**Pré requis**

**L’étudiant doit connaitre le produit scalaire et le produit vectoriel ainsi que la dérivé totale et la dérivée partielle.**

**Objectif :**

Donner quelques définitions mathématiques nécessaires pour effectuer des calculs pour qu’on puisse entamer le programme de l’Electricité

**Sommaire :**

**Partie I : Les déplacements élémentaires dans les différents systèmes de coordonnées**

1. **Coordonnées cartésiennes : (x, y, z)**

$$\overrightarrow{dr} = \overrightarrow{dOM} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k} \tag{0.1}$$

2. **Coordonnées polaires : (r, Θ)**

$$\overrightarrow{dr} = dr\overrightarrow{u_r} + rd\theta\overrightarrow{u_\theta} \tag{0.2}$$

3. **Coordonnées cylindriques : (r, Θ, z)**

$$\overrightarrow{dr} = d\rho\overrightarrow{u_\rho} + \rho d\theta\overrightarrow{u_\theta} + dz\overrightarrow{u_z} \tag{0.3}$$

4. **Coordonnées sphériques :**

$$\overrightarrow{dr} = \overrightarrow{dOM} = dr\overrightarrow{U_r} + rsin\varphi d\theta\overrightarrow{U_\theta} + rd\varphi\overrightarrow{U_\varphi} \tag{0.4}$$

**Partie II : Les opérateurs différentiels**

**1. Notion du Champ**

Faynman a défini que le champ est toute grandeur physique qui prend une valeur différente en tout point de l'espace. Il dépend des coordonnées du point considéré. On distingue un champ scalaire et un champ vectoriel. La température est un champ scalaire noté T(x,y,z), elle pourrait aussi varier avec le temps. Un autre exemple est le champ des vitesses d'un liquide d'écoulement noté v(x,y,z) qui varier aussi avec le temps ; c'est un champ vectoriel.

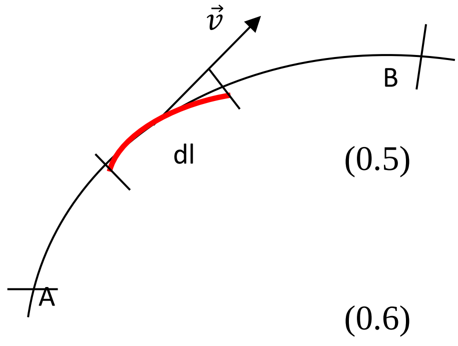
Un champ vectoriel $V(xyz)$ est la donnée de trois champs scalaire, et peut s'écrire dans les différentes bases à savoir cartésienne ($\vec{\imath}$ ,$\vec{\jmath}$ ,$\vec{k}$), polaire, ($\overrightarrow{Ur}$ ,$\overrightarrow{U\theta}$ ), cylindrique ($\overrightarrow{U\rho}$,$\overrightarrow{U\theta}$ ,$\vec{k}$), ou sphérique ($\overrightarrow{Ur}$,$\overrightarrow{U\theta}$,$\overrightarrow{U\varphi}$ ).

**2. Circulation d'un vecteur : جولان شعاع**

Soit un vecteur $\vec{v}$ et un parcoure AB donné par la figure suivante :

La circulation élémentaire du vecteur $\vec{v}$ le long

d'un élément de déplacement dl est donnée par la relation :

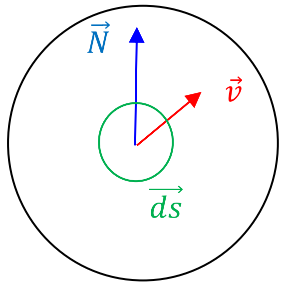



$$d\varsigma = \vec{v}.\overrightarrow{dl} \tag{0.5}$$

Donc la circulation du vecteur $\vec{v}$ le long du chemin AB est

$$\varsigma = \int_{AB} \vec{v}.\overrightarrow{dl} \tag{0.6}$$

### 3. Flux d'un champ de vecteur :تدفق حقل شعاعي




Soit un vecteur $\vec{v}$ et une surface (s) donné par la figure suivante :

Le flux élémentaire du vecteur $\vec{v}$ à travers la surface élémentaire ds est donnée par la relation : $d\phi = \vec{v}.\overrightarrow{ds}$ (0.7)

