

Travaux dirigés n°3 : Produit de convolution et transformée de Laplace

1. Produit de convolution

Exercice 1

Montrez qu'un produit simple dans l'espace des fréquences correspond à un produit de convolution dans l'espace-temps (Théorème de convolution Plancherel).

Exercice 2

Calculer $f * g$ et représentez le résultat :

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leq t < 3 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad \text{et} \quad g(t) = \begin{cases} \frac{t}{2} & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Exercice 3

1- Trouver la fonction $g(t)$ telle que :

$$g(t) = u(t) * v(t)$$

$$u(t) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad \text{et} \quad v(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

2- En déduire sa transformée de Fourier $G(f)$.

2. Transformée de Laplace

Exercice 1

Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - y(t) \\ y'(t) = x(t) + 2y(t) \end{cases}$$

Avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} x(0+) = 1 \\ y(0+) = 0 \end{cases}$$

Exercice 2

La transformée de Laplace du produit de convolution de deux fonctions causales est égal au produit des transformées de Laplace des deux fonctions.