثنائية .

2- النموذج المرافق أو الثنائي

إن كل نموذج برمجة خطية يرتبط بنموذج آخر يسمى الأول النموذج الأصلي و الثاني بالنموذج المرافق أو المقابل.

إذا كان النموذج الأصلي (**PRIMAL MODEL**) من الشّكل التّالي:

$$Max\, Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n;$$

$$subject\ to \begin{cases} a_{11}\,x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n \le b_3; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m; \\ x_j \ge 0 \qquad .j = 1,2,3,\dots,n. \end{cases}$$

b_i : تمثل الموارد المحدودة التي لا يمكن تجاوزها .

إن النموذج المرافق أو المقابل (**DUAL MODEL**) يمكن كتابته على النّحو التّالي:

$$\mathrm{Min}\;\; \mathrm{Z} = \mathrm{b_1y_1} + \mathrm{b_2y_2} + \cdots + \mathrm{b_my_m};$$

$$\text{subject to}\begin{cases} a_{11}\, y_1 + a_{21} y_2 + \cdots + a_{m1} y_m \geq c_1; \\ a_{12}\, y_1 + a_{22} y_2 + \cdots + a_{m2} y_m \geq c_2 \\ \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \cdots + a_{mn} y_m \geq c_n; \\ y_1, y_2, y_3, \dots, y_m \geq 0. \end{cases}$$

y_i :تكلفة الوحدة الواحدة من كل مورد

$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, y_i$: مجموع تكلفة الموارد المستعملة لإنتاج وحدة واحدة من x_j .

من خلال الصيغتين السابقتين يتضح لنا أن :

- معاملات دالة الهدف في النموذج الأصلي تصبح ثوابت الجانب الأيمن في النموذج المقابل و بصورة مشابهة ثوابت الجانب الأيمن في النموذج الأصلي تصبح معاملات دالة الهدف في النموذج المقابل.
- عدد المتغيّرات في النّموذج الأصلي تساوي عدد القيود في النموذج المرافق، وعدد القيود في النّموذج الأصلي تساوي
- عدد المتغيّرات في النّموذج المرافق، بمعنى آخر كلّ قيد في النّموذج الأصلي يتحول إلى شعاع عمودي في النّموذج المقابل. و بالتالي يمكن كتابة النموذج الأصلي و المقابل على الشكل المصفوفي كما يلي :

النموذج الأصلي(**PRIMAL**)	النموذج المقابل أو المرافق (**DUAL**)
$\text{ax orMin } Z = CX$ $ST \begin{cases} AX \leq (\geq) b; \\ X \geq 0. \end{cases}$	$\text{Min or Max } T = bY$ $ST \begin{cases} A^T\, Y \geq (\leq) C; \\ Y \geq 0. \end{cases}$

الجدول التالي يوضح طريقة تحويل النموذج الأصلي إلى النموذج المقابل وفقا للقوانين الرياضية المتعلقة بالمصفوفات :

Max Z	⇔	**Min Z**
$x_j \geq 0$	⇔	contrainte j $\geq$
$x_j \leq 0$	⇔	contrainte j $\leq$
$x_j \in \mathbb{R}$	⇔	contrainte j $=$
contrainte i $\leq$	⇔	$y_i \geq 0$
contrainte i $\geq$	⇔	$y \leq 0$
contrainte i $=$	⇔	$y_i \in \mathbb{R}$

من أهم الملاحظات التي يمكن استخلاصها :

- مرافق النموذج المرافق هو النموذج الأصلي .
- إن دالة الهدف في النموذج الأصلي و النموذج المقابل لها نفس القيمة المثلى (القيمة المثلى في تعظيم النموذج الأصلي تساوي القيمة المثلى في تدنية النموذج المرافق).

3-2- التفسيرات الاقتصادية للنموذج المقابل

إن نماذج البرمجة الخطية كما ذكرنا سابقا تهدف إلى تخصيص الموارد النادرة التي تساهم في تحديد الحل الأمثل فمثلا إذا كان لدينا النموذج الأصلي هو تعظيم الأرباح من خلال إنتاج كميات من السلع بواسطة الموارد المحدودة فان المسالة المرافقة هي عبارة عن تدنية دالة الهدف التي تعبر أدنى قيمة يجب بيع بها هذه الموارد المتاحة من اجل تحقيق نفس الربح الذي تحصل عليه في النموذج الأصلي، وذلك تحت قيود تهدف إلى أن أسعار بيع أي عنصر من عناصر الإنتاج يجب أن يكون اكبر من (الربح).

