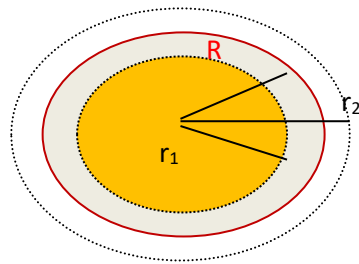
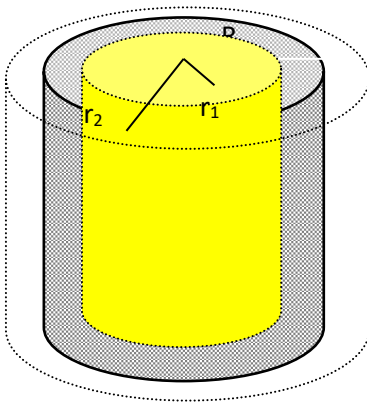


Chapitre II : Théorème de Gauss



Auteurs : Mme Nadia
Bachir (Dahmani) et Mme
Hadjou Belaid Zakia

Chapitre II : Théorème de Gauss

Université De Tlemcen
Faculté Des Sciences

Année Universitaire 2022/2023
Département De Mathématiques

1^{ERE} ANNEE LMD-MI
COURS D'ELECTRICITE

Chapitre II : Théorème de Gauss

*Préparé par : Mme Nadia Bachir Née Dahmani
et Mme Hadjou Belaid Zakia*

Sommaire

1. Introduction	3
2. Définitions	3
2.1 Vecteur surface	3
2.2 Flux de champ vectoriel	3
3. Flux d'un champ électrique à travers une surface fermée	3
4. Théorème de Gauss	4
4.1 Enoncé du théorème	4
4.2 Les étapes à suivre pour l'application du théorème de Gauss	4
4.3 Le flux pour différents types de distribution continue de charges	4
5. Exemples d'application du Théorème de Gauss	5
5.1 Cas d'un fil infini	5
5.2 Cas d'un cylindre infini	6
a. Chargé en surface	7
b. Chargé en volume	8
5.3 Cas d'une sphère	9
a. Chargée en surface	9
b. Chargée en volume	10
5.4 Le champ électrostatique créé par un plan infini	11

1. Introduction

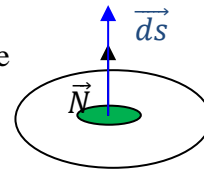
La loi de Gauss est un modèle mathématique peut être utilisée pour obtenir les champs électriques de certaines distributions de charges avec un haut degré de symétrie tel que : le cylindre, la sphère, le fil infini, ...

C'est donc une méthode spécialisée, mais elle est très utile pour cette classe de problèmes auxquels elle peut s'appliquer. À ce stade, la loi de Gauss nous aidera à mieux comprendre les formes des champs électriques dus aux distributions de charges continus.

2. Définitions

2.1 Vecteur surface

Le vecteur surface \vec{ds} est un vecteur porté par le vecteur unitaire normale à la surface.

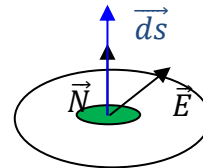


2.2 Flux d'un champ vectoriel

Le flux élémentaire $d\Phi$ s'écrit par :

$$d\Phi = \vec{E} \cdot \vec{ds} \Rightarrow \Phi = \iint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \iint \vec{E} \cdot ds \cdot \vec{N}$$

Avec $\vec{ds} = ds \cdot \vec{N}$



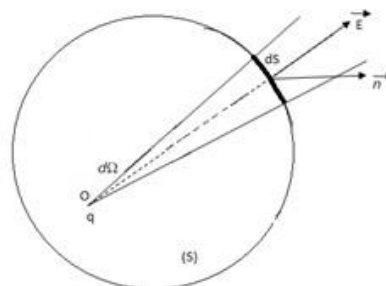
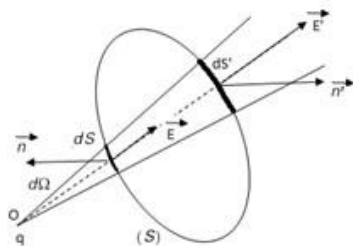
L'unité du flux est le Weber (Wb).

