



TD N° 02 d'Electricité

Théorème de Gauss

Exercice1:

Une sphère de centre O et de rayon R contient une charge uniformément répartie avec une densité volumique ρ .

- 1- Trouver l'expression du champ électrique $E(r)$ en appliquant le théorème de GAUSS.
- 2- Déduire le potentiel électrique $V(r)$.

Exercice2:

On considère une sphère de rayon R possédant une charge Q uniformément répartie sur sa surface avec une densité σ .

- 1- En appliquant le théorème de GAUSS calculer le champ électrique en tout point de l'espace.
- 2- En déduire le potentiel électrique en tout point de l'espace.

Exercice 3:

Soient deux sphères concentriques de centre O de rayons R_1 et R_2 respectifs tel que $R_1 < R_2$. La sphère de rayon R_1 est chargée en volume. La seconde de rayon R_2 est chargée en surface.

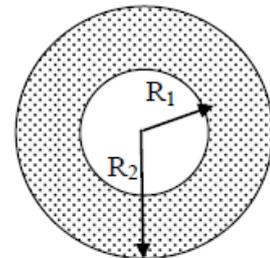
- 1- En utilisant le théorème de GAUSS trouver l'expression du champ électrostatique $E(r)$ en tout point de l'espace.
- 2- En déduire l'expression du potentiel électrique $V(r)$ en tout point de l'espace.

Exercice 4:

Soient deux sphères concentriques de centre O de rayons R_1 et R_2 respectivement tel que $R_1 < R_2$.

En utilisant le théorème de GAUSS :

- 1- Calculer le champ électrostatique en tout point de l'espace pour une distribution volumique de charge répartie uniformément entre ces deux sphères.
- 2- Déduire le potentiel électrique en tout point de l'espace.



Exercice 5:

- 1- Calculer le champ électrostatique créée en tout point de l'espace par un cylindre infini de rayon R, chargé en surface avec une densité surfacique σ .
- 2- Recalculer le champ électrostatique créée en tout point de l'espace par un cylindre de rayon R, chargé en volume avec une densité volumique ρ .

Exercices supplémentaires :

Exercice 6 :

En utilisant le théorème de GAUSS, calculer le champ électrostatique en tout point de l'espace pour une distribution volumique de charge répartie uniformément entre deux cylindres coaxiaux de longueurs infinies et de rayons R_1 , R_2 respectifs tel que $R_1 < R_2$.

Déduire le potentiel électrique en tout point de l'espace.



Exercice 7 :

Un cylindre de hauteur infinie et de rayon R est chargé en surface avec une densité de charge surfacique σ constante. Sur l'axe de ce cylindre on place un fil conducteur de longueur infinie et de densité de charge linéique λ constante.

- 1- Calculer, en tout point de l'espace, le champ électrostatique $E(r)$ créée par cette distribution de charges.

Exercice 8 :

Déterminer le champ électrostatique d'une sphère de centre O et de rayon R qui contient une charge uniformément répartie avec une densité volumique $\rho = Ar^2$, en notant que r est la distance à O .



Corrigé de la série de TD N° 2
Théorème de Gauss

Exercice 3 :

On prend comme surface de Gauss, une sphère de centre O et de rayon r. Par raison de symétrie le champ est radial et constant en tout point de la surface de Gauss.

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{\sum Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} \parallel \vec{ds} \text{ Donc } : \oint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \iint E \cdot ds = E \iint ds = E \cdot S = E 4\pi r^2 \Rightarrow E 4\pi r^2 = \frac{\sum Q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q_{int}}{4\pi r^2 \epsilon_0} \quad (*)$$

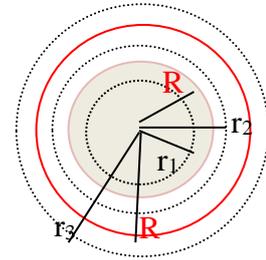
1- Le champ électrostatique E(r) en tout point de l'espace.