Le vecteur $\overrightarrow{ds}$ s'écrit : $\overrightarrow{ds} = ds.\vec{N}$ (0.8)

avec $\vec{N}$ est le vecteur normal à la surface (s) donc : $d\phi = \vec{v}.\vec{N}ds$

Donc le flux total du $\vec{v}$ à travers la surface (s) sera:

$$\phi = \iint_{(s)} \vec{v}.\overrightarrow{ds} = \iint_{(s)} \vec{v}.\vec{N}ds \qquad (0.9)$$

### 4. Opérateurs différentiels :

L'opérateur nabla défini en coordonnées cartésienne comme :

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \qquad (0.10)$$

Il a la double propriété de comportement, une fois comme un opérateur de dérivation et comme un vecteur dans des formules du calcul du produit vectoriel ou du produit mixte. Ceci permet d'exprimer directement de nombreuses relations concernant les gradients, divergences et rotationnels, sans avoir à passer par les composantes. Cet opérateur peut être exprimé aussi dans le système cylindrique et le système sphérique.

#### 4.1 Opérateur gradient (تدرج):

C'est un vecteur dont les composantes sont les dérivées partielles d'un champ scalaire f(x,y,z) par rapport aux coordonnées considérées, son symbole est :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \vec{\nabla}.f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \qquad (0.11)$$

**Remarques :**

- le gradient représente la variabilité de cette fonction au voisinage d'un point. Le gradient est le taux de croissance dans cette direction.

- Le gradient est un vecteur qui s'applique à un champ scalaire.
- le gradient d'une fonction f(x,y,z) est un vecteur.

Soit f(x,y,z) alors :

$$\overrightarrow{grad}\, f(x,y,z) = \vec{\nabla}\, f(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z)\,\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z)\,\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z)\,\vec{k} \quad (0.12)$$

Avec $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z)$ c'est la dérivée partielle de $f(x,y,z)$ par rapport à x en considérant y et z comme des constantes

$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z)$ c'est la dérivée partielle de $f(x,y,z)$ par rapport à y en considérant x et z comme des constantes

$\frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z)$ c'est la dérivée partielle de $f(x,y,z)$ par rapport à z en considérant x et y comme des constantes

**Exemple** :

$$U = x^2 + xy + xyz$$

$$\overrightarrow{grad}\, U = \vec{\nabla}\, U = \frac{\partial}{\partial x} U\,\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y} U\,\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z} U\,\vec{k} = (2x + y + yz)\,\vec{\imath} + (x + xz)\vec{\jmath} + xy\,\vec{k}$$

### 4.2 Opérateur divergence

La divergence d'un champ vectoriel est un scalaire défini par l'application de l'opérateur nabla à un champ vectoriel $\vec{v}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$, calculé à partir de l'expression suivante :

$$div\,\vec{v} = \vec{\nabla}.\vec{v} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)_{y,z=cst} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)_{x,z=cst} + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)_{x,y=cst} = \text{scalaire} \quad (0.13)$$

**Exemple** :

$$\vec{v} = 2x\,\vec{\imath} + xy^2\vec{\jmath} + z^2\,\vec{k}$$

Exp $\left(\frac{\partial(xy^2)}{\partial y}\right)_{x,z=cst} = x.2y$

$div\,\vec{v} = \vec{\nabla}.\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 2 + 2xy + 2z$

### 4.3 Operateur Rotationnel

C'est un **vecteur** qui s'applique à un vecteur (champ vectoriel) $\vec{v}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ ; calculé à partir de l'expression suivante :

$$\overrightarrow{Rot}\,\vec{v} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \vec{\imath}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_y & v_z \end{vmatrix} - \vec{\jmath}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_z \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \quad (0.14)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \vec{\imath}\left(\frac{\partial}{\partial y} v_z - \frac{\partial}{\partial z} v_y\right) - \vec{\jmath}\left(\frac{\partial}{\partial x} v_z - \frac{\partial}{\partial z} v_x\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial}{\partial x} v_y - \frac{\partial}{\partial y} v_x\right) \quad (0.15)$$