3. Flux d'un champ électrique à travers une surface fermée

Soit S est une surface fermée arbitraire et q est la charge incluse à l'intérieur de la surface S. Le flux élémentaire de champ électrique crée par la charge q à travers la surface fermé S est donné par :

$$d\Phi = \vec{E} \cdot \vec{ds} = E \cdot ds \cdot \cos \alpha$$

α : l'angle entre \vec{E} et \vec{N} (\vec{ds})



Le champ électrique sera : $\vec{E} = \frac{kq}{r^2} \vec{u}$ et $d\Phi = \frac{kq}{r^2} \vec{u} \cdot \vec{ds} = kq \frac{\vec{u} \cdot \vec{ds}}{r^2}$

Chapitre II : Théorème de Gauss

$$\vec{u} \cdot \vec{ds} = ds |\vec{u}| \cos \alpha$$

$$\phi = \oiint \frac{kq}{r^2} \vec{u} \cdot \vec{ds} = kq \oiint \frac{ds \cos \alpha}{r^2} \quad \text{car} \quad |\vec{u}| = 1$$

Avec $\frac{ds \cos \alpha}{r^2} = d\Omega = \text{l'angle solide}$

Remarque : L'unité de l'angle solide est le stéradian

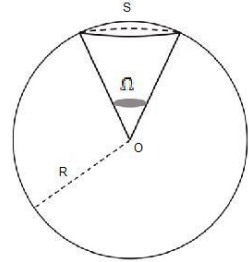
La surface d'une sphère de rayon R étant $S = 4\pi R^2$, on en déduit que le plus grand angle solide mesurable, qui correspond à un objet couvrant toute la sphère, est de 4π stéradians.

$\Omega = 4\pi =$ l'angle solide pour voir l'espace entier

$$\text{Donc } \phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Dans le cas de plusieurs charges ponctuelles le flux s'écrit par :

$$\phi = \frac{\sum q_i}{\epsilon_0} = \oiint \vec{E} \cdot \vec{ds}$$



4. Théorème de Gauss

4.1 Enoncé : Le flux à l'intérieur d'une surface fermée appelée surface de Gauss est égale à la somme des charges nettes Q_{int} à l'intérieur de cette surface divisé par la permittivité diélectrique dans le vide ϵ_0 .

$$\phi = \oiint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{\sum Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

4.2 Les étapes à suivre pour l'application du théorème de Gauss

- Choix d'un système de coordonnées
- Etude de l'invariance du système
- Etude de la symétrie
- Choix de la surface de Gauss

4.3 Le flux pour différents types de distribution continue de charges

- Distribution linéique ($dq = \lambda dl$) on a $\phi = \oiint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{\int \lambda dl}{\epsilon_0}$
- Distribution surfacique ($dq = \sigma ds$) on a $\phi = \oiint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{\int \sigma ds}{\epsilon_0}$
- Distribution volumique ($dq = \rho dv$) on a $\phi = \oiint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{\int \rho dv}{\epsilon_0}$

5. Exemples d'application du Théorème de Gauss

5.1. Cas d'un fil infini

- Choix du système de coordonnées

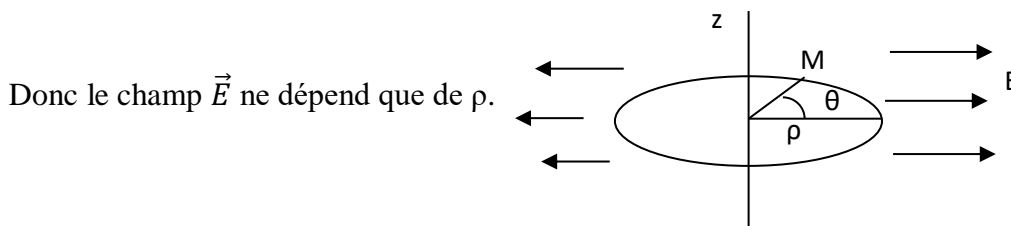
On peut assimiler le fil à l'échelle microscopique à un cylindre d'un rayon infiniment petit, donc on utilise les coordonnées cylindriques pour le calcul du champ.



