Chapitre III :

Système linéaire invariant dans le temps (SLIT)

I. NOTIONS DE SYSTÈME

II. PRODUIT DE CONVOLUTION

III. TRANSFORMÉE DE LAPLACE

Notions de système

Définition :

Un système est un modèle mathématique d'un processus physique qui relie un signal d'entrée à un signal de sortie.

- Un système est un dispositif de traitement du signal
- En entrée : e(t) signal d'entrée
- En sortie : s(t) signal de sortie

Exemples :

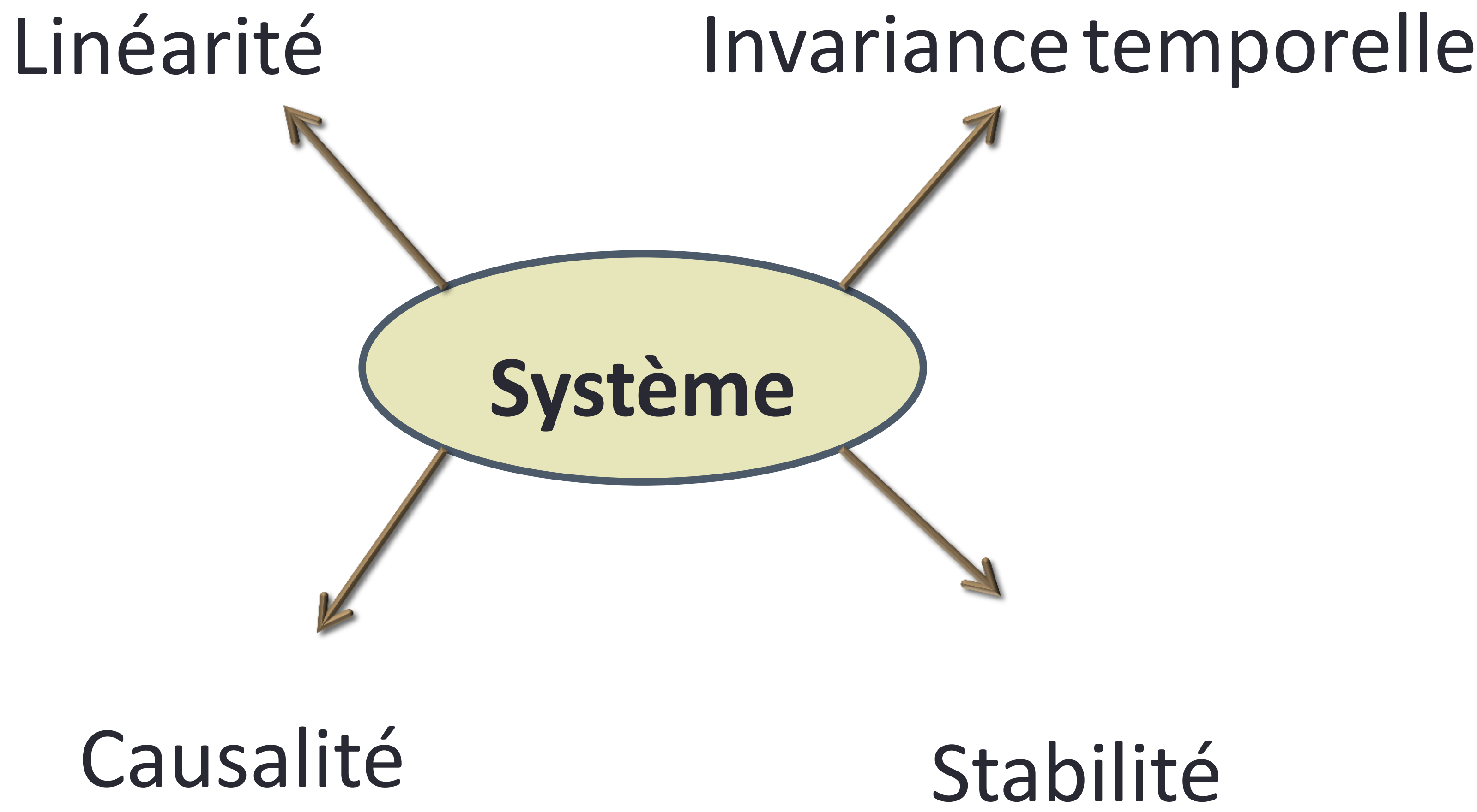
- Amplificateur, système audio, téléphone, système vidéo
- Un système complexe peut être vu comme l'interconnexion de plusieurs systèmes dont les fonctions sont plus simples.

Systèmes linéaire et invariants

Questions

- Quelles sont les propriétés intéressantes des systèmes SLIT?
- Comment représenter un système ?
- Comment modéliser la relation entre entrée et sortie ?