Remarque : si $\overrightarrow{Rot}\,\vec{v} = \vec{0}$ le champ est non tournant

si $\overrightarrow{Rot}\,\vec{v} \neq \vec{0}$ on a un champ tournant

### 4.4 Le Laplacien

Le laplacien est défini comme la divergence du gradient, noté $\Delta$. On distingue le laplacien scalaire s'il est utilisé pour un champ scalaire ; il donne un scalaire, et le laplacien vectoriel s'il est appliqué à un champ vectoriel ; il donne un vecteur.

$$\Delta = \vec{\nabla}.\vec{\nabla} = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (0.16)$$

En associant le Laplacien avec une fonction, on aura :

$$\Delta\emptyset = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = un\ scalaire \quad (0.17)$$

En associant le Laplacien avec un vecteur, on aura :

$$\Delta\emptyset = \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2} = un\ vecteur \quad (0.18)$$

Remarque : le Laplacien exprime la variation dynamique dans l'espace d'un champ ou d'une fonction.

### 5. Formule de Creen :

Dans une surface fermée, nous avons : $\iiint div\,\vec{v}dv = \oiint \vec{v}.\overrightarrow{ds}$ (0.19)

### 6. Formule de Stocks

La circulation d'un vecteur le long d'un contour fermé est égale au flux de son rotationnel à travers la surface qui s'appuie sur ce contour.

$$\int \vec{v}.\overrightarrow{dl} = \iint \overrightarrow{Rot}\,\vec{v}.\overrightarrow{ds} \quad (0.20)$$

**Application :**

Soit $\vec{A} = 2xyz\vec{\imath} + (2x^2 - y)\vec{\jmath} - yz^2\vec{k}$ et $\phi = x^2y + 2y^2z^3$

Donner au point (1,0,0): $\overrightarrow{grad}\,\phi$, $div\vec{A}$, $\overrightarrow{Rot}\vec{A}$ .

**Solution :**

- Le gradient :

$$\overrightarrow{grad}\,\phi(x,y,z) = \vec{\nabla}\,\phi(x,y,z)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y,z)\,\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\phi(x,y,z)\,\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\phi(x,y,z)\,\vec{k}$$

$$\phi = x^2y + 2y^2z^3$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y,z) = 2xy$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\phi(x,y,z) = x^2 + 4yz^3$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\phi(x,y,z) = 6y^2z^2$$

$$\overrightarrow{grad}\,\phi(x,y,z) = 2xy\,\vec{\imath} + (x^2 + 4yz^3)\,\vec{\jmath} + 6y^2z^2\,\vec{k}$$

au point (1,0,0): $\overrightarrow{grad}\,\phi(x,y,z) = \vec{\jmath}$

- $div\,\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

$$\vec{A} = 2xyz\vec{\imath} + (2x^2 - y)\vec{\jmath} - yz^2\vec{k}$$

$$A_x = 2xyz, \quad A_y = (2x^2 - y), \quad A_z = -yz^2$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} = 2yz, \quad \frac{\partial A_y}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial A_z}{\partial z} = -2yz$$

$$div\,\vec{A} = 2yz - 1 - 2yz = -1$$

- $\overrightarrow{Rot}\,\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xyz & (2x^2 - y) & -yz^2 \end{vmatrix}$

$$\vec{\imath}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (2x^2 - y) & -yz^2 \end{vmatrix} - \vec{\jmath}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xyz & -yz^2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 2xyz & (2x^2 - y) \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}(-yz^2) - \frac{\partial}{\partial z}(2x^2 - y)\right)\vec{\imath} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(-yz^2) - \frac{\partial}{\partial z}(2xyz)\right)\vec{\jmath}$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial x}(2x^2 - y) - \frac{\partial}{\partial y}(2xyz)\right)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{Rot}\,\vec{A} = (-z^2 - 0)\vec{\imath} - (0 - 2xy)\vec{\jmath} + (4x - 2xz)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{Rot}\,\vec{A} = (-z^2)\vec{\imath} - (2xy)\vec{\jmath} + (4x - 2xz)\vec{k}$$

au point (1,0,0): $\overrightarrow{Rot}\,\vec{A} = 4\,\vec{k}$