- Etude de l'invariance

On étudie l'invariance par rapport à ρ , θ et z (coordonnées cylindriques)

- Si on change l'angle θ , M tourne autour du fil mais le champ électrique ne change pas.
- Si on change z , M fait une translation suivant (Oz) et puisque le fil est infini, on a toujours le même \vec{E} , il reste invariant.
- Si on change ρ (c.a.d. la distance R entre la charge et le point M change) ; alors M peut s'éloigner ou se rapprocher du fil ; donc \vec{E} n'est pas constant sur ρ .



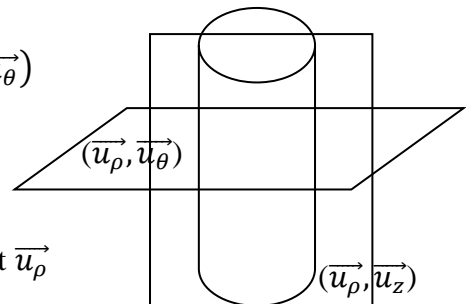
- Etude de la symétrie

Dans ce cas, nous avons deux plans de symétrie :

1. Le plan coupant le fil infini horizontalement $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$
2. Le plan coupant le fil infini verticalement $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_z)$

Donc l'axe de symétrie est l'intersection des deux plans

C'est l'axe suivant \vec{u}_ρ donc le champ électrique est suivant \vec{u}_ρ



- Choix de la surface de Gauss

La surface de Gauss est un cylindre de rayon r et de hauteur h . A cause de la symétrie, le champ est suivant le rayon ρ , donc on dit que **le champ est « radial » et constant** en tout point de la surface de Gauss (\vec{E} ne dépend que de ρ).

$$\text{D'après le Théorème de Gauss : } \oint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{\Sigma Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \oint \vec{E} \cdot \vec{ds}_{base\ 1} + \oint \vec{E} \cdot \vec{ds}_{lat} + \oint \vec{E} \cdot \vec{ds}_{base\ 2}$$

$$\vec{E} \perp \vec{ds}_{base} \Rightarrow \iint \vec{E} \cdot \vec{ds}_{base} = 0$$

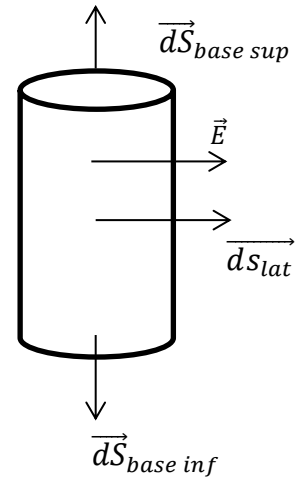
$$\vec{E} \parallel \vec{ds}_{lat} \text{ Donc : } \phi = \iint \vec{E} \cdot \vec{ds}_{lat} = \iint E \cdot ds_{lat} = E \cdot \int ds_{lat} \\ = E \cdot S_{lat}$$

Donc $\phi = E \cdot 2\pi r h$

Cherchons Q_{int} , la charge élémentaire est

$$dq = \lambda dl \Rightarrow Q = \lambda \int_0^h dl = \lambda h$$

$$E \cdot 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0}$$



5.2. Cas d'un cylindre infini

- Choix du système de coordonnées

Puisqu'on est en train d'étudier un cylindre, nous utilisons les coordonnées cylindriques pour le calcul du champ.

- Etude de l'invariance

C'est la même chose que le fil ; le champ électrique ne change pas en variant θ et z . Par contre \vec{E} dépend de ρ .