PROPRIÉTÉS DES SYSTÈMES



PROPRIÉTÉS DES SYSTÈMES

Linéarité

Un système, caractérisé par la transformation F, est *linéaire* si et seulement si :

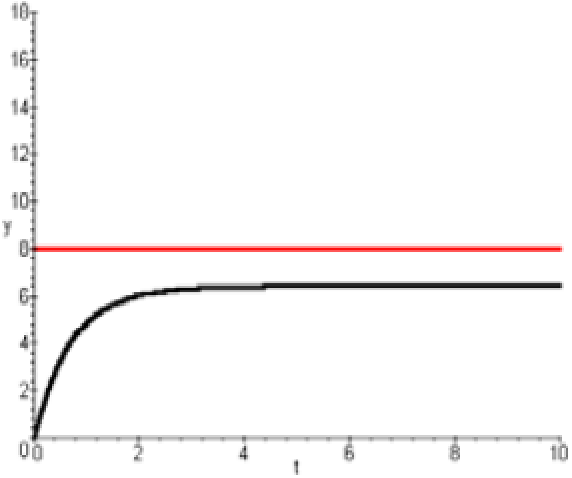
$$\forall(e_1, e_2) \text{ et } \forall(\lambda_1, \lambda_2) \quad F[\lambda_1 e_1(t) + \lambda_2 e_2(t)] = \lambda_1 F[e_1(t)] + \lambda_2 F[e_2(t)]$$

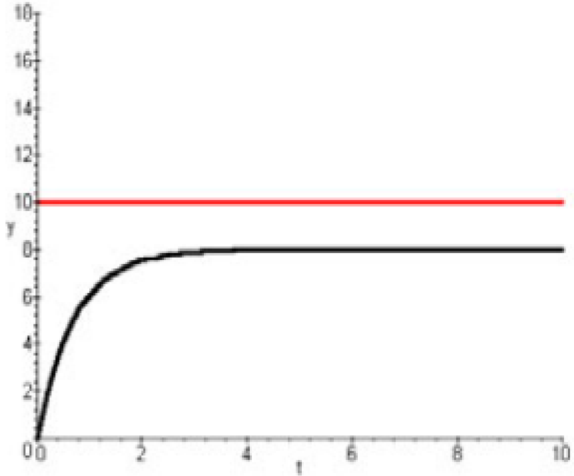
Exemple: (*Principe d'additivité ou de superposition)*