وللتوضيح أكثر عن النموذج المرافق نستعين بالمثال التّالي الّذي وضحناه في المحاضرة الرابعة من أجل شرح نظرية **simplexe** :

$$\text{Max } Z = 40x_1 + 50x_2;$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 15 ; \\ x_1 + 2x_2 \leq 12 ; \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

حيث يعبر القيد الأول عن الموارد المتاحة للمادة الأولية M_1 ، و القيد الثاني يتعلّق بالمادة الاولية M_2 . أمّا دالة الهدف تمثّل تعظيم الرّبح، ومتغيّرات القرار هي الكمية المنتجة من x_1, x_2 .
بناء على ما سبق من التّعريفات والقوانين الرّياضية المتعلّقة بالنّموذجين الأصلي والمرافق، يمكن صياغة النّموذج المرافق كمايلي:

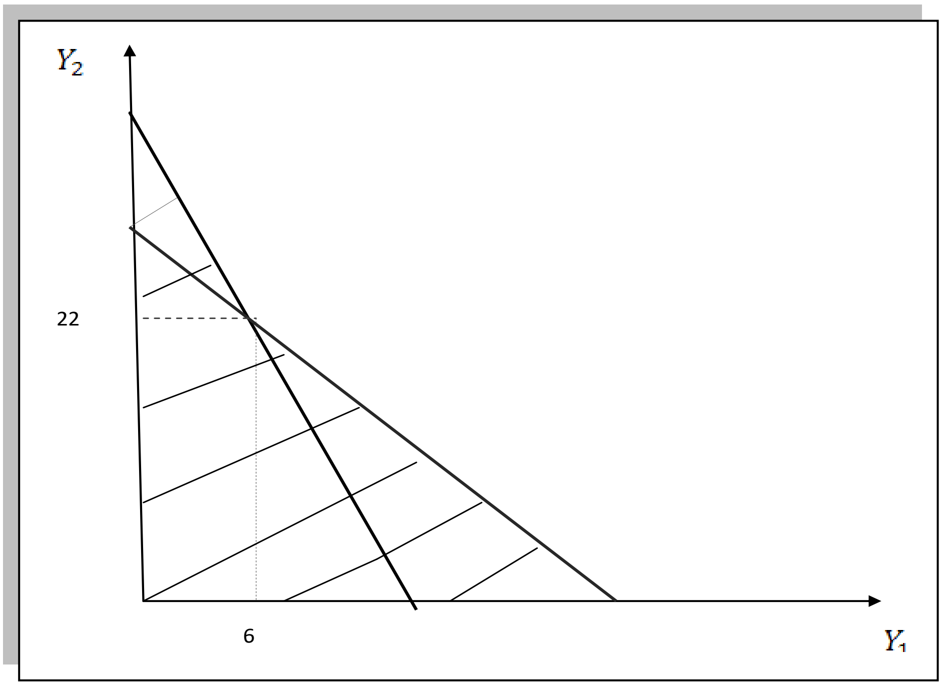
$$Min\ Z' = 15Y_1 + 12Y_2;$$

$$ST \begin{cases} 3Y_1 + Y_2 \geq 40; \\ Y_1 + 2Y_2 \geq 50; \\ Y_1 \geq 0, Y_2 \geq 0. \end{cases}$$

بحيث:

- Y_1: يمثّل السعر الذي تباع به كل وحدة واحدة من المادة الأولية M_1 .
- Y_2: يمثّل السعر الذي تباع به كل وحدة واحدة من المادة الأولية M_2

يمكن إيجاد الحل الأمثل للنموذج المرافق بيانيا كما هو موضّح في الشّكل التّالي، بحيث تظهر النّقطة ذات الإحداثيات (**6**، **22**) كحل أمثل بحيث إذا عوضنا هاتين القيمتين في دالة الهدف سنتحصّل على القيمة **354**.



