2022/2023

Chapitre 3 : Conducteurs et Condensateurs

Préparé par : Mme Nadia Bachir et Mme Hadjou Belaid Zakia

Première année LMD MATHEMATIQUE

Université De Tlemcen
Faculté Des Sciences

Année Universitaire 2022/2023
Département De Mathématiques

1ERE ANNEE LMD-M

COURS D'ELECTRICITE

Chapitre 3 : Conducteurs et Condensateurs

Préparé par : Mme Nadia Bachir et Mme Hadjou Belaid Zakia

Sommaire

1ère partie : Les conducteurs النواقل

2ème partie : Les condensateurs المكثفات

1ère partie : Les conducteurs النواقل

1. Définition

Un conducteur électrique est un milieu dans lequel, il y a des charges positives et négatives qui peuvent se déplacer sous l'action d'un champ électrique. Lorsqu'un tel matériau est placé dans un champ électrique, les électrons libres se déplacent dans une direction opposée au champ. Ces matériaux sont appelés conducteurs.

Exemple : l'eau, les métaux…..

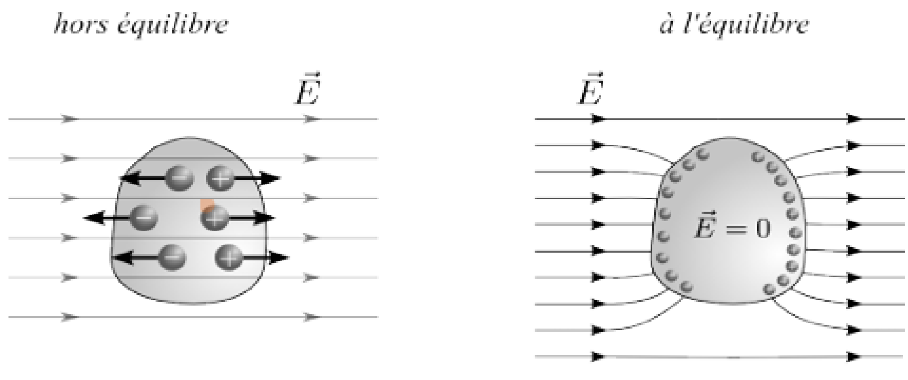
Une autre classe de matériaux s'appelle les isolants (مادة عازلة) dans lesquels tous les électrons sont étroitement liés à leurs atomes ou molécules respectifs. En effet, il n'y a pas d'électrons libres.

Exemple : le bois, le plastique…..

2. Conducteur en équilibre électrostatique

Un conducteur est dit en équilibre électrostatique si toutes les charges sont immobiles (aucun déplacement de charges dans ce milieu).

Les charges dans un conducteur neutre placé dans un champ électrostatique uniforme se déplacent pour annuler le champ dans le conducteur. Le champ extérieur en est modifié.



2.1. Propriétés d'un conducteur en équilibre électrostatique isolé

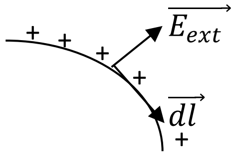
a- Le champ électrique

Un équilibre électrostatique impose aux charges à l'intérieur d'un conducteur d'être immobile elle ne sont donc soumises à aucune force. Cette condition se traduit par une force électrostatique de chaque charge comme étant nulle. $\vec{F} = q\,\vec{E} = \vec{0}$

donc le champ électrique $\overrightarrow{E_{int}} = \vec{0}$

Remarque : le champ électrique est normal a la surface d'un conducteur en équilibre

b- Le potentiel électrique



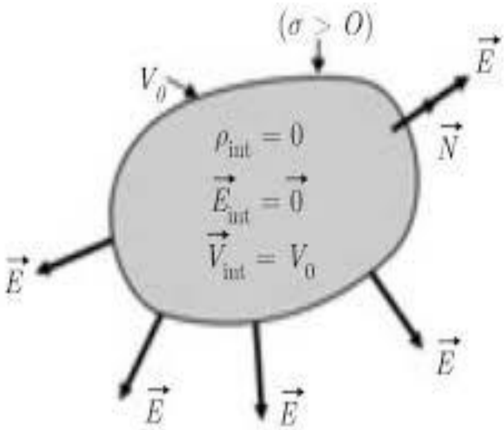
On a $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}v \Rightarrow E = -\frac{dv}{dl}$ et $\overrightarrow{E_{int}} = \vec{0}$ donc $V_A - V_B = dV = 0$ et V= Constante

On peut conclure que le conducteur en équilibre constitue un volume équipotentiel. C'est-à-dire tous les points à l'intérieur du conducteur ont le même potentiel par la suite **la surface du conducteur est équipotentiel.**

c- Répartition des charges

on a $\emptyset = \oiint \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$ TG et $\overrightarrow{E_{int}} = \vec{0}$ donc $Q_{int} = 0$