- Etude de la symétrie

Dans ce cas aussi, nous avons deux plans de symétrie :

Le plan coupant le fil infini horizontalement ($\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta$) et

Le plan coupant le fil infini verticalement (\vec{u}_ρ, \vec{u}_z)

Donc l'axe de symétrie est l'intersection des deux plans

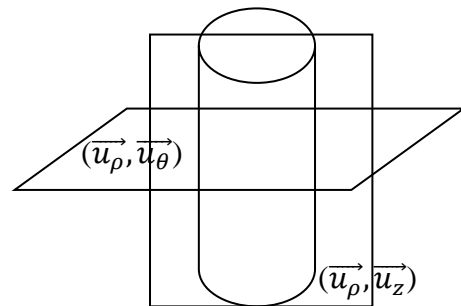
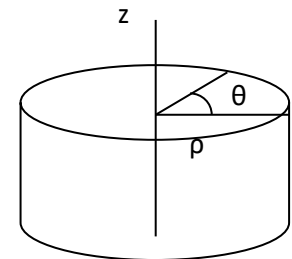
C'est l'axe suivant \vec{u}_ρ donc le champ électrique est suivant \vec{u}_ρ

- Choix de la surface de Gauss

Le choix de la surface de Gauss pour un cylindre chargé est un cylindre de rayon r et de hauteur h .

A cause de la symétrie, le champ est **radial et constant** en tout point de la surface de Gauss.

$$\text{D'après le Théorème de Gauss : } \phi = \iint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{\Sigma Q_{int}}{\epsilon_0}$$



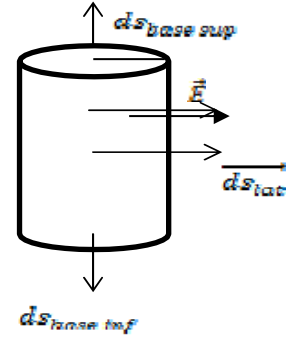
Chapitre II : Théorème de Gauss

$$\phi = \iint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \iint \vec{E} \cdot \vec{ds}_{base\ 1} + \iint \vec{E} \cdot \vec{ds}_{lat} + \iint \vec{E} \cdot \vec{ds}_{base\ 2}$$

$$\vec{E} \perp \vec{ds}_{base} \Rightarrow \iint \vec{E} \cdot \vec{ds}_{base} = 0$$

$$\vec{E} \parallel \vec{ds}_{lat} \text{ Donc : } \phi = \iint \vec{E} \cdot \vec{ds}_{lat} = \iint E \cdot ds_{lat} = E \cdot \int ds_{lat} = E \cdot S_{lat}$$

$$\text{Donc } \phi = E \cdot 2\pi r h = Q_{int} / \epsilon_0$$



Remarque importante :

Le choix de la surface de Gauss pour un cylindre chargé soit en surface soit en volume, ou bien deux cylindres (un chargé en volume et l'autre chargé en surface ou bien les deux chargés en surface...) est toujours un cylindre de rayon r et de hauteur h. et le calcul du flux sera le même, seulement la charge Q_{int} varie selon la distribution.

a. Pour un Cylindre chargé en surface

- Le champ électrique

Nous avons deux cas

1^{er} cas $r < R$ on prend la surface de Gauss à l'intérieure du cylindre chargé pour calculer le champ à l'intérieure.

Alors dans une distribution surfacique on a :

$$Q_{int} = 0 \Rightarrow E_1 = 0$$

2^{eme} cas $r \geq R$ on prend la surface de Gauss à l'extérieure du cylindre chargé pour calculer le champ à l'extérieure.

$$\text{On a } dq = \sigma ds \Rightarrow Q_{int} = \sigma S = \sigma 2\pi R h$$

$$\text{Donc } E_2 \cdot 2\pi r h = \frac{\sigma 2\pi R h}{\epsilon_0} \Rightarrow E_2 = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r}$$

- Le potentiel

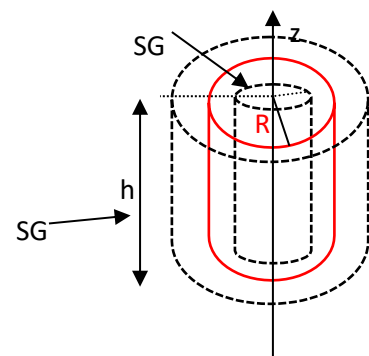
$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \text{ avec } E = E(r) \Rightarrow E = -\frac{dV}{dr}$$

$$\Rightarrow dV = -E dr$$

$$\text{donc } V = -\int E \cdot dr$$

$$\text{1^{er} cas } r < R : \text{ on a } E_1 = 0 \Rightarrow V_1 = C_1$$

$$\text{2^{eme} cas } r \geq R : \text{ on a } E_2 = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r} \Rightarrow V_2 = -\frac{\sigma R}{\epsilon_0} \int \frac{1}{r} \cdot dr = -\frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln r + C_2$$