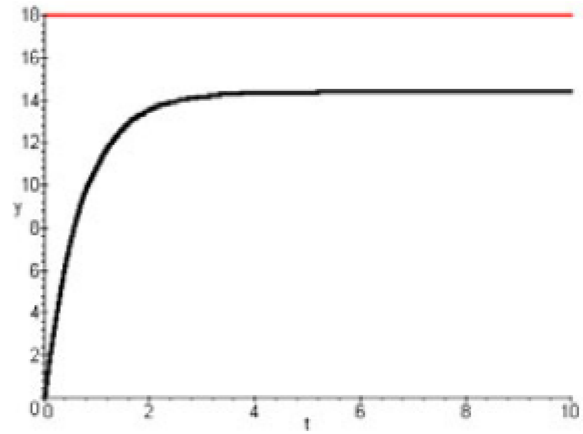
Si y1 est la réponse à l'entrée x1

Si y2 est la réponse à l'entrée x2

Alors la réponse a x1+x2 est y= y1+y2



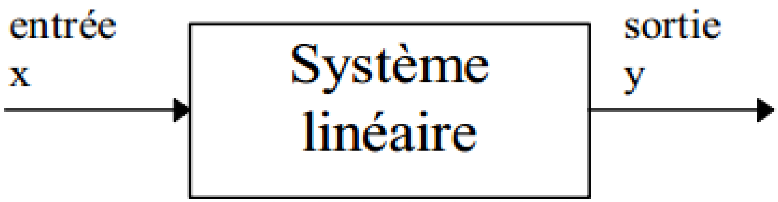


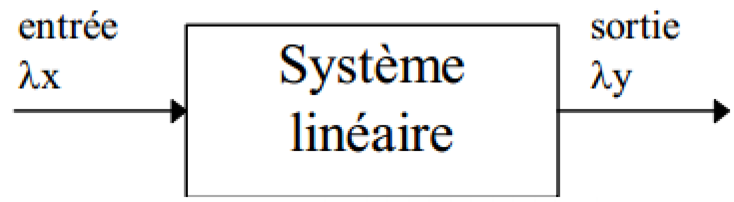


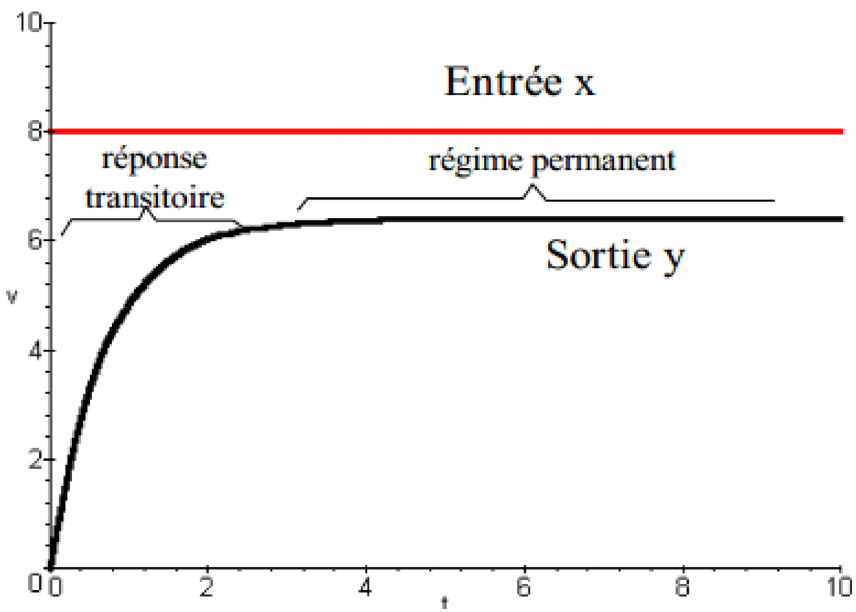
PROPRIÉTÉS DES SYSTÈMES

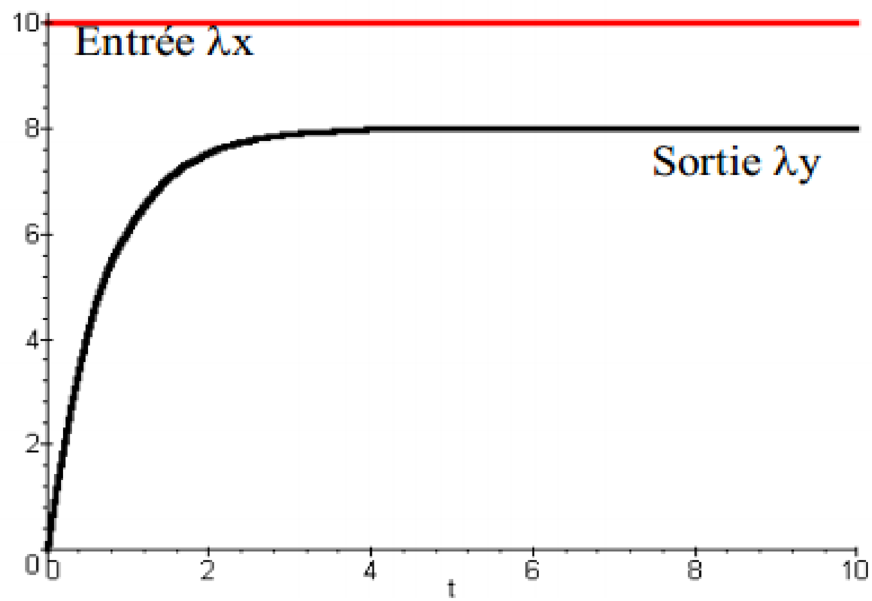
Exemple: (*Principe de proportionnalité)*

Si y est la réponse à l'entrée x.









PROPRIÉTÉS DES SYSTÈMES

Invariance temporelle

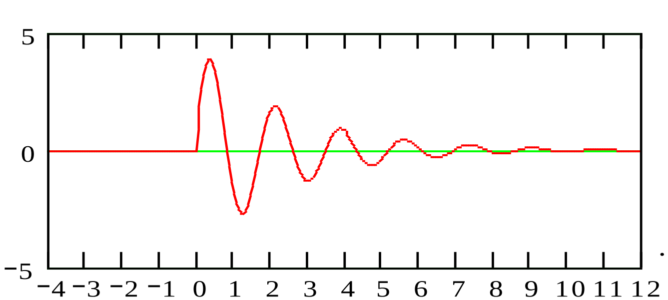
Un système, caractérisé par la transformation F, est *invariant*, ou *stationnaire*, si et seulement si une translation temporelle sur l'entrée entraîne la même translation sur la sortie :

$$\forall e \text{ et } \forall \tau \quad s(t-\tau) = F[e(t-\tau)]$$

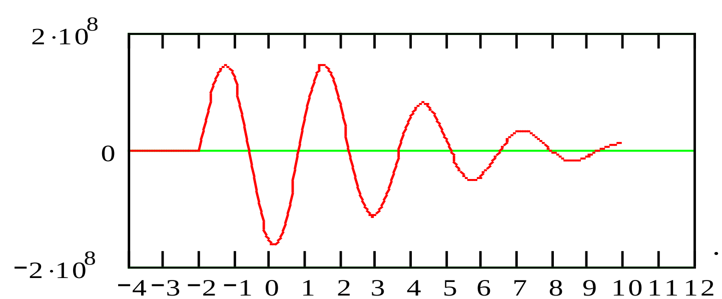
Causalité

En physique un effet ne peut précéder sa cause. Un système est dit *causal* s'il respecte cette propriété. C'est-à-dire que si le signal d'entrée e(t) est nul pour $t < t_0$, il en est de même pour le signal de sortie s(t) :

$$e(t) = 0 \ \forall t \leq t_0 \quad \Rightarrow \quad s(t) = 0 \ \forall t \leq t_0$$