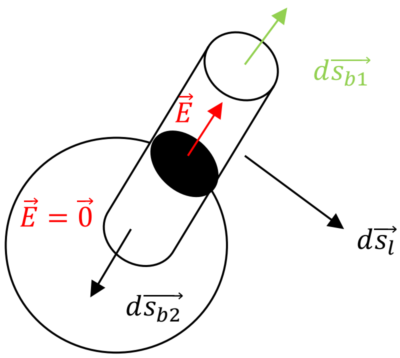
On dit alors que la charge électrique totale à l'intérieur du conducteur est nulle, et la charge se localise sur la surface du conducteur (distribution surfacique).



2.2. Champ électrique au voisinage immédiat d'un conducteur en équilibre électrostatique (Théorème de Coulomb)

Soit un conducteur de forme quelconque; on calcule le champ au voisinage de la surface externe du conducteur. On applique le Théorème de Gauss

On choisit comme surface de Gauss un cylindre coupant la surface du conducteur.



On a $\quad \emptyset = \quad \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$

$$\emptyset = \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds_{\,base\ 1}} + \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds_{lat}} + \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds_{\,base\ 2}}$$

$$\vec{E}.\overrightarrow{ds_{\,base\ 1}}\ car\ \overrightarrow{E_{int}} = \vec{0}$$

$\vec{E} \perp \overrightarrow{ds_{\,lat}} \Longrightarrow \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds_{lat}} = 0$

$\vec{E} \parallel \overrightarrow{ds_{base\ 2}}$ Donc : $\emptyset = \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds_{base}} = \iint E.ds_{base} = E.\int ds_{base} = E.S_{base}$

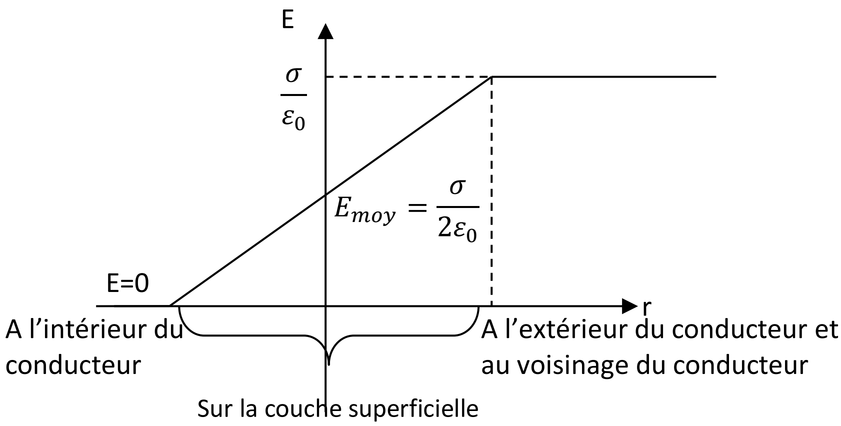
$$\emptyset = E.S_{base} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$dq = \sigma ds \Rightarrow Q_{int} = \sigma \iint ds = \sigma S_{base} \Rightarrow E.S_{base} = \frac{\sigma S_{base}}{\varepsilon_0}$ donc $\boldsymbol{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$

Enoncé du Théorème de Coulomb

Le champ électrique crée au voisinage immédiat de la surface d'un conducteur en équilibre électrostatique portant une distribution des charges réparties en surface est donné par :

$\vec{E} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}\,\vec{n}$ avec $\vec{n}$: vecteur normal à la surface dirigé vers l'extérieur.



Résumé :

Corps isolé et neutre: la charge électrique se conserve $\Delta Q=0$

Corps conducteur en équilibre électrostatique : Qint=0 , $E_{int}=0$, $E_{ext}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, $V_{int}=V_0$, $Q_{ext}=\sigma.dS$

3. Capacité d'un conducteur en équilibre électrostatique

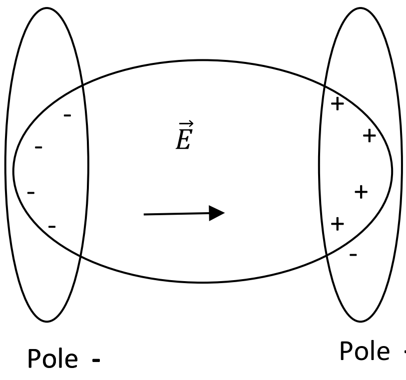
Pour un conducteur équilibre électrostatique, il y a un lien entre le potentiel auquel ce conducteur se trouve et la charge qui est répartie sur sa surface. L'expérience montre que le rapport Q/V est une constante. On l'appelle capacité propre du conducteur ; noté **C=Q/V**
L'unité de capacité est **le Farad**, symbole **F**.