Chapitre II : Théorème de Gauss

Remarque : Dans le cas d'un cylindre on ne peut pas calculer les constantes C_1 et C_2 car le potentiel à l'infini est non nul.

b. Cylindre chargé en volume

- Le champ électrique

Nous avons deux cas

Pour : $r < R$ on prend la surface de Gauss à l'intérieure du cylindre chargé pour calculer E_1
 $dq = \rho dv$

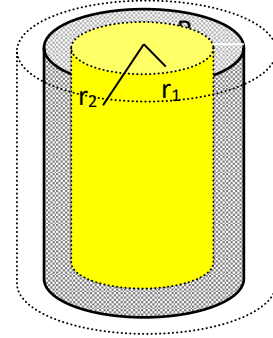
$$v_{\text{sphère}} = \pi r^2 h \Rightarrow dv = 2\pi h r dr$$

$$Q_{\text{int}} = \iiint \rho dv = \rho \int_0^{r_1} 2\pi h r dr = \rho \pi h r^2 \Rightarrow E 2\pi r h = \frac{\rho \pi h r^2}{\epsilon_0}$$

$\pi h r^2$ est le volume du cylindre chargé qui est la SG

$$Q_{\text{int}} = \iiint \rho dv = \rho v_{\text{surface de gauss}} = \rho \pi h r^2$$

$$\Rightarrow E_1 = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r$$



Pour : $r \geq R$ on prend la surface de Gauss à l'extérieure du cylindre chargé pour calculer E_2
 donc on intègre entre 0 et R (car Q_{int} se trouve sur le cylindre de rayon R).

$$Q_{\text{int}} = \iiint \rho dv = \rho \int_0^R 2\pi h r dr = \rho \pi h R^2 \Rightarrow E 2\pi r h = \frac{\rho \pi h R^2}{\epsilon_0}$$

$$Q_{\text{int}} = \iiint \rho dv = \rho v_{\text{Cylindre de rayon R}} = \rho \pi h R^2 \Rightarrow E 2\pi r h = \frac{\rho \pi h R^2}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E_2 = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

- Le potentiel :

$\vec{E} = -\text{grad} V$ avec $E = E(r) \Rightarrow E = -\frac{dV}{dr}$ donc $V = -\int E \cdot dr$ (ce calcul est valable pour n'importe quelle cylindre)

$$V_1 = -\int E_1 \cdot dr \Rightarrow V_1 = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int r dr = -\frac{\rho}{4\epsilon_0} r^2 + C_1$$

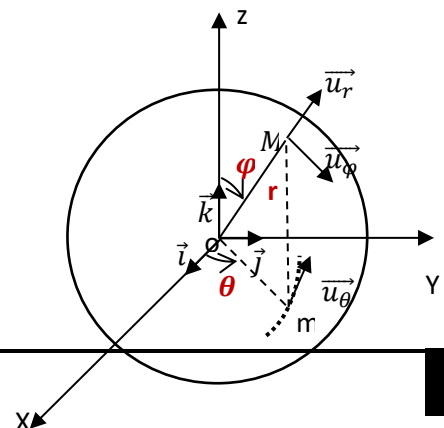
$$V_2 = -\int E_2 \cdot dr = -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \int \frac{1}{r} \cdot dr = -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln r + C_2$$

5.3. Cas d'une sphère

- Choix du système de coordonnées

Dans ce cas, on utilise les coordonnées sphériques

- Etude de l'invariance



Chapitre II : Théorème de Gauss

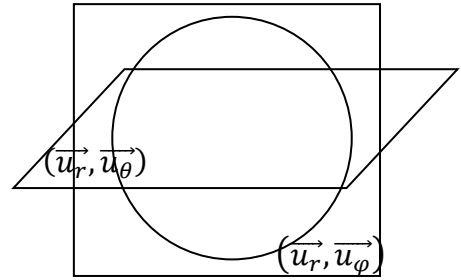
Si on change l'angle θ ou l'angle φ , le champ électrique \vec{E} ne change pas, par contre, en variant r le champ électrique \vec{E} varie.