Nous avons 3 cas

1^{er} cas $r < R_1$ ($r \in [0, R_1[$)

$$dq = \rho dv = \rho 4\pi r^2 dr \Rightarrow Q_{int} = \rho \iiint dv = \rho 4\pi \int_0^r r^2 dr$$

$$\Rightarrow Q_{int} = \rho \frac{4}{3} \pi r_1^3 \quad \text{donc } (*) \Rightarrow E_1 = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi r_1^3}{4\pi r^2 \epsilon_0} \quad \text{donc } E_1 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r_1$$



2^{ème} cas $R_1 \leq r < R_2$ ($r \in [R_1, R_2[$)

$$dq = \rho dv = \rho 4\pi r^2 dr \Rightarrow Q_{int} = \rho \iiint dv = \rho 4\pi \int_0^{R_1} r^2 dr \quad \text{donc } Q_{int} = \rho \frac{4}{3} \pi R_1^3$$

$$(*) \Rightarrow E_2 = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi R_1^3}{4\pi r^2 \epsilon_0} \quad \text{donc } E_2 = \frac{\rho R_1^3}{3\epsilon_0 r^2}$$

3^{ème} cas $r \geq R_2$ ($r \in [R_2, +\infty[$)

$$Q_{int} = Q_1 + Q_2 \text{ avec } Q_1 = \rho \frac{4}{3} \pi R_1^3 \text{ et } dq_2 = \sigma ds \Rightarrow Q_2 = \sigma 4\pi R_2^2$$

$$\text{Donc } Q_{int} = \rho \frac{4}{3} \pi R_1^3 + \sigma 4\pi R_2^2 \quad \text{donc } (*) \Rightarrow E_3 = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi R_1^3 + \sigma 4\pi R_2^2}{4\pi r^2 \epsilon_0} \quad \text{donc } E_3 = \frac{\rho R_1^3}{3\epsilon_0 r^2} + \frac{\sigma R_2^2}{\epsilon_0 r^2}$$

2- Le potentiel électrique v(r) en tout point de l'espace.

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad} v \Rightarrow E = -\frac{dv}{dr} \quad \text{donc } v = -\int E dr$$

1^{er} cas : $r < R_1$ ($r \in [0, R_1[$)

$$E_1 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r \Rightarrow v_1 = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \int r dr \quad \text{donc } v_1 = -\frac{\rho}{6\epsilon_0} r^2 + C_1$$

2^{ème} cas $R_1 \leq r < R_2$ ($r \in [R_1, R_2[$)

$$E_2 = \frac{\rho R_1^3}{3\epsilon_0 r^2} \Rightarrow v_2 = -\frac{\rho R_1^3}{3\epsilon_0} \int \frac{1}{r^2} dr \quad \text{donc } v_2 = \frac{\rho R_1^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r} + C_2$$

3^{ème} cas $r \geq R_2$ ($r \in [R_2, +\infty[$)



$$E_3 = \frac{\rho R_1^3}{3\epsilon_0 r^2} + \frac{\sigma R_2^2}{\epsilon_0 r^2} \Rightarrow v_3 = - \left(\frac{\rho R_1^3}{3\epsilon_0} + \frac{\sigma R_2^2}{\epsilon_0} \right) \int \frac{1}{r^2} dr \text{ donc } v_3 = \left(\frac{\rho R_1^3}{3\epsilon_0} + \frac{\sigma R_2^2}{\epsilon_0} \right) \frac{1}{r} + C_3$$

Le potentiel à l'infini ($r \rightarrow \infty$) $v=0$ donc $C_3=0$ et $v_3 = \left(\frac{\rho R_1^3}{3\epsilon_0} + \frac{\sigma R_2^2}{\epsilon_0} \right) \frac{1}{r}$

Le potentiel est une fonction continue :

- en R_2 donc $v_3(R_2) = v_2(R_2)$

$$\frac{\rho R_1^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{R_2} + \frac{\sigma R_2^2}{\epsilon_0} \frac{1}{R_2} = \frac{\rho R_1^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{R_2} + C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{\sigma R_2}{\epsilon_0} \text{ donc } v_2 = \frac{\rho R_1^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r} + \frac{\sigma R_2}{\epsilon_0}$$

- en R_1 donc $v_2(R_1) = v_1(R_1)$

$$-\frac{\rho}{6\epsilon_0} R_1^2 + C_1 = \frac{\rho R_1^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{R_1} + \frac{\sigma R_2}{\epsilon_0} \Rightarrow C_1 = \frac{\rho R_1^2}{3\epsilon_0} + \frac{\rho R_1^2}{6\epsilon_0} + \frac{\sigma R_2}{\epsilon_0} = \frac{3\rho R_1^2}{6\epsilon_0} + \frac{\sigma R_2}{\epsilon_0}$$

$$C_1 = \frac{\rho R_1^2}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma R_2}{\epsilon_0}$$

$$\text{Donc } v_1 = -\frac{\rho}{6\epsilon_0} r^2 + \frac{\rho R_1^2}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma R_2}{\epsilon_0}$$

Exercice 4

On prend comme surface de Gauss, une sphère de centre O et de rayon r. Par raison de symétrie le champ est radial et constant en tout point de la surface de Gauss.