causal



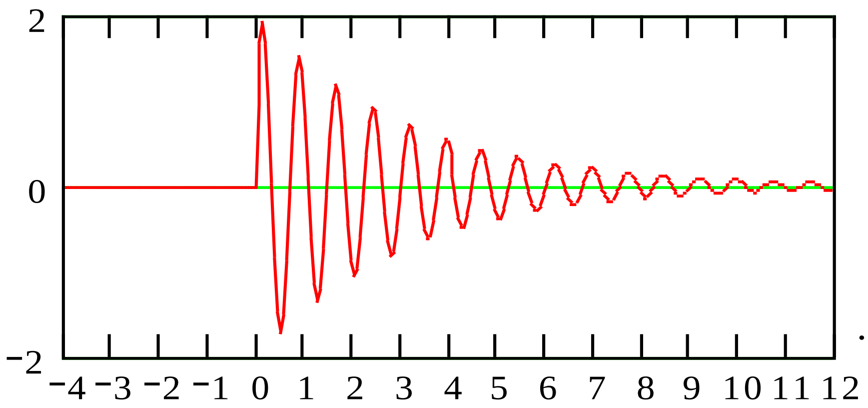
non causal

PROPRIÉTÉS DES SYSTÈMES

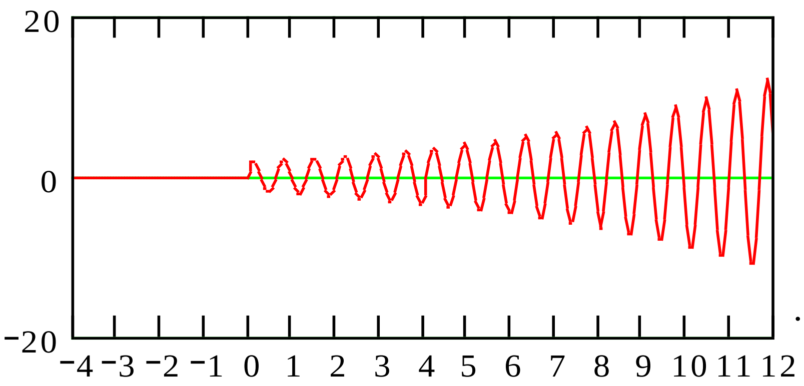
Stabilité

Un système est *stable* si à tout signal d'entrée e(t) borné correspond une réponse s(t) bornée.

Un signal f(t) est borné si $\exists$ A $\geq$ 0 tel que $\forall$ t |f(t)| $\leq$ A.

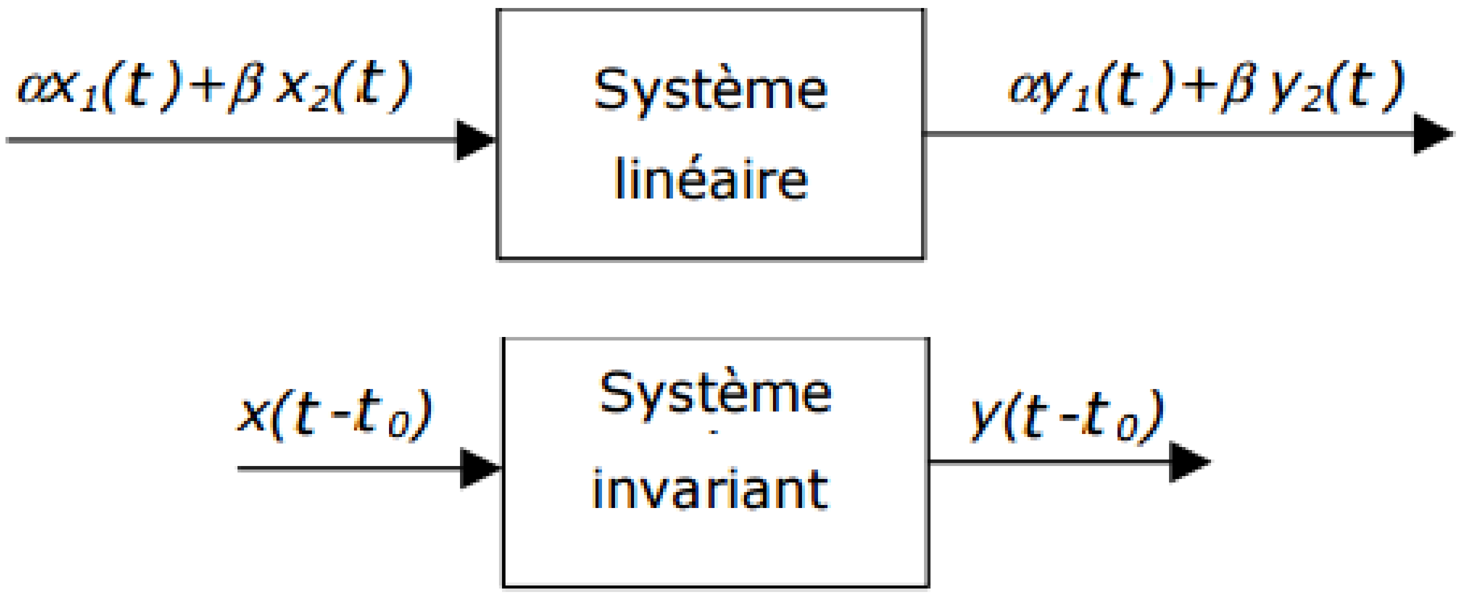


Stable (convergence vers 0)