من خلال الشّكل أعلاه، يتبيّن بأنّه إذا بيعت المادة الأولية M_1 بسعر **6** وحدات نقدية للوحدة الواحدة، و المادة الأولية M_2 بسعر **22** وحدة نقدية للوحدة الواحدة، فان القيمة الدنيا التي تصل إليها دالة الهدف هي: Z'=**354**

كما يمكن استخلاص الحل الأمثل للنموذج المرافق انطلاقا من الجدول الأخير من جداول **Simplexe** للنموذج الأصلي

(أنظر في المثال المتعلق بالفصل الثّاني)، حيث نجد أن :

- قيم متغيرات الفرق و التي تظهر في دالة الهدف للنموذج الأصلي هي نفسها قيم متغيرات القرار بالقيمة المطلقة للنموذج المرافق على الترتيب.
- قيم المتغيرات الأساسية عند الحل الأمثل للنموذج الأصلي الظاهرة في عمود الثوابت هي القيم المقابلة لمتغيرات الفرق للنموذج المرافق التي تظهر في سطر دالة الهدف .

عند حل النموذج المرافق باستعمال خواريزمية **simplexe** نتحصّل على الجدول الأخير الذي يظهر فيه الحل الأمثل كمايلي:

المتغيرات	c_b	40	50	0	0	b_i	o_i
		y_1	y_2	e_1	e_2		
y_1	**15**	**1**	**0**	**2/5**	**−1/5**	**6**	
y_2	**12**	**0**	**1**	**−1/5**	**3/5**	**22**	
$\Delta_j = z_j - c_j$		**0**	**0**	**−18/5**	**−42/10**	**354**	

الجدول الأخير من جداول **simplexe** للنموذج المرافق.

من خلال الجدول أعلاه، يمكن قراءة قيم متغيرات القرار لكلا النّموذجين الأصلي والمرافق وفقا للقواعد المذكورة سابقا. وكذلك القيمة المثلى الظاهرة في السطر الأخير المقدرة بقيمة 354.

المحاضرة السادسة:

تمارين تطبيقية محلولة

التمرين الأول (الصياغة الرياضية):

مصنع لإنتاج صوبات الغاز ينتج نوعين من الصوبات و كل نوع يمر بمرحلتين إنتاجيتين الأولى طاقتها الإنتاجية 40 ساعة أسبوعيا و المرحلة الثانية طاقتها الإنتاجية 60 ساعة أسبوعيا فإذا كان النوع الأول يحتاج إلى 4 ساعات في مرحلة الأولى و 10 ساعات في المرحلة الثانية، و النوع الثاني يحتاج إلى 5 ساعات في المرحلة الأولى و 6 ساعات في المرحلة الثانية:

أكتب نموذج البرمجة الخطية الذي يحقق أكبر ربح ممكن، إذا كان ربح الوحدة من النوع الأول 3 و.ن، و ربح الوحدة من النوع الثاني قدر بقيمة 6 و.ن؟

الحـــــل:

1- تحديد دالة الهدف:

2- نحدّد دالة الهدف: إن دالة الهدف تمثل الربح و بالتالي تكون على شكل Max Z.

دالة الهدف : $\mathbf{Max\ Z = 3x1+3x2}$

3- تحديد المتغيرات: المتغيرات تمثل عدد الوحدات المنتجة من كل نوع

نفرضx_1:عدد الوحدات المنتجة من النوع A.

نفرض x_2 :عدد الوحدات المنتجة من النوعB.

4- القيود: القيود تتبع المراحل الإنتاجية، القيد الأول هو قيد المرحلة الأولى والقيد الثاني هو قيد المرحلة الثانية.

