Chapitre II :

Analyse de Fourrier

Introduction

❑ **Série ?**

En mathématiques, la série constitue une généralisation de la notion de somme, pour une succession infinie de termes.

Ex: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ série de terme général a_n

❑ **En quoi consiste l'étude des séries?**

Effectuer la somme d'un nombre fini n de termes successifs, puis à observer le comportement lorsque n devient indéfiniment grand, par un calcul de limite.

Introduction

Série trigonométrique?

Série dont le terme général est une fonction trigonométrique dont la fréquence varie selon l'indice n.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 \cos(\omega t) + a_2 \cos(2\omega t) + \cdots + a_i \cos(i\omega t) + \cdots$$

Pour suivre plus facilement l'évolution d'un signal plus ou moins complexe, il convient mieux de le décomposer un signal en une somme de signaux sinusoïdaux. Cette décomposition a éclipsé toutes les autres représentations et s'appel l'analyse de Fourrier.

Séries de Fourier

- **Jean Baptiste Joseph Fourier (1768, 1830)**

Un mathématicien et physicien français.

- Selon l'analyse de Fourier, un signal périodique s(t) peut être représenté par une série de Fourier qui est une somme infinie de signaux sinusoïdaux.

Séries de Fourier

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet

Théorème de Dirichlet

Théorème :
Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
Alors, la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ et a pour somme la régularisée $\tilde{f}$ de f.
Ainsi, sous ces hypothèses, pour tout t de $\mathbb{R}$:

$$\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}}$$

Séries de Fourier

Les conditions de Dirichlet (en résumé)

1. Le signal x(t) à un nombre fini de discontinuités dans n'importe quelle période.
2. Le signal x(t) contient un nombre fini de maxima et de minima durant une période.
3. Le signal x(t) est absolument intégrable dans n'importe quelle période c'est-à-dire $\int_T |x(t)|dt < \infty$

Séries de Fourier

$s(t)$: signal réel, périodique, de période $T = 1/f_0$ (vérifiant les conditions de Dirichlet)

$$S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(\underbrace{2\pi f_0}_{\omega} nt) + b_n \sin(\underbrace{\omega}_{2\pi f_0 = 2\pi/T} nt)]$$

Avec:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t).\cos(2\pi n f_0 t)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t).\sin(2\pi n f_0 t)dt$$

Séries de Fourier

$[a_n \cos(2\pi f_0 nt) + b_n \sin(2\pi f_0 nt)]$ est l'harmonique d'ordre n du signal $s(t)$.

L'harmonique d'ordre 1 correspond au fondamental et l'harmonique d'ordre 0.

a_0 est la composante continue qui correspond à la valeur moyenne du signal $s(t)$.

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)dt$$

Séries de Fourier

- Série de fourier en complexe

Si on utilise les formules trigonométriques, on peut facilement démontrer que qu'un signal périodique $s(t)$ peut s'écrire sous la forme complexe suivante:

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \, e^{j2\pi f_0 nt}$$

où les c_n sont les coefficients complexes de la série.

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\, e^{-i2\pi f_0 nt}\, dt$$

Séries de Fourier

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \, e^{j2\pi f_0 nt}$$

La représentation complexe signifie tout simplement que chaque composante spectrale est une sinusoïde ayant une amplitude (module de c_n) et une phase (argument de c_n).

Séries de Fourier

❑ Série de fourier en cosinus

Partant la relation trigonométrique :

$$A \cdot \cos(x) + B \cdot \sin(x) = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \cos\left(x + \arctan\left(\frac{-B}{A}\right)\right)$$

Et le DSF vu auparavant:

$$S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(\omega n t) + b_n \sin(\omega n t)]$$

Le résultat est:

$$\boxed{s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_0 \cdot t + \alpha_n)}$$

Séries de Fourier

❑ Série de fourier en cosinus

$$\boxed{s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot f_0 \cdot t + \alpha_n)}$$

Où :

$$A_0 = \frac{a_0}{2} \qquad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \qquad \alpha_n = \arctan\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$$

Séries de Fourier

- Cas particuliers:

f: $[-T/2,\ T/2] \rightarrow R$ une fonction intégrable sur $[-T/2,\ T/2]$.