4. Energie potentielle d'un conducteur en équilibre électrostatique

Un conducteur en équilibre électrostatique portant la charge Q, soit V son potentiel et C sa capacité, sa énergie potentiel s'écrie par : $\mathbf{E_p}=\frac{1}{2}\boldsymbol{Q.V}=\frac{1}{2}.\boldsymbol{C.V^2}=\frac{1}{2}.\frac{\boldsymbol{Q^2}}{\boldsymbol{C}}$ (Joule)

5. Phénomène d'Influence électrostatique entre conducteurs

Si on place un conducteur dans un champ électrique, les charges positive vont dans le même sens du champ et les charges négatives vont dans le sens inverse et il y a la création de 2 pôles un positive et un autre négative.



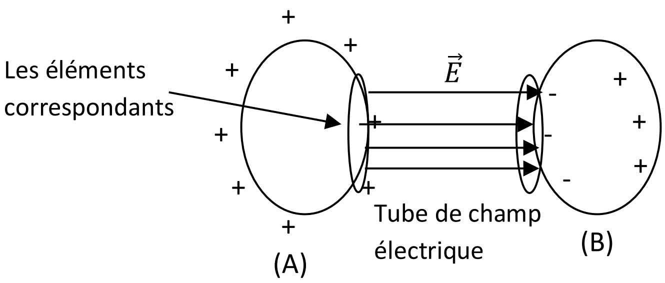
Il existe deux types de phénomène d'influence électrostatique en présence de deux conducteurs chargés.

5.1. Influence partielle

Soit deux conducteurs ; un conducteur A chargé positivement et un conducteur B isolé et neutre. En approchant les deux conducteurs, les charges négatives dans le conducteur B se déplacent pour se rapprocher du conducteur A et les charges positives vont de l'autre coté.

Les charges portées par les deux conducteurs qui font face sont égales et de signes opposés

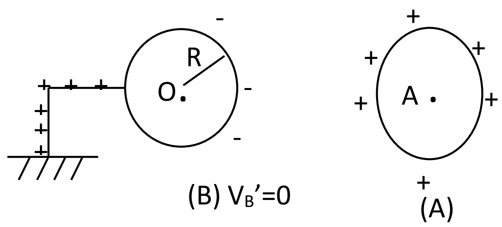
La charge du conducteur B reste la même; il y a juste une modification dans la répartition des charges.



Théorème des éléments correspondants : Théorème de Faraday

Les charges portées par les deux éléments de surface correspondants qui font face sont égales et de signes opposés.

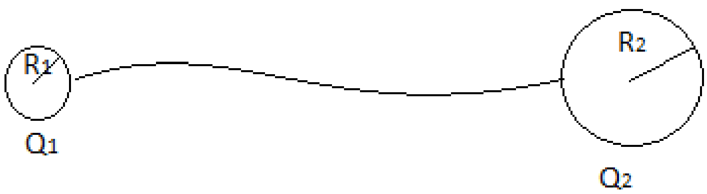
Remarque : Si le conducteur B est relié à la masse, les charges positives s'écoulent vers la masse, la charge dans le conducteur B sera $\mathbf{Q'_B}$ est négative due à l'influence partielle.



Cas particulier : Conducteur de géométrie irrégulière

Lorsque deux conducteurs chargés sont mis en contact ou reliés par un fil conducteur, il y transfert de charge en les conducteurs. Si ces deux conducteurs ont des charges Q_1 et Q2 et sont au potentiel V_1 et V_2 avant contact, leurs charges et potentiels deviendront après contact Q'_1 , Q'_2 , V'_1 et V'_2 ils seront au même potentiel donc $V'_1 = V'_2$.

Et la charge doit être conservée $Q_1 + Q_2 = Q'_1 + Q'_2$

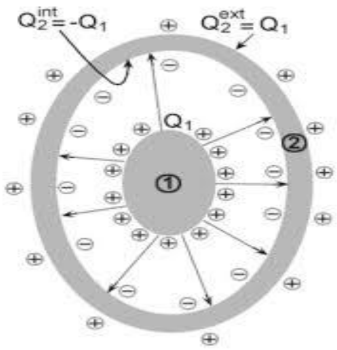


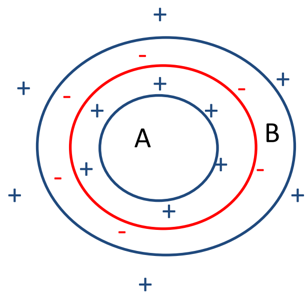
5.2. Influence Totale

C'est le cas où le conducteur A est complètement entouré par le conducteur B. On dit que le conducteur A est le conducteur influençant et le conducteur B est le conducteur influencé.