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{\sum Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} \parallel \vec{ds} \quad \text{Donc : } \oint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \oint E \cdot ds = E \oint ds = E \cdot S = E 4\pi r^2 \Rightarrow E 4\pi r^2 = \frac{\sum Q_{int}}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q_{int}}{4\pi r^2 \epsilon_0} \quad (*)$$

1- Le champ électrostatique E(r) en tout point de l'espace.

Nous avons 3 cas

1^{er} cas $r < R_1$

$$Q_{int} = 0 \quad \text{donc } \mathbf{E}_1 = \mathbf{0}$$

2^{ème} cas $R_1 \leq r < R_2$

$$dq = \rho dv = \rho 4\pi r^2 dr \Rightarrow Q_{int} = \rho \iiint dv = \rho 4\pi \int_{R_1}^r r^2 dr$$

$$\text{donc } Q_{int} = \rho \frac{4}{3} \pi (r^3 - R_1^3)$$

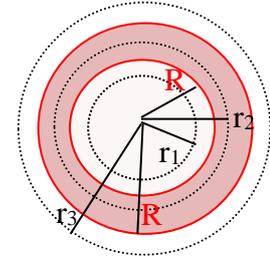
$$(*) \Rightarrow E_2 = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi (r^3 - R_1^3)}{4\pi r^2 \epsilon_0} \quad \text{donc } E_2 = \frac{\rho (r^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(r - \frac{R_1^3}{r^2} \right)$$

3^{ème} cas $r \geq R_2$

$$dq = \rho dv = \rho 4\pi r^2 dr \Rightarrow Q_{int} = \rho \iiint dv = \rho 4\pi \int_{R_1}^{R_2} r^2 dr$$

$$\text{donc } Q_{int} = \rho \frac{4}{3} \pi (R_2^3 - R_1^3)$$

$$(*) \Rightarrow E_3 = \frac{\rho \frac{4}{3} \pi (R_2^3 - R_1^3)}{4\pi r^2 \epsilon_0} \quad \text{donc } E_3 = \frac{\rho (R_2^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0 r^2}$$



2- Le potentiel électrique v(r) en tout point de l'espace.



$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}v \Rightarrow E = -\frac{dv}{dr} \quad \text{donc} \quad v = -\int E dr$$

1^{er} cas : $r < R_1$

$$E_1 = 0 \Rightarrow v_1 = C_1$$

2^{ème} cas $R_1 \leq r < R_2$

$$E_2 = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(r - \frac{R_1^3}{r^2} \right) \Rightarrow v_2 = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\int r dr - R_1^3 \int \frac{1}{r^2} dr \right) \quad \text{donc} \quad v_2 = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{r^2}{2} - R_1^3 \left(\frac{-1}{r} \right) \right) +$$

C_2

$$v_2 = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{r^2}{2} + \frac{R_1^3}{r} \right) + C_2$$

3^{ème} cas $r \geq R_2$

$$E_3 = \frac{\rho (R_2^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0 r^2} \Rightarrow v_3 = -\frac{\rho (R_2^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0} \int \frac{1}{r^2} dr \quad \text{donc} \quad v_3 = \frac{\rho (R_2^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0} \frac{1}{r} + C_3$$

Le potentiel à l'infini ($r \rightarrow \infty$) $v=0$ donc $C_3=0$ et $v_3 = \frac{\rho (R_2^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0} \frac{1}{r}$

Le potentiel est une fonction continue :

- en R_2 donc $v_3(R_2) = v_2(R_2)$

$$\frac{\rho (R_2^3 - R_1^3)}{3\epsilon_0} \frac{1}{R_2} = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{R_2^2}{2} + \frac{R_1^3}{R_2} \right) + C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{\rho R_2^2}{3\epsilon_0} + \frac{\rho R_2^2}{6\epsilon_0} - \frac{\rho (R_1^3)}{3R_2\epsilon_0} + \frac{\rho (R_1^3)}{3R_2\epsilon_0} = \frac{3\rho R_2^2}{6\epsilon_0} = \frac{\rho R_2^2}{2\epsilon_0}$$

$$\text{donc} \quad v_2 = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{r^2}{2} + \frac{R_1^3}{r} \right) + \frac{\rho R_2^2}{2\epsilon_0}$$

- en R_1 donc $v_2(R_1) = v_1(R_1)$

$$C_1 = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{R_1^2}{2} + \frac{R_1^3}{R_1} \right) + \frac{\rho R_2^2}{2\epsilon_0} \Rightarrow C_1 = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{R_1^2}{2} + R_1^2 \right) + \frac{\rho R_2^2}{2\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow C_1 = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{3R_1^2}{2} \right) + \frac{\rho R_2^2}{2\epsilon_0}$$

$$v_1 = -\frac{\rho R_1^2}{2\epsilon_0} + \frac{\rho R_2^2}{2\epsilon_0}$$



Exercice 6:

On considère comme surface de Gauss un cylindre de rayon r et de hauteur h .