شكل القيد الأول هو أقل أو يساوي من (40): $4x_1 + 5x_2 \leq 40$

أما القيد الثاني يكون على النحو التالي: $10x_1 + 6x_2 \leq 60$

4-العنصر الأخير من عناصر نموذج البرمجة الخطية هو شرط عدم السلبية: $x_1 , x_2 \geq 0$

وبالتالي الصياغة الرياضية أو نموذج البرمجة الخطية لهذه المسألة يكون على النحو التالي:

$$\mathbf{Max\ \ Z = 3x1+6x2}$$

$$\mathbf{4\,x_1+5x_2 \leq 40}$$

$$10x_1+6x_2\leq 60$$

$$x_1 ,x_2 \geq 0$$

التمرين الثاني (الصياغة الرياضية)

تنتج مؤسّسة منتوجين بحيث يمران عبر ورشتين كما يلي: ورشة الطّهي والتّعبئة. الجدول التالي يبين المعلومات المتعلّقة بالوقت الأقصى المتوفر في كل ورشة يوميا وكذا الوقت (بالساعات) الذي تحتاجه الوحدة الواحدة من كلا المنتوجين، بالإضافة إلى الربح المتوقع (وحدة نقدية) في كلّ وحدة:

الورشات / المنتوجات	ورشة الطّهي	ورشة التّعبئة	الربح المتوقع في الوحدة
المنتوج 1	3	1	40 و.ن
المنتوج 2	1	2	50 و.ن
الوقت الأقصى المتوفر(سا)	11	12	

1 – عين متغيرات القرار بحيث يريد مدير الشركة تحقيق أكبر ربح ممكن.

2 – أكتب الصياغة الرياضية للبرمجة الخطية من اجل تعظيم الربح.

الحـــل:

من اجل إيجاد النموذج الرياضي للبرمجة الخطية نتبع الخطرات التالية:

أولا: تحديد متغيرات القرار:

ليكن : x_1 الكمية المنتجة من المنتوج 1.

X_2 الكمية المنتجة من المنتوج 2.

ثانيا :تحديد دالة الهدف (تعظيم الربح) :

$$\text{Max } Z = 40x_1 + 50x_2$$

ثالثا: تحديد القيود:

$$3x_1 + 1x_2 \leq 15$$

$$1x_1 + 2x_2 \leq 12$$

رابعا: شرط عدم السلبية: $x_1 , x_2 \geq \mathbf{0}$

النموذج الرياضي للبرمجة ا لخطية هو:

$$MaxZ = \quad \mathbf{40}x_1 + \mathbf{50}x_2$$

$$\textbf{St} : \begin{cases} \mathbf{3}x_1 + \mathbf{1}x_2 \leq \mathbf{15} \\ \mathbf{1}x_1 + \mathbf{2}x_2 \leq \mathbf{12} \\ x_1 \geq \mathbf{0} \\ x_2 \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

التمرين الثالث:

تنتج الشركة الوطنية للاثاث نوعين من المكاتب، دو حجم كبير وحجم صغير، يمران عبر ثلاث ورشات كمايلي: ورشة القص والتركيب، ورشة الإنهاء وورشة التغليف. الجدول التالي يبين الوقت الأقصى المتوفر في كل ورشة وكذا الوقت (بالساعات) الذي تحتاجه الوحدة الواحدة من كلا المكتبين، بالإضافة إلى الربح المتوقع (وحدة نقدية) من كل نوع:

الورشات / المكاتب	ورشة القص والتركيب	ورشة الإنهاء	ورشة التغليف	الربح المتوقع في الوحدة
الحجم الكبير	1	2	4	100 و.ن
الحجم الصغير	3	6	5	70 و.ن
الوقت الأقصى المتوفر	90	60	80	

1 – عين متغيرات القرار بحيث يريد مدير الشركة تحقيق أكبر ربح ممكن.

2 – أكتب الصياغة الرياضية لهذه المسألة من أجل تحقيق أقصى ربح ممكن.