Si f est paire alors: $\int_{-k}^{k} f(x)dx \ = 2\int_{0}^{k} f(x)dx$

Si f est impaire alors: $\int_{-k}^{k} f(x)dx \ = 0$

Si f est développable en série de Fourrier alors:

Séries de Fourier

- Cas particuliers:

a) Si f est paire alors:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt = \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)\,dt = 0$$

b) Si f est impaire alors:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)\,dt = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)\,dt$$

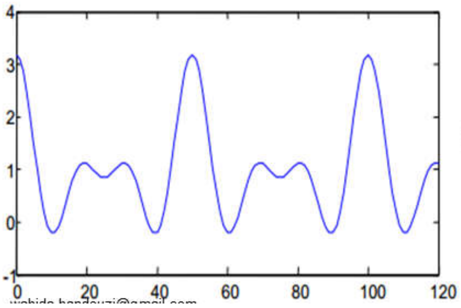
Séries de Fourier

➢ **Exemples**

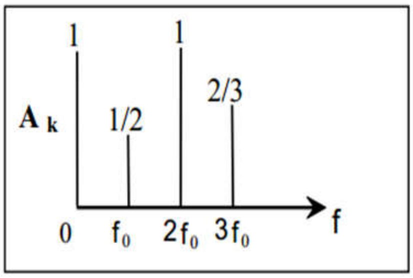
S(t) est un signal périodique de période $T_0 = \frac{1}{f_0}$, et paire.

ses coeficients de Fourrier $sont$:

$a_0 = 1, a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = 1$, $a_3 = \frac{2}{3}$, et $a_k = 0 \; pour \; k > 3$



=



wahida.handouzi@gmail.com

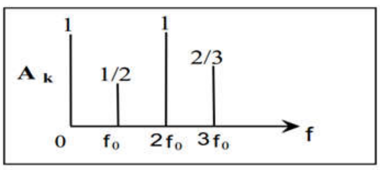
Séries de Fourier

1

$+\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 t)$

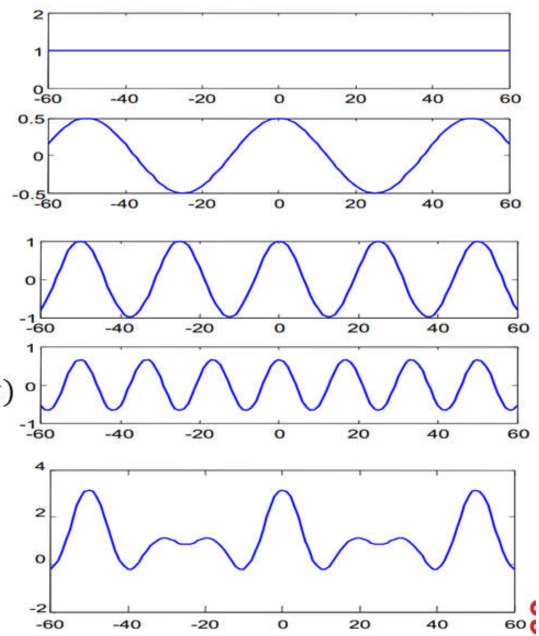
$+\cos(4\pi f_0 t)$

$+\frac{3}{2}\cos(6\pi f_0 t)$



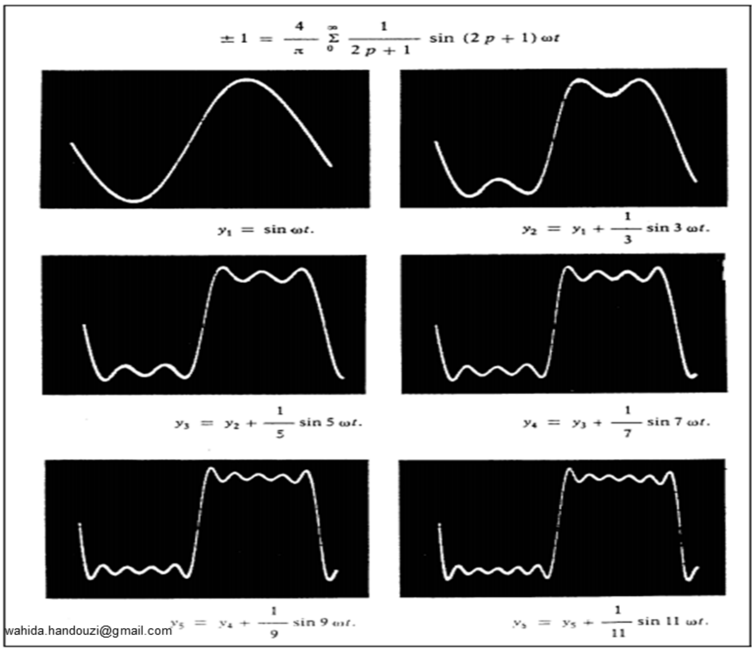
=

S(t)



