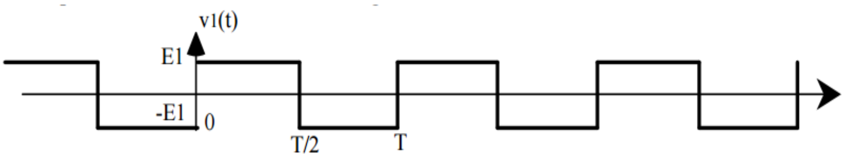
Travaux dirigés n°2 : Analyse de Fourier

1. Décomposition en série de Fourier

Exercice 1



1. Cocher une case parmi les 3

- Cette décomposition n’a pas d’harmoniques pairs
- Cette décomposition n’a pas d’harmoniques impairs

2. Montrer que la décomposition n’admet que des termes en sinus
3. Donner la DSF du signal $v_1(t)$
4. Calculez l’énergie totale du signal $v_1(t)$, commentez

Exercice 2

On considère que la fonction f est définie sur R tel que :

$$\begin{cases} f \text{ est périodique de période } \pi \\ f(t) = 1 - \sin|t| \text{ pour } 0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

1- Représenter graphiquement f sur l’intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$

2- Montrer que f est paire, représenter graphiquement f sur $[-2\pi, 2\pi]$

3- On admet que la fonction f est développable en série de Fourrier et on propose de calculer les coefficients a_0, a_n et b_n, justifier les résultats obtenus.

Exercice 3

Soit f la fonction 2π-périodique définie par $f(t) = t^2$ sur $[-\pi; \pi]$.

1) Tracer dans un repère orthogonal une ébauche du graphe de f sur l’intervalle $[-2\pi; 2\pi]$
2) Montrer que $a_0 = \frac{\pi 2}{3}$ et que pour tout $n \epsilon N^*$, on a : $a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}$
3) En déduire le développement en série de Fourier de la fonction f.
4) En déduire la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$
5) En utilisant la formule de Perceval, $\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t)dt = a_0^2 \quad + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2)$,

Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

2. Transformée de Fourier

Exercice 1

1- Calculer la transformée de Fourier des signaux suivants :

$S_1(t) = \delta(t), \quad S_2(t) = cos(\omega_0\, t) \qquad S_3(t) = sin(\omega_0\, t)$

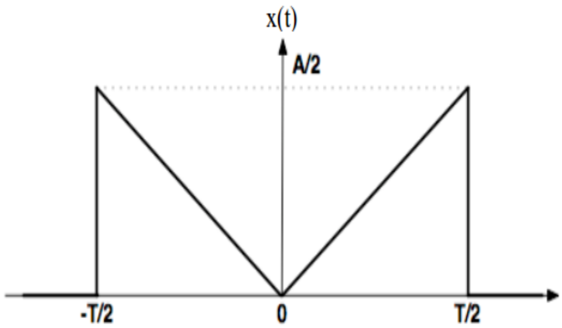
2- Calculer et tracer le spectre de f(x)

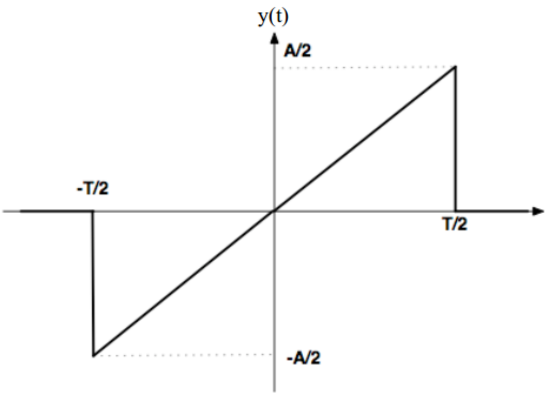
$f(t) = cos(2t) + sin(3t)$

Exercice 2

1- Ecrivez les signaux x(t) et y(t) en fonction du signal rampe unitaire r(t) sachant que A=T.

2- Déterminer la transformée de Fourier des signaux x(t) et y(t)





Exercice 3

Démontrer que la Transformée de Fourier d'un signal réel pair (respectivement impair) est une fonction réelle paire (respectivement imaginaire impaire)