Instable (souvent divergence)

PROPRIÉTÉS DES SYSTÈMES

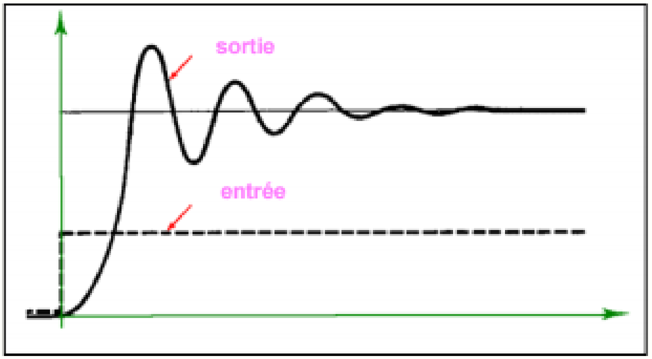


REPRÉSENTATION DES SYSTÈMES

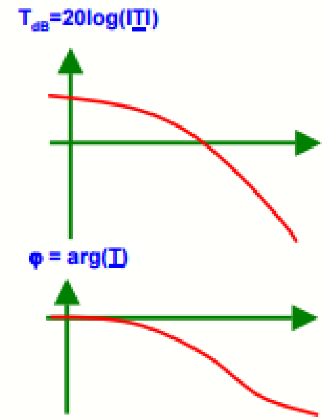
- Par sa **réponse à un signal de forme simple** (impulsion, échelon, …)
- Par son **diagramme de Bode** qui donne le module et l'argument.
- Par **l'équation différentielle linéaire** reliant e(t) et s(t) qui permet de trouver la réponse s(t) pour une entrée e(t) quelconque.
- Par son **diagramme de Nyquist**.
- Par sa **transformée de Laplace** qui lie les transformées de Laplace de l'entrée E(p) et de la sortie S(p)
- Par des **schémas blocs.**

REPRÉSENTATIONS DES SYSTÈMES

- par sa réponse à un signal de forme simple (impulsion, échelon, rampe …)



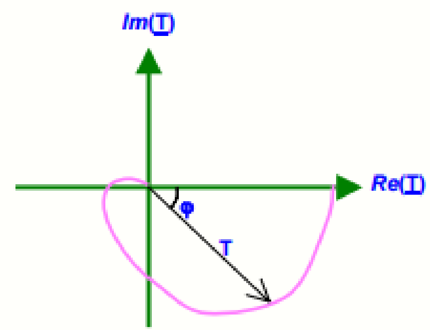
- par son diagramme de Bode qui donne le module et l'argument



- par l'équation différentielle linéaire reliant e(t) et s(t) qui permet de trouver la réponse s(t) pour une entrée e(t) quelconque

$$\boxed{s(t) = 2.e(t) + 10e'(t) + 3s'(t) + 12s''(t)}$$

- par son diagramme de Nyquist qui décrit la transmittance complexe



- par sa transmittance complexe $\underline{T}(j\omega)$ qui relie l'entrée et la sortie en régime sinusoïdal

$$\boxed{\underline{T}(j\omega)=\frac{2+10j\omega}{1-3j\omega+12\omega^2}}$$

- par sa transmittance de Laplace T(p) qui lie les transformées de Laplace de l'entrée E(p) et de la sortie S(p)