wahida.handouzi@gmail.com

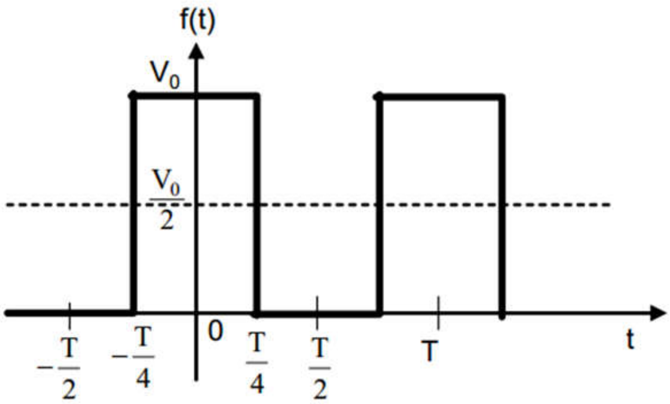
Séries de Fourier



Séries de Fourier

Exemple

Soit la fonction créneau f(t) présentée sur la figure suivante.



Séries de Fourier

Calcul de a_0 : $a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt = \frac{1}{T}\int_{-T/4}^{T/4} V_0 dt = \frac{V_0}{T}[t]_{-T/4}^{T/4} = \frac{V_0}{T}\frac{2T}{4} = \frac{V_0}{2} \rightarrow \boxed{a_0 = \frac{V_0}{2}}$

Calcul de a_n : $a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)dt$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/4}^{T/4} V_0 \cos(n\omega t)dt$$

$$a_n = \frac{2V_0}{T}\left[\frac{\sin(n\omega t)}{n\omega}\right]_{-T/4}^{T/4}$$

$$= \frac{2V_0}{T}\left[\frac{\sin\left(\frac{n\omega T}{4}\right)}{n\omega} - \frac{\sin\left(-\frac{n\omega T}{4}\right)}{n\omega}\right]$$

Séries de Fourier

$$a_n = \frac{4V_0}{n\omega T}\sin\left(\frac{n\omega T}{4}\right)$$
$$= \frac{2V_0}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Si n est un nombre pair, n = 2p : $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \sin(p\pi) = 0$

Si n est un nombre impair, n = 2p + 1 : $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \sin\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^p$

$$\boxed{a_n = \begin{cases} a_{2p} = 0 \\ a_{2p+1} = \frac{2V_0}{(2p+1)\pi}(-1)^p \end{cases}}$$

Séries de Fourier

Calcul de b_n : $b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)dt$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/4}^{T/4} V_0 \sin(n\omega t)dt$$

$$= \frac{2V_0}{T}\left[-\frac{\cos(n\omega t)}{n\omega}\right]_{-T/4}^{T/4}$$

$$= \frac{2V_0}{T}\left[-\frac{\cos\left(\frac{n\omega T}{4}\right)}{n\omega} + \frac{\cos\left(-\frac{n\omega T}{4}\right)}{n\omega}\right]$$

$$= 0$$

Finalement la décomposition en série de Fourier du créneau s'écrit sous forme algébrique comme suit :

$$\boxed{f(t) = \frac{V_0}{2} + \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p \frac{2V_0}{(2p+1)\pi}\cos((2p+1)\omega t)}$$

wahida.handouzi@gmail.com

Séries de Fourier

Pour la forme complexe cela donne:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega t}dt = \frac{1}{T}\int_{-T/4}^{T/4} V_0 e^{-jn\omega t}dt$$

$$c_n = \frac{-V_0}{jn\omega T}\left[e^{-jn\omega t}\right]_{-T/4}^{T/4} = \frac{-V_0}{jn\omega T}\left[e^{-\frac{jn\omega T}{4}} - e^{\frac{jn\omega T}{4}}\right]$$

$$c_n = -\frac{V_0}{n\pi}\cdot\frac{e^{-\frac{jn\pi}{2}} - e^{\frac{jn\pi}{2}}}{2j} = \frac{V_0}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Séries de Fourier

$$\begin{cases} n = 2p & \rightarrow \quad c_{2p} = 0 \\ n = 2p+1 & \rightarrow \quad c_{2p+1} = (-1)^p \dfrac{V_0}{(2p+1)\pi} = \dfrac{a_{2p+1}}{2} \\ n = 0 & \rightarrow \quad c_0 = \dfrac{V_0}{2} = a_0 \end{cases}$$