A cause de la symétrie, le champ est radial et constant en tout point de la surface de Gauss.

D'après le Théorème de Gauss : $\Phi = \iint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{\Sigma Q_{int}}{\epsilon_0}$

$$\Phi = \iint \vec{E} \cdot \vec{ds} = 2 \iint \vec{E} \cdot \vec{ds}_{base} + \iint \vec{E} \cdot \vec{ds}_{lat}$$

$$\vec{E} \perp \vec{ds}_{base} \Rightarrow \iint \vec{E} \cdot \vec{ds}_{base} = 0$$

$$\vec{E} \parallel \vec{ds}_{lat}$$

$$\text{Donc : } \Phi = \iint \vec{E} \cdot \vec{ds}_{lat} = \iint E \cdot ds_{lat} = E \cdot \int ds_{lat} = E \cdot S_{lat}$$

$$\Rightarrow \Phi = E 2\pi r h = \frac{\Sigma Q_{int}}{\epsilon_0}$$

Le champ électrique

1^{er} cas $r < R_1$

$$Q_{int} = 0 \quad \text{donc } \mathbf{E}_1 = \mathbf{0}$$

2^{ème} cas $R_1 \leq r < R_2$

$$dq = \rho dv = \rho 2\pi r h dr \Rightarrow Q_{int} = \rho \iiint dv = \rho 2\pi h \int_{R_1}^r r dr$$

$$\text{donc } Q_{int} = \rho 2\pi h \left(\frac{r^2}{2} - \frac{R_1^2}{2} \right) = \rho \pi h (r^2 - R_1^2)$$

$$\text{ou } Q_{int} = \rho (\pi r^2 h - \pi R_1^2 h)$$

$$\text{donc } E_2 2\pi r h = \frac{\rho \pi h (r^2 - R_1^2)}{\epsilon_0} \quad \text{donc } \mathbf{E}_2 = \frac{\rho (r^2 - R_1^2)}{2\epsilon_0 r} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left(r - \frac{R_1^2}{r} \right)$$

3^{ème} cas $r \geq R_2$

$$dq = \rho dv = \rho 4\pi r^2 dr \Rightarrow Q_{int} = \rho \iiint dv = \rho 2\pi h \int_{R_1}^{R_2} r^2 dr \quad \text{donc } Q_{int} = \rho \pi h (R_2^2 - R_1^2)$$

$$\text{donc } E_3 2\pi r h = \frac{\rho \pi h (R_2^2 - R_1^2)}{\epsilon_0} \quad \text{donc } \mathbf{E}_3 = \frac{\rho (R_2^2 - R_1^2)}{2\epsilon_0 r}$$

1- Le potentiel électrique $v(r)$ en tout point de l'espace.

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}v \Rightarrow E = -\frac{dv}{dr} \quad \text{donc } v = -\int E dr$$

1^{er} cas : $r < R_1$

$$E_1 = 0 \Rightarrow v_1 = C_1$$

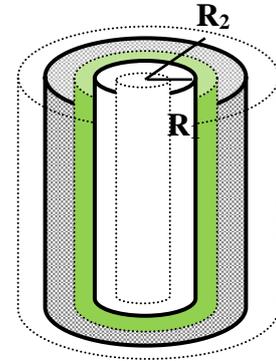
2^{ème} cas $R_1 \leq r < R_2$

$$E_2 = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left(r - \frac{R_1^2}{r} \right) \Rightarrow v_2 = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} \left(\int r dr - R_1^2 \int \frac{1}{r} dr \right) \quad \text{donc } v_2 = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} \left(\frac{r^2}{2} - R_1^2 \ln r \right) + C_2$$

3^{ème} cas $r \geq R_2$

$$E_3 = \frac{\rho (R_2^2 - R_1^2)}{2\epsilon_0 r} \Rightarrow v_3 = -\frac{\rho (R_2^2 - R_1^2)}{2\epsilon_0} \int \frac{1}{r} dr \quad \text{donc } v_3 = -\frac{\rho (R_2^2 - R_1^2)}{2\epsilon_0} \ln r + C_3$$

Exercice 7





On considère comme surface de Gauss un cylindre de rayon r et de hauteur h .