$$\boxed{T(p)=\frac{2+10p}{1-3p-12p^2}}$$

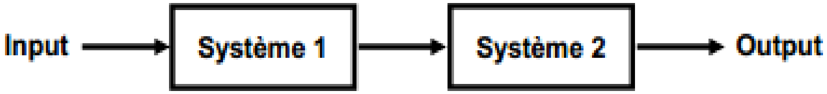
REPRÉSENTATIONS DES SYSTÈMES

- **Représentation sous forme de schéma bloc**

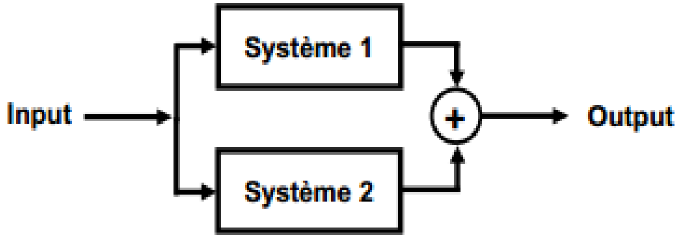
$$s(t) = S\{e(t)\}$$

$$s[n] = S\{e[n]\}$$

- **Interconnections des systèmes**
  - Série / Cascade

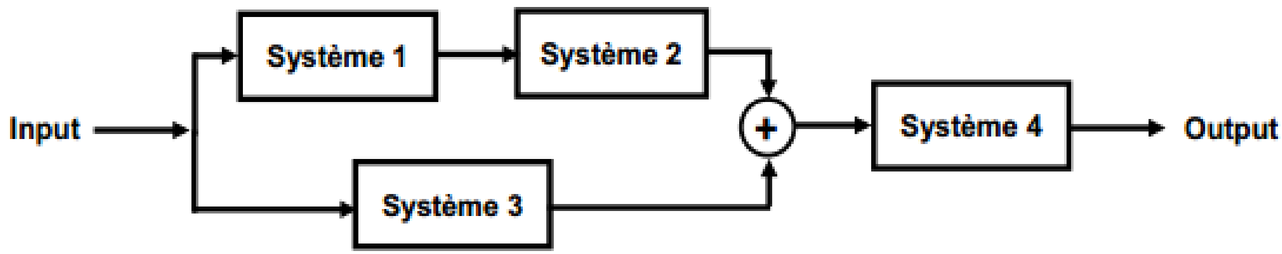


  - Parallèle



REPRÉSENTATIONS DE SYSTÈME

- Série / Parallèle

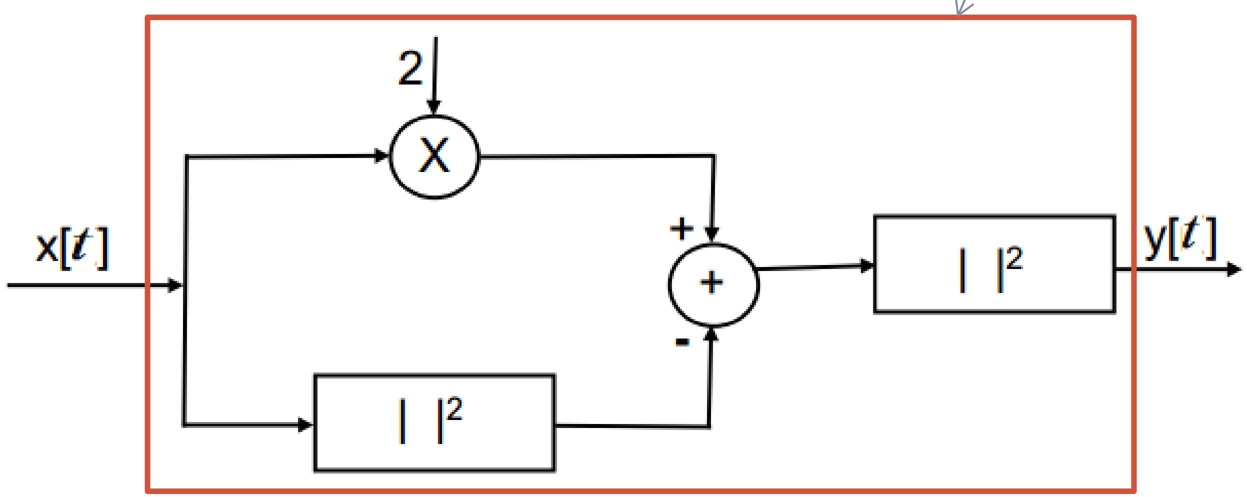


- Feed-back

Exemple

$$Y[t] = (2x[t] - x[t]^2)^2$$

Système complexe



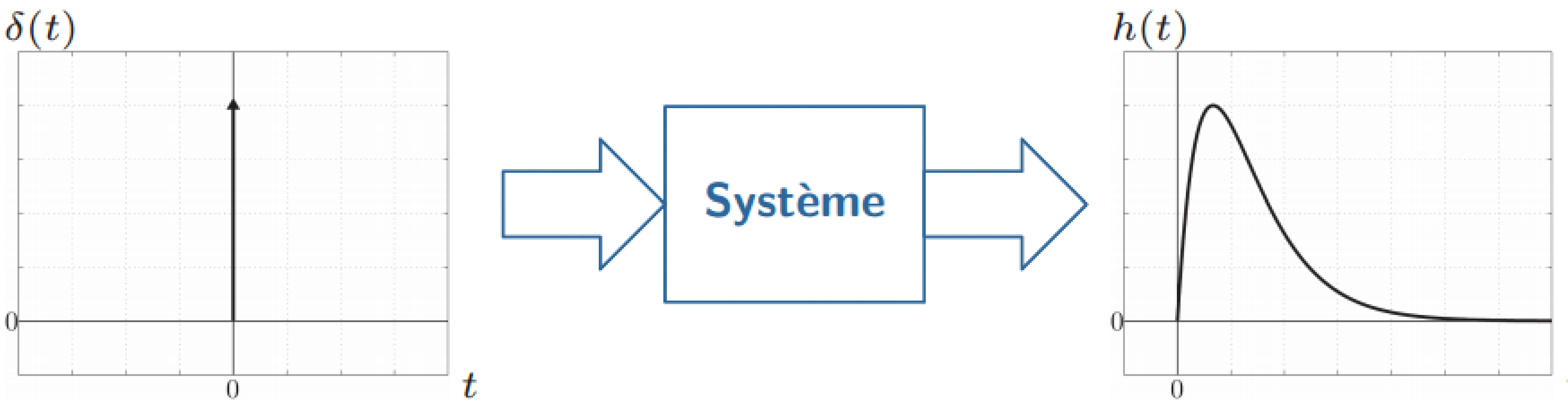
RÉPONSE IMPULSIONNELLE

Une brève impulsion, injectée à l'entrée d'un système causal, linéaire, continu et invariant donne en sortie un signal de durée finie appelée réponse impulsionnelle.