Le dernier résultat peut aussi s'obtenir par le calcul direct:

$$c_0 = a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/4}^{T/4} V_0 dt = \frac{V_0}{2}$$

On obtient alors le résultat suivant :

$$\boxed{f(t) = \frac{V_0}{2} + \sum_{p=-\infty}^{\infty} (-1)^p \frac{V_0}{(2p+1)\pi} e^{j(2p+1)\omega t}}$$

wahida.handouzi@gmail.com

Séries de Fourier

- Relation entre la forme trigonométrique et la forme complexe de la DSF: $\exp(-j\theta)=\cos(\theta)-j\sin(\theta)$, $\exp(j\theta)=\cos(\theta)+j\sin(\theta)$ ➡ $\cos(\theta)=\dfrac{\exp(j\theta)+\exp(-j\theta)}{2}$, $\sin(\theta)=j\dfrac{\exp(-j\theta)-\exp(j\theta)}{2}$
- Application de ces formules dans la forme trigonométrique on a:

$$x(t)=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)+b_n\sin\left(n\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$x(t)=a_0+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n-jb_n)\exp\left(jn\frac{2\pi}{T}t\right)+(a_n+jb_n)\exp\left(-jn\frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$c_n=\frac{a_n-jb_n}{2} \quad si\ n>0 \qquad \blacksquare\ c_0=a_0$$

$$c_n=\frac{a_n+jb_n}{2} \quad si\ n<0$$

alors $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \exp\left(jn\frac{2\pi}{T}t\right)$

Où $c_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\exp\left(-jn\frac{2\pi}{T}t\right)dt$

Les "c_n" sont appelés les coefficients de Fourier de $x(t)$. Ils forment la représentation fréquentielle de $x(t)$.

Notation $x(t) \rightarrow \{c_n\}_{n\in Z}$

86

Séries de Fourier

- **Remarques**

Posons $F=\frac{1}{T}$. Les deux formes de la DSF s'écrivent alors

$x(t)=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(2\pi nFt)+b_n\sin(2\pi nFt)$ ▪ $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\exp(j2\pi nFt)$

F est la fréquence fondamentale ▪ $f=nF$ sont les harmoniques

Les coefficients c_n sont complexes en général $c_n=|c_n|\exp(j\arg(c_n))$

Dans la forme complexe de la DSF, interviennent des fréquences négatives et positives qui sont introduites par commodité de représentation

- **Quelques propriétés**

Si le signal $x(t)$ est réel, $c_{-n}=c_n^*$: les coefficients sont nécessairement complexes conjugués pour restituer x réel car $\exp(j2\pi nFt)$ est complexe

Si le signal $x(t)$ est réel et pair, $c_{-n}=c_n \Rightarrow b_n=0$

Si le signal $x(t)$ est réel et impair, $c_{-n}=-c_n \Rightarrow a_n=0$

87

Théorème de Perceval ou de la puissance

- **Marc-Antoine Parseval des Chênes**

Un mathématicien français.

Théorème (*Égalité de Parseval-Bessel*)

Si $f\in C^0M_{2\pi}$ (i.e. f est continue par morceaux et 2π-périodique), alors les séries numériques

$$\sum_n |c_n|^2 \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 1}\left(|a_n|^2+|b_n|^2\right)$$

convergent, et on a

$$\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,dt}_{=\|f\|_2^2 \text{ si } f \text{ est réelle}}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n(f)|^2=|a_0|^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(|a_n|^2+|b_n|^2\right).$$

Théorème de Perceval ou de la puissance

Le théorème de Parseval établit une relation entre la valeur moyenne du carré du module d'une fonction périodique et les coefficients de la série de Fourier décrivant la fonction.

En physique, il exprime donc la façon dont l'énergie du phénomène périodique se répartit selon les différentes harmoniques de la fonction.

A retenir: L'énergie du signal est égale à la somme des énergie de ses composantes.

Comment faire pour les signaux non périodiques ?