A cause de la symétrie, le champ est radial et constant en tout point de la surface de Gauss

$$\text{D'après le Théorème de Gauss : } \oint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{\sum Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$\phi = \iint \vec{E} \cdot \vec{ds} = 2 \iint \vec{E} \cdot \vec{ds}_{base} + \iint \vec{E} \cdot \vec{ds}_{lat}$$

$$\vec{E} \perp \vec{ds}_{base} \Rightarrow \iint \vec{E} \cdot \vec{ds}_{lat} = 0$$

$$\vec{E} \parallel \vec{ds}_{lat} \text{ Donc : } \phi = \iint \vec{E} \cdot \vec{ds}_{lat} = \iint E \cdot ds_{lat} = E \cdot \int ds_{lat} = E \cdot S_{lat}$$

$$\Rightarrow \phi = E 2\pi r h = \frac{\sum Q_{int}}{\epsilon_0} \text{ donc } E = \frac{\sum Q_{int}}{2\pi r h \epsilon_0}$$

1- Le champ électrique

1^{er} cas $r < R$ $dq = \lambda dl \Rightarrow Q_{int} = \lambda h$

$$E_1 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \Rightarrow E_1 = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0}$$

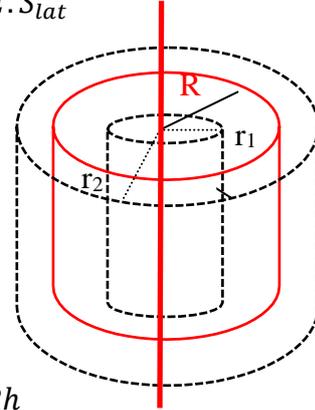
2^{ème} cas $r > R$ $Q_{int} = Q_1 + Q_2$

$$dq_2 = \sigma ds \Rightarrow Q_{int} = \sigma S = \sigma 2\pi R h \text{ donc } Q_{int} = \lambda h + \sigma 2\pi R h$$

$$\text{Donc } E_2 2\pi r h = \frac{\lambda h + \sigma 2\pi R h}{\epsilon_0} \Rightarrow E_2 = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} + \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r}$$

2- Cherchons λ pour laquelle $E_2 = 0$

$$\frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0} + \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r} = 0 \Rightarrow \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0}$$



Exercice 1 :

On prend comme surface de Gauss, une sphère de centre O et de rayon r. Par raison de symétrie le champ est radial et constant en tout point de la surface de Gauss.

$$\phi = \oint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{\sum Q_{int}}{\epsilon_0}$$

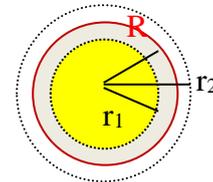
$$\vec{E} \parallel \vec{ds} \text{ Donc : } \oint \vec{E} \cdot \vec{ds} = \iint E \cdot ds = E \iint ds = E \cdot S = E 4\pi r^2 \Rightarrow E 4\pi r^2 = \frac{\sum Q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sum Q_{int}}{4\pi r^2 \epsilon_0}$$

1- Le champ électrostatique $E(r)$ en tout point de l'espace.

Nous avons 2 cas

1^{er} cas $r < R$



$$v = \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow dv = 4\pi r^2 dr$$

avec $\rho = A r^2$

$$dq = \rho dv = \rho 4\pi r^2 dr \Rightarrow Q_{int} = \iiint \rho dv = \iiint A r^2 dv = A 4\pi \int_0^r r^4 dr$$

$$\Rightarrow Q_{int} = \rho \frac{4}{5} \pi r^5$$



$$\text{donc } (*) \Rightarrow E_1 = \frac{\rho \frac{4}{5}\pi r^5}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \quad \text{donc } E_1 = \frac{\rho}{5\varepsilon_0} r^3$$

2^{ème} cas $r > R$

$$dq = \rho dv = \rho 4\pi r^2 dr \Rightarrow Q_{int} = \iiint \rho dv = \iiint A r^2 dv = A 4\pi \int_0^R r^4 dr$$
$$\text{donc } Q_{int} = \rho \frac{4}{5}\pi R^5$$

$$(*) \Rightarrow E_2 = \frac{\rho \frac{4}{5}\pi R^5}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \quad \text{donc } E_2 = \frac{\rho R^5}{5\varepsilon_0 r^2}$$