حل التمرين الثالث:

من اجل إيجاد النموذج الرياضي للبرمجة الخطية نتبع الخطرات التالية:

أولا تحديد متغيرات القرار:

ليكن : x_1 الكمية المنتجة من المكاتب الكبيرة

x_2 الكمية المنتجة من المكاتب الصغيرة

ثانيا :تحديد دالة الهدف

$$Z = 100x_1 + 70x_2$$

ثالثا: تحديد القيود:

قيد ورشة القص و التركيب: $x_1 + 3x_2 \leq 90$

قيد ورشة الانهاء: $2x_1 + 6x_2 \leq 60$

قيد ورشة التغليف: $4x_1 + 5x_2 \leq 80$

رابعا: شرط عدم السلبية:

وبالتالي النموذج الرياضي للبرمجة ا لخطية هو:

$$MaxZ = 100x_1 + 70x_2$$

St :

$$\begin{cases} 1x_1 + 3x_2 \leq 90 \\ 2x_1 + 6x_2 \leq 60 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 80 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

$x_2 \geq 0$

التمرين الرابع (الحل الأمثل بالطريقة البيانية)

حل النموذج التالي بالطريقة البيانية:

النموذج الرياضي للبرمجة الخطية هو:

$$MaxZ = 10x_1 + 20x_2$$

$$\text{St} : \begin{cases} x_1 \leq 600 \\ x_2 \leq 300 \\ x_1 + x_2 \leq 800 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

الحـــل:

من اجل حل النموذج الرياضي يجب ان نتبع الخطوات التالية:

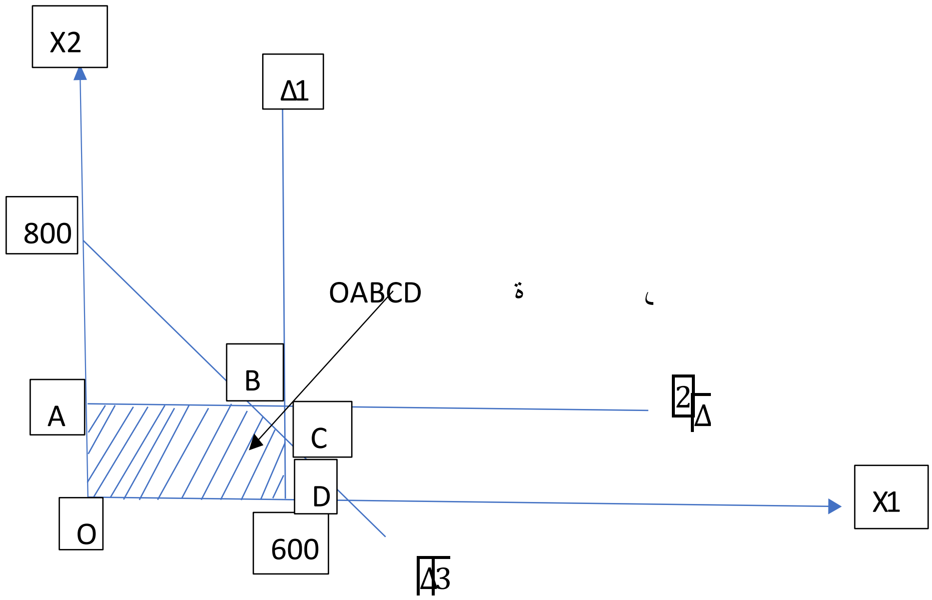
أولا نرسم معلم متعامد و متجانس (o,x1,x2) .

ثانيا نقوم بتحويل كل القيود من متراجحات الى معادلات مستقيمات التي نقوم برسمها في المعلم المتعامد و المتجانس كما يلي:

$(\Delta 1(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_1 = 600$

$(\Delta 2) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots .\ x_2 = 300$

$(\Delta 3) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots .\ .\ x_1 + x_2 = 800$



ثالثا: تحديد منطقة الحلول المثلى: كما هو مبين في الشكل OABCD

رابعا : إيجا د الحل الأمثل و ذلك بحساب قيمة دالة الهدف Z عند كل نقطة متطرفة من منطقة الحلول الممكنة كما يلي:

النقاط المتطرفة للشكل	X1	X2	$Z = 10x_1 + 20x_2$
O	0	0	$Z_O = 10(0) + 20(0) = 0$
A	0	300	$Z_A = 10(0) + 20(300) = 6000$
B	500	300	$Z_B = 10(500) + 20(300) = 11000$
C	600	200	$Z_C = 10(600) + 20(200) = 10000$
D	600	0	$Z_D = 10(600) + 20(0) = 6000$

نتيجة:

نلاحظ من الجدول ان اكبر قيمة لدالة الهدف تتحقق عند النقطة **B** و بالتالي فان الحل الأمثل هو:

$$X1 = 500$$

$$X2 = 300$$

$$Z_{max} = \mathbf{11000}$$

أي يجب على هذه المؤسسة ان تنتج 500 وحدة من المنتوج الأو ل و 300 وحدة من المنتوج الثاني من اجل تحقيق اقصى ربح ممكن يقدر ب 11000 دج.