- Considérons que la période T est infinie (donc F tend vers 0)
- Et comme les harmoniques sont des multiples de F …
- l'écart entre les raies du spectre va donc devenir infiniment petit
- On tend alors vers une représentation fréquentielle continue

C'est la Transformée de Fourier, qui peut être vue comme une généralisation des séries de Fourier aux signaux non périodiques

Transformée de Fourier

Définitions:

- Soit x une fonction continue de la variable t alors la transformée de Fourier de x est définie par :

$$TF[x(t)] = X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).e^{-i2\pi ft}\,dt$$

TF désigne la Transformée de Fourier directe.

- Soit f(t) une fonction admettant pour transformée de Fourier alors f(t) peut s'écrire :

$$x(t) = TF^{-1}[X(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f).e^{i2\pi ft}\,df$$

TF^{-1} la Transformée de Fourier inverse.

Transformée de Fourier

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt \qquad x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df$$

Transformée de Fourier — Transformée de Fourier inverse

→ **Représentation fréquentielle d'un signal x(t) par X(f), ou « <u>spectre</u> » du signal**

- **Notations – conventions**

$x(t) \xleftrightarrow{TF} X(f)$ X(f) = TF[x(t)] et x(t) = TF^{-1}[X(f)]

- **Conditions de convergence = Conditions de Dirichlet:**

1. x(t) est absolument intégrable $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|dt < \infty$
2. x(t) a un nombre fini de maxima et de minima dans tout intervalle fini
3. x(t) a un nombre fini de discontinuités dans tout intervalle fini. De plus, chacune de ces discontinuités doit être finie.

Transformée de Fourier

fréquences négatives ⚠ **Attention**

Dans la transformée de Fourier ou dans la série de Fourier on voit apparaitre des fréquences négatives. Physiquement ces fréquences négatives n'ont pas de sens, mais mathématiquement elles sont indispensables pour calculer la transformée de Fourier inverse (ou retrouver fonction à partir de la série de Fourier).

En effet la définition de la transformée de Fourier est :

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i2\pi\nu t}dt = TF(f)$$

et

la transformée de Fourier inverse est

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu)e^{i2\pi\nu t}d\nu = TF^{-1}(F)$$

Si on oublie les fréquences négatives alors on a une expression du type !

$$f_1(t) = \int_{0}^{+\infty} F(\nu)e^{i2\pi\nu t}d\nu = TF^{-1}(F)$$

La fonction f1(t) est alors différente de f(t) et f1(t) est une fonction complexe.

En résumé il faut faire avec les fréquences négatives!

Transformée de Fourier

- **Linéarité**

Si $x(t) \xleftrightarrow{TF} X(f)$ et $y(t) \xleftrightarrow{TF} Y(f)$ on a : $ax(t)+by(t) \xleftrightarrow{TF} aX(f)+bY(f)$

- **Symétries :**
  - Si x(t) est un signal réel, on a X(-f) = X*(f), d'où les propriété suivantes

$$\begin{cases} Re[X(-f)] = Re[X(f)] \rightarrow \text{Paire} \\ Im[X(-f)] = -Im[X(f)] \rightarrow \text{Impaire} \end{cases} \qquad \begin{cases} \|X(-f)\| = \|X(f)\| \rightarrow \text{Paire} \\ \Theta[X(-f)] = -\Theta[X(f)] \rightarrow \text{Impaire} \end{cases}$$

Exemple: $e^{-at}\,u(t)$

  - Si de plus x(t) est un signal pair, alors X(f) est purement réelle

Exemple: $e^{-a|t|}$

- **Décalage temporel :**

$$x(t-t_0) \xleftrightarrow{TF} X(f)\,e^{-j2\pi f t_0}$$

Exemples: $\delta(t)$ et $\delta(t-t_0)$

→ Conséquence : un décalage temporel n'affecte pas le module de la T.F.