- **Etude de la symétrie**

Nous avons deux plans de symétrie :

Le plan coupant le fil infini horizontalement $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$

et le plan coupant le fil infini verticalement $(\vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$.



Donc l'axe de symétrie est l'intersection des deux plans, qui est l'axe suivant \vec{u}_r donc le champ électrique est suivant \vec{u}_r . On dit alors que **le champ est radial**.

- **Choix de la surface de Gauss**

La surface de Gauss est une sphère de centre O et de rayon r , à cause de la symétrie. Le champ est radial et constant en tout point de la surface de Gauss.

$$\Phi = \oiint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{\sum Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} // \vec{ds} \quad \text{Donc : } \oiint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \iint E \cdot ds = E \iint ds = E \cdot S = E 4\pi r^2 \Rightarrow \Phi = E 4\pi r^2 = \frac{\sum Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Remarque importante :

Le choix de la surface de Gauss pour une sphère chargée soit en surface soit en volume, ou bien deux sphères (une chargée en volume et l'autre chargée en surface ou bien les deux chargées en surface...) est toujours une sphère de rayon r et de centre O. Et le calcul du flux sera le même, seulement la charge Q_{int} varie selon la distribution.

a. Cas d'une sphère chargée en surface

- Le champ électrostatique $E(r)$ en tout point de l'espace.

Nous avons 2 cas :

1^{er} cas $r < R$ la surface de Gauss est à l'intérieure de la sphère pour calculer E_1 alors :

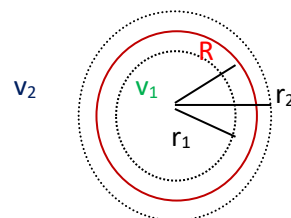
$$Q_{int} = 0 \Rightarrow E_1 = 0$$

2^{eme} cas $r \geq R$ la surface de Gauss est à l'extérieure de la sphère pour calculer E_2

alors : $dq = \sigma ds \Rightarrow Q_{int} = \sigma 4\pi R^2$

$4\pi R^2$ c'est la surface de la sphère chargé en surface de rayon R .

$$\text{Donc } E_2 4\pi r^2 = \frac{\sigma 4\pi R^2}{\epsilon_0} \Rightarrow E_2 = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}$$



Chapitre II : Théorème de Gauss

- Le potentiel électrostatique $V(r)$ en tout point de l'espace.

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}v \Rightarrow E = -\frac{dv}{dr} \quad \text{donc} \quad v = -\int E dr$$

1^{er} cas $r < R$ On a $E_1 = 0 \Rightarrow v_1 = C_1 \quad (r \in [0, R])$

2^{eme} cas $r \geq R$ On a $E_2 = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \Rightarrow v_2 = -\frac{\sigma R^2}{\epsilon_0} \int \frac{dr}{r^2} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r} + C_2 \quad (r \in [R, +\infty])$

Calcul des constantes :

- **Le potentiel à l'infini est nul ($r \rightarrow \infty$) $v=0$** donc $\lim_{r \rightarrow \infty} v_2 = 0$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r} + C_2 = 0 \Rightarrow 0 + C_2 = 0 \quad \text{donc} \quad C_2 = 0 \quad \text{Alors} \quad v_2 = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r}$$

- **Le potentiel est une fonction continue en R** donc $v_1(R) = v_2(R)$

$$\text{alors } v_1 = C_1 = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 R} \quad \text{donc} \quad v_1 = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}$$

b. Sphère chargée en volume

- Le champ électrostatique $E(r)$ en tout point de l'espace.