التمرين الخامس: (تدنية التكاليف)

تصنع مؤسسة المنتوج Y باستعمال المنتجات نصف المصنعة (A,B,C)
الجدول التالي يبين الاستعمالات اليومية للمنتجات (A,B,C) لإنتاج المنتوجY.

الاستعمالات اليومية للمنتجات (A,B,C)

الكمية (كغ)	A	B	C
	18	12	36

المنتجات(A,B,C) تنتج بواسطة الآلة M1 أو الآلةM2.
الكمية المنتجة ملخصة في الجدول التالي:

الكمية المنتجة

نوع الآلة	M1	M2
A	9كغ	2كغ
B	3كغ	2كغ
C	6كغ	12كغ

مثلا إذا استعملت الآلة M1 لمدة 1ساعة فإنها تنتج 9كغ من المنتوج A، و 3كغ من المنتوجB ، و6كغ من المنتوج C .

- **إن الآلتين M2,M1 تشتغلان 7 ساعات و 6ساعات على التوالي في اليوم .**
- **كلفة الساعة الواحدة للآلة M1 هو 100دج، و250دج للآلة M2.**
- **تريد المؤسسة تقليص التكاليف للآلتين لإنتاج المنتوج Y.**

المطلوب: أكتب الصياغة الرياضية من أجل تقليل التكاليف للألتين

الحــل:

إن الصياغة الرياضية لهذا المشكل تتعلق بالمراحل التالية على الترتيب:

- تعيين متغيرات القرار.
- تعيين الدالة الاقتصادية (الهدف).
- تعيين القيود.

أ- تعيين متغيرات القرار:

يمثل X_1 : عدد ساعات العمل للآلة **M1**.

و X_2 : عدد ساعات العمل للآلة **M2**.

ب-الدالة الاقتصادية:

إن دالة تكلفة ساعات العمل للآلتين **M2,M1** يمكن التعبير عنها كما يلي:

$$\textbf{Min } Z = 100x_1 + 250x_2$$

ج- جملة القيود فهي كالتالي:

$$\begin{cases} 9x_1 + 2x_2 \geq 18 \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ 6x_1 + 12x_2 \geq 36 \\ x_1 \leq 7 \\ x_2 \leq 6 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

الصياغة الرياضية (النموذج الرياضي):

$$MinZ = 100x_1 + 250x_2$$

تحت القيود:

$$\begin{cases} 9x_1 + 2x_2 \geq 18 \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ 6x_1 + 12x_2 \geq 36 \\ x_1 \leq 7 \\ x_2 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

التمرين السادس: طريقة Simplex

أوجد الحل الأمثل باستعمال خوارزمية Simplex للنموذج التالي:

$$MinZ = 3x_1 + 5x_2$$

تحت القيود:

$$\begin{cases} x_1 \leq 4 \\ 2x_2 \leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

إذن يمكن كتابة هذا البرنامج بطريقة مكافئة مع إدخال ثلاثة متغيرات تسمى متغيرات الانحرافات (x_3, x_4, x_5) المتعلقة بالقيود على التوالي، فنحصل على النموذج التالي:

$$MaxZ = 3x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

تحت القيود:

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 4; \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 = 12; \\ 3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + x_5 = 18; \\ x_1, x_2, x_3, x_4, et x_5 \geq 0. \end{cases}$$

أما الدالة الاقتصادية فيمكن كتابتها كما يلي:

$$Z - 3x_1 - 5x_2 - 0x_3 - 0x_4 - 0x_5 = 0$$

جداول السمبلكس هي عبارة عن مراحل متتالية للوصول إلى الحل الأمثل، تتعلق بمبادئ المصفوفات، حيث يتم التنقل من جدول إلى الجدول الموالي على أساس قيمة (Z) ، أي تبدأ بقيمة الصفر انطلاقا من الجدول الأول إلى أن تصل إلى القيمة العظمى للجدول الأخير. يمكن معرفة المرحلة النهائية عندما تأخذ كل المعاملات الحدية للجدول قيما موجبة إذا كان الأمر يتعلق بتعظيم الدالة، وقيما سالبة إذا كان الأمر يتعلق بتدنية الدالة.