La réponse impulsionnelle, notée h (t) est donc la réponse d'un système à une impulsion de Dirac.

RÉPONSE IMPULSIONNELLE

La réponse impulsionnelle caractérise ainsi le comportement temporel du système (sa fonction de transfert).



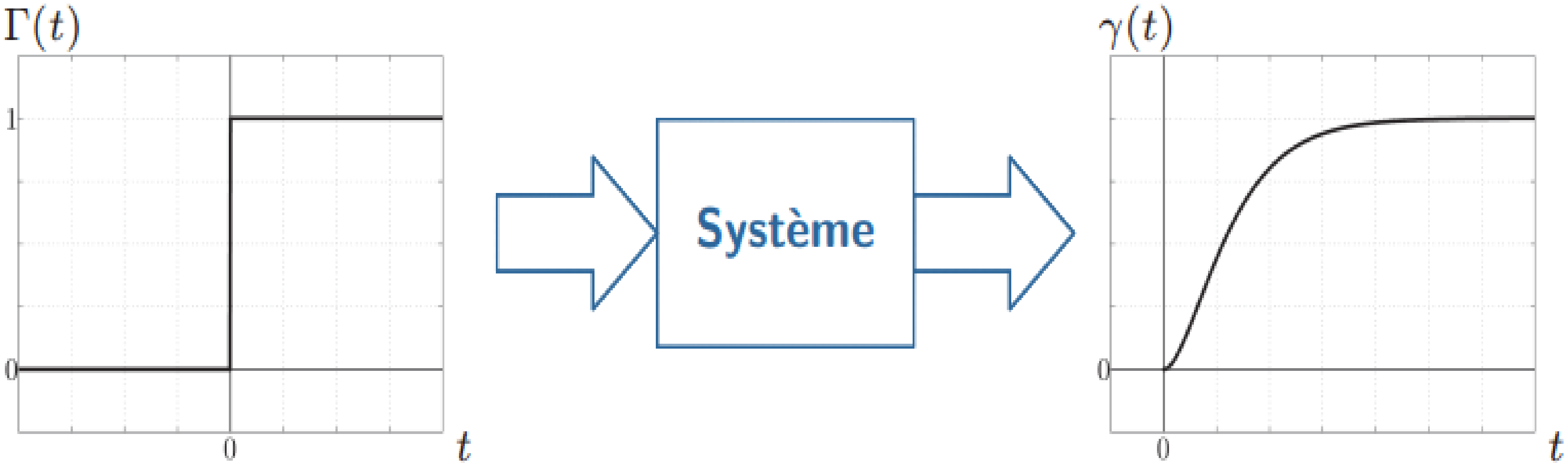
RÉPONSE INDICIELLE

L’intérêt d’une telle étude est d’observer l’effet d’une discontinuité finie du signal d’entrée. Cette « discontinuité » est obtenue en pratique lorsque le signal d’entrée présente un temps de montée très court devant les temps caractéristiques du système à étudier.

La réponse indicielle, noté γ (t) , est la réponse d’un système à un échelon unitaire.

RÉPONSE INDICIELLE

La indicielle, noté γ (t) , est la réponse d’un système à un échelon unitaire.



PRODUIT DE CONVOLUTION

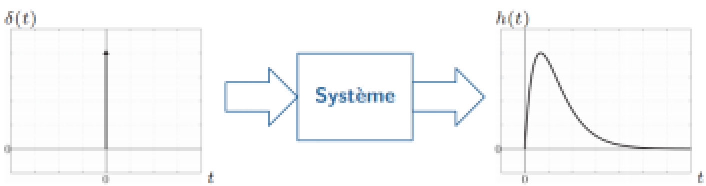
La convolution est l'opération de traitement de signale la plus fondamentale.

La convolution décrit l'effet de l'entrée du système sur la sortie en fonction de la réponse impulsionnelle du système h(t).