Nous avons 2 cas :

1^{er} cas $r < R$

$$v_{\text{sphère}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow dv = 4\pi r^2 dr$$

$$dq = \rho dv = \rho 4\pi r^2 dr \Rightarrow Q_{\text{int}} = \rho \iiint dv = \rho 4\pi \int_0^r r^2 dr$$

On intègre entre 0 et r car la charge Q_{int} se trouve dans le volume de la Sphère de Gauss de rayon r .

$$\Rightarrow Q_{\text{int}} = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{donc} \quad (*) \Rightarrow E_1 = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi r^2 \epsilon_0} \quad \text{donc} \quad E_1 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r$$

2^{eme} cas $r \geq R$

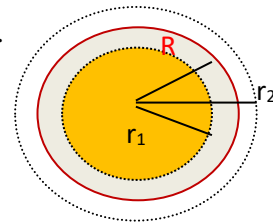
$$dq = \rho dv = \rho 4\pi r^2 dr \Rightarrow Q_{\text{int}} = \rho \iiint dv = \rho 4\pi \int_0^R r^2 dr \quad \text{donc} \quad Q_{\text{int}} = \rho \frac{4}{3}\pi R^3$$

On intègre entre 0 et R car la charge Q_{int} se trouve dans le volume de la sphère de rayon R .

$$(*) \Rightarrow E_2 = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi r^2 \epsilon_0} \quad \text{donc} \quad E_2 = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}$$

1- Le potentiel électrique $v(r)$ en tout point de l'espace.

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}v \Rightarrow E = -\frac{dv}{dr} \quad \text{donc} \quad v = -\int E dr$$



1^{er} cas : $r < R$

$$E_1 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \Rightarrow v_1 = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \int r dr \text{ donc } v_1 = -\frac{\rho}{6\epsilon_0} r^2 + C_1$$

2^{eme} cas $r \geq R$

$$E_2 = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2} \Rightarrow v_2 = -\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \int \frac{1}{r^2} dr \text{ donc } v_2 = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r} + C_2$$

Calcul des constantes :

Le potentiel à l'infini ($r \rightarrow \infty$) $v=0$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r} + C_2 = 0 + C_2 = 0 \text{ Donc } C_2 = 0$$

$$\text{donc } v_2 = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

Le potentiel est une fonction continue en R donc $v_1(R) = v_2(R)$

$$\frac{\rho R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{R} = -\frac{\rho}{6\epsilon_0} R^2 + C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{\rho R^2}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \text{ donc } v_1 = -\frac{\rho}{6\epsilon_0} r^2 + \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}$$

5.4. Le champ électrostatique crée par un plan infini

Pour chercher le champ électrique dans un plan infini chargé en surface, on utilise le théorème de Gauss.

La surface de Gauss choisie dans ce cas est un cylindre

coupant le plan infini verticalement. Le cylindre est de rayon r et de hauteur h.

Par raison de symétrie le champ est radial et constant en tout point de la surface de Gauss.

Le flux à travers la surface de Gauss est :

$$\phi = \oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{\sum Q_{int}}{\epsilon_0}$$

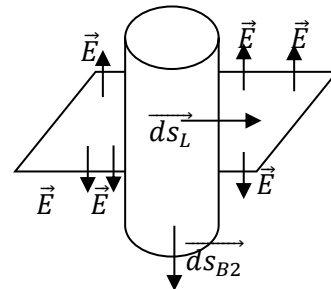
Pour une SG un cylindre on a trois flux.

$$\phi = \phi_{sbase1} + \phi_{slat} + \phi_{sbase2} = \iint \vec{E} \cdot \vec{dS}_{B1} + \iint \vec{E} \cdot \vec{dS}_{B2} + \iint \vec{E} \cdot \vec{dS}_E$$

$$\iint \vec{E} \cdot \vec{dS}_{Lat} = 0 \text{ car } \vec{E} \perp \vec{dS}_{Lat}$$

$$\text{Donc } \phi = 2 \iint E \cdot dS_{base} = 2E \cdot S_{base}$$

$$\Rightarrow \phi = 2E \cdot S_{base} = \frac{\sum Q_{int}}{\epsilon_0} \quad (1)$$



Chapitre II : Théorème de Gauss

$$dq = \sigma ds \Rightarrow Q_{int} = \sigma \iint ds = \sigma S_{base}$$

$$(1) \Rightarrow 2E \cdot S_{base} = \frac{\sigma S_{base}}{\varepsilon_0} \quad \text{donc} \quad \mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Donc $\lim_{R \rightarrow \infty} |E| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, on dit que le champ pour un plan infini est identique.