يمكن تلخيص ما سبق في جداول **simplex** التالية:

الجدول 1– :

متغيرات الأساس	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	الطرف الأيمن	النسبة
X_3	1	0	1	0	0	4	$\frac{4}{0}=\infty$
X_4	0	2	0	1	0	12	$\frac{12}{2}=6\leftarrow$
X_5	3	2	0	0	1	18	$\frac{18}{2}=9$
Z	–3	-5	0	0	0	0	0

الجدول 2– :

متغيرات الأساس	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	الطرف الأيمن	النسبة
X_3	1	0	1	0	0	4	4
x_2	0	1	0	1/2	0	6	$\frac{6}{0}=\infty$
X_5	3	0	0	–1	1	6	$\frac{6}{3}=2\leftarrow$
Z	–3	0	0	5/2	0	30	

الجدول 3– :

متغيرات الأساس	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	الطرف الأيمن
X_3	0	0	1	1/3	–1/3	2
X_2	0	1	0	1/2	0	6

X_1	**1**	**0**	**0**	**−1/3**	**1/3**	**2**
Z	**0**	**0**	**0**	**3/2**	**1**	**36**

نلاحظ في الجدول 3: أن كل المعاملات الحدية المتعلقة بالسطر الأخير موجبة، ومنه نستنتج أننا وصلنا إلى الحل الأمثل:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 6 \\ Z = 36 \end{cases}$$

المراجع المستعملة:

1- د.عبد الحي مرعي، المعلومات المحاسبية وبحوث العمليات في اتخاذ القرارت، الدار الجامعية،1988.
2 – د.فريد عبد الفتاح، بحوث العمليات وتطبيقاتها في حل المشاكل واتخاذ القرارات ، جامعة الزقازيق، 1997.
3 - د.أحمد فهمي جلال، مقدمة في بحوث العمليات، دار الفكر العربي،1993.
4 - د.عبد الرحمن بن محمد أبو عمه، د.محمد أحمد العش، البرمجة الخطية، جامعة الملك سعود، المملكة العربية السعودية، 1990.
5 - د.محمد صالح الحناوي، د.محمد توفيق ماضي، بحوث العمليات في تخطيط ومراقبة الإنتاج، جامعة الأسكندرية، الدار الجامعية، 2000- 2001.
6 - د.عبد الحميد مصطفى أبو ناعم، إدارة المشروعات الصغيرة، كلية التجارة - جامعة القاهرة، 2002.
7 – د.محمد توفيق ماضي، إدارة الإنتاج والعمليات، مدخل اتخاذ القرارات، الدار الجامعية، مصر، 1996.
8 – د.موسى حسب الرسول، الأساليب الرياضية لنظرية إتخاذ القرارات، كلية الإقتصاد والإدارة، الإسكندرية، 2000.
9 – د.السيد عبد المقصود دبيان، د.كمال خليفة أبو زيد، بحوث العمليات في المحاسبة، كلية التجارة، جامعة الإسكندرية، 2001.
10- دحسين حريم ,مبادئ الإدارة الحديثة , دار حامد للنشر و التوزيع , الطبعة الأولى , 2006

11-- Boualem Benmazouz, .Recherche Opérationnelle de Gestion., Atlas Edition,Algerie, 1995.

12- Charnes A, Cooper WW, Ferguson R. Optimal estimation of executive compensation by linear programming. Management Science 1955; 1(2): 138-51.

13- Charnes A, Cooper WW. Management models and industrial applications of linear programming. New York: Xiley, 1961.

14- Charnes A, Cooper WW. Goal programming and multiple objective optimizations. European Journal of Operational Research 1977;1:39-54.