- **Changement d'échelle :** $x(at) \xleftrightarrow{TF} \frac{1}{|a|}X\left(\frac{f}{a}\right)$

wahida.handouzi@gmail.com

Transformée de Fourier

- **Dualité :**

  Si x(t) $\xleftrightarrow{TF}$ X(f) alors X(t) $\xleftrightarrow{TF}$ x(-f)

- **Dérivation :** $\dfrac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{TF} j2\pi f X(f)$

- **Intégration :** $\displaystyle\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \xleftrightarrow{TF} \frac{1}{j2\pi f}X(f) + \frac{1}{2}X(0)\delta(f)$

- **Conservation de l'énergie (signaux à énergie finie) : Égalité de Parseval**

$$E[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = E[X(f))] = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

Transformée de Fourier

PRINCIPALES TRANSFORMÉES DE FOURIER

Dirac	$\delta(t)$	1
Constante	1	$\delta(f)$
Echelon unité	$u(t)$	$\frac{1}{j2\pi f}+\frac{1}{2}\delta(f)$
Exponentielle	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{a+j2\pi f}$
Exponentielle	$e^{-a\|t\|}$	$\frac{2a}{a^2+(2\pi f)^2}$
Gaussienne	e^{-t^2/σ^2}	$\sigma e^{-\pi\sigma^2 f^2}$
Exponentielle complexe	$e^{j2\pi f_0 t}$	$\delta(f-f_0)$
Cosinus	$\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)]$
Sinus	$\sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2j}[\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)]$

Transformée de Fourier

Rectangle	$\mathrm{Rect}(t/T)=\begin{cases}1 & \lvert t\rvert<T/2\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$	$T\mathrm{sinc}(Tf)$ (Sinus cardinal)
Sinus cardinal	$\mathrm{sinc}(t/T)$	$T\mathrm{Rect}(fT)$
Triangle	$\mathrm{Tri}(t/T)=\begin{cases}1-\lvert t\rvert & \lvert t\rvert<T\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$	$T\mathrm{sinc}^2(Tf)$
Peigne de Dirac	$\delta_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$	$\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-\frac{n}{T})=\frac{1}{T}\delta_{1/T}(f)$

Transformée de Fourier

Théorème de Perceval

Soit deux signaux x(t) et y(t) admettant une transformée de Fourier X(f) et Y(f) respectivement.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y^*(f)df,$$

Et dans les cas particuliers on a:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df.$$

Ce théorème indique que l’énergie est conservée dans les représentations en temps et en fréquence.

Transformée de Fourier

Exemple:

On considère la fonction $x(t) = \mathrm{rect}(t/T)$.

Calcul de la transformée de Fourier

Calculons sa transformée de Fourier :

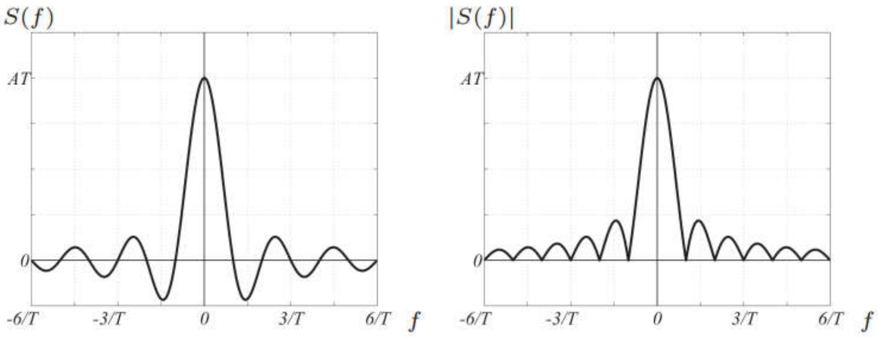
$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\exp(-j2\pi ft)dt \\ &= \int_{-T/2}^{+T/2} \exp(-j2\pi ft)dt \\ &= -\frac{1}{j2\pi f}\Big[\exp(-j2\pi ft)\Big]_{-T/2}^{+T/2} \\ &= \frac{\exp(j\pi fT)-\exp(-j\pi fT)}{j2\pi f} \\ &= \frac{\sin(\pi fT)}{\pi f} \\ &= T\mathrm{sinc}(fT). \end{aligned}$$

Transformée de Fourier

Représentation graphique du module et de la phase de $X(f)$

La TF $X(f)$ étant réelle, le module n'est autre que la valeur absolue :

$$|X(f)| = T|\mathrm{sinc}(fT)|.$$



spectre réel
$S(f) = AT\,\mathrm{sinc}\,(Tf)$.

spectre d'amplitude
$|S(f)| = |AT\,\mathrm{sinc}\,(Tf)|$.

Mini Test 2

1. Pourquoi utilise t-on la DSF?
2. Sur quels signaux utilise t-on la DSF?
3. Que représente les valeurs des an et bn?
4. Que représente la valeur a0?