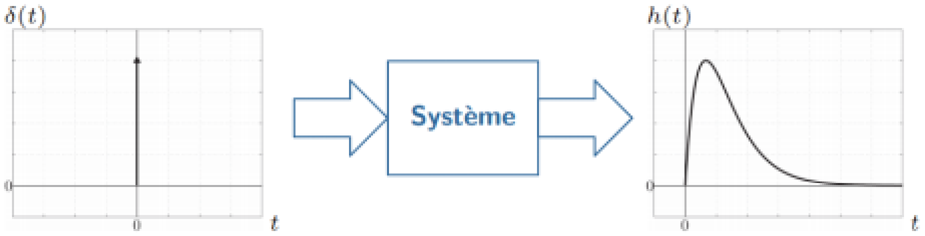
- Si le système est linéaire et invariant dans le temps, alors s(t) est le résultat de la convolution de e(t) et de h(t)

$$\boxed{s(t) = e(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\tau)h(t-\tau)d\tau}$$

τ est la variable muette du produit de convolution.



PRODUIT DE CONVOLUTION



Propriétés

- Commutativité

$$\boxed{s(t) * e(t) = e(t) * s(t)}$$

- Associativité

$$\boxed{(y(t) * x(t)) * z(t) = y(t) * (x(t) * z(t))}$$

- Distributivité

$$\boxed{x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)}$$

THÉORÈME DE CONVOLUTION

Théorème de Plancherel

- Si X(f) et H(f) sont les transformées de Fourier de x(t) et de h(t),

  alors:

$$\boxed{TF(x(t) * y(t)) = X(f).Y(f)}$$

$$\boxed{TF(x(t).y(t)) = X(f) * Y(f)}$$

Physiquement, la convolution entre deux signaux est l'intégrale de recouvrement de deux fonctions.

Transformée de Laplace

- Les systèmes linéaires analogiques sont très souvent gouvernés par des équations différentielles à coefficients constants reliant les signaux en entrée et en sortie. En régime permanent sinusoïdal la résolution de ce type d’équations est facilitée par la représentation complexe des signaux sinusoïdaux ou par la transformée de Fourier.
- L'analyse temporelle des systèmes linéaires, en particulier pour l’étude des régimes transitoires, nécessite la résolution des équations différentielles.

Transformée de Laplace

- Dans ce chapitre nous introduisons un outil mathématique puissant, la transformation de Laplace, pour l'étude des systèmes linéaires en régime transitoire.
- Cette transformation permet d'associer à toute fonction du temps $f(t)$ une fonction $F(p)$ d'une variable complexe $p = \sigma + j\,\omega$.
- Elle permet de remplacer les opérations analytiques de dérivation et d'intégration par des opérations algébriques. Cette propriété facilite la résolution des équations différentielles.

TRANSFORMÉE DE LAPLACE

La transformée de Laplace est un outil mathématique bien adapté pour le calcul de réponses temporelles et pour l'analyse fréquentielle de signaux causals.

Transformée de Laplace S(p) d'un signal s(t) est définie par :

$$S(p) = L\{s(t)\} = \int_0^{+\infty} s(t)e^{(-pt)}dt$$

Relation avec la transformée de Fourier : si le signal s (t) est causal (s(t)=0 pour tout t < 0), alors on a la relation :

$$S(f) = \{S(p)\}_{p=j2\pi f=jw}$$

TRANSFORMÉE DE LAPLACE

- Linéarité: $a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \leftrightarrow a_1X_1(s) + a_2X_2(s)$
- Convolution: $x(t) * y(t) \leftrightarrow X(s).Y(s)$
- Translation temporelle: $x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-st_0}X(s)$
- Translation fréquentielle: $e^{at}x(t) \leftrightarrow X(s - a)$
- Dérivation: $\frac{dx(t)}{dt} = sX(s) - x(0^+)$ $x(0^+)$: condition initiale
- Intégration: $\int_0^t x(\tau)d\tau = \leftrightarrow \frac{X(s)}{s}$
- Théorème de la valeur initiale:

$$x(0^+) = \lim_{t\to 0^+} x(t) = \lim_{s\to +\infty} sX(s)$$

- Théorème de la valeur finale: $x_\infty = \lim_{t\to +\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$

TRANSFORMÉE DE LAPLACE

Résolution d'équations différentielles (voir TD 3)

1. D'une manière générale, on procède en trois étapes : Passage du système d'équations différentielles à un système algébrique grâce à la transformée de Laplace.
2. Résolution du système algébrique pour obtenir les transformées de Laplace des solutions.
3. Retour aux solutions du systèmes différentielles à l'aide de la recherche d'originaux.

TRANSFORMÉE DE LAPLACE

propriété	fonction du temps	fonction de p
linéarité	$a.f_1(t)+b.f_2(t)$	$a.F_1(p)+b.F_2(p)$
dérivation	$\frac{df(t)}{dt}$	$pF(p)$
intégration	$\int_0^t f(t)dt$	$\frac{F(p)}{p}$
translation dans le temps	$f(t-a)$	$e^{-ap}F(p)$
translation en p	$f(t)e^{-at}$	$F(p+a)$
signal		
échelon	$f(t)=U(t)$	$\frac{1}{p}$
impulsion de Dirac	$f(t)=\delta(t)$	1
rampe	$f(t)=at$	$\frac{a}{p^2}$
exponentielle	$f(t)=e^{-at}$	$\frac{1}{p+a}$

Mini-test 3