On dit que le conducteur influençant A va influencer le conducteur B et il y aura l'apparition de charges négatives sur la couche interne de B et des charges positives sur la couche externe.

$Q_{B\,int} = -Q_A$ et $Q_{B\,ext} = Q_A$



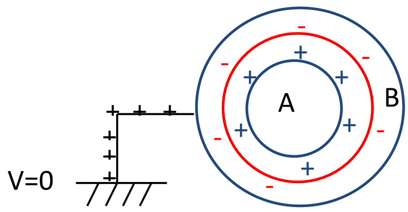


Remarques 1: Pour la couche externe de B nous avons 3 cas possibles:

1- B isolé et neutre $\mathbf{Q_{B\,ext} = +Q_A}$

2- B isolé et a une charge **Q' initiale Alors** $\mathbf{Q_{B\,ext} = Q_A + Q'}$

3- B relié au sol **V=0 et** $\mathbf{Q_{B\,ext} = 0}$ car les charges positives s'écoulent vers la masse



Remarque 2 : un système de deux conducteurs en équilibre électrostatique en influence totale forme ce qu'on appelle un condensateur (مكثفة).

2ème partie : Les condensateurs المكثفات

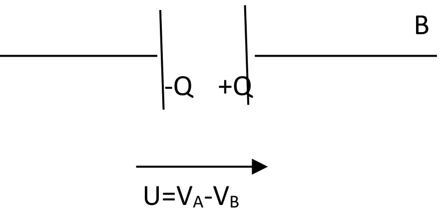
1. Définitions

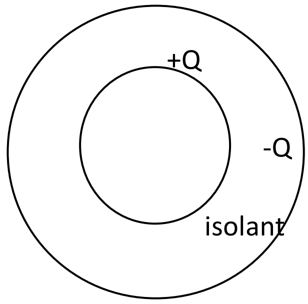
Un condensateur est un ensemble de deux conducteurs sous influence totale, les deux conducteurs sont appelés les armatures du condensateur, **la charge du condensateur** est celle de son armature interne Q (Coulomb).

On a V_A le potentiel de l'armature interne et V_B le potentiel de l'armature externe,

$U= V_A- V_B$ est la différence du potentiel d'un condensateur (son unité est le **volt**).

Son symbole est :





La charge d'un condensateur

s'écrit part : **$Q= C\,U$**

avec C est **la capacité du condensateur** son symbole est C et son unité est ***Farad*** et dépend de la géométrie du condensateur et de l'isolant se trouvant entre les deux armatures.

Remarque :

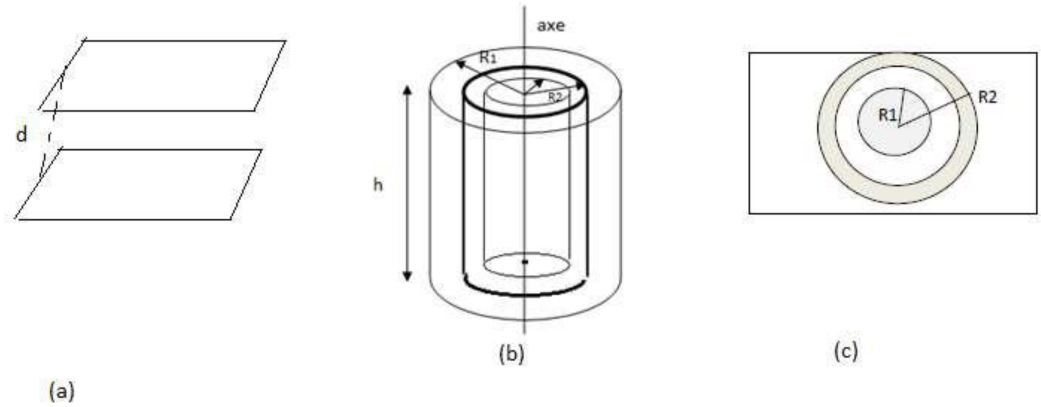
- l'isolant (matériau placé entre les armatures) a pour rôle d'augmenter la capacité d'un condensateur.
- La capacité d'un condensateur dépond de la géométrie des armatures.
- La capacité **C** est toujours positive.

Les types des condensateurs :

Il existe trois types de condensateur ; sphérique, cylindrique et plan :

- Les condensateurs plan ; sont constitués par deux plaques parallèles de surface S chaqu'une, séparées par une petite distance d.

- Les condensateurs cylindriques, sont composés par un cylindre conducteur de rayon R_1 et de longueur h, entouré d'un cylindre creux conducteur, de rayon R_2 et de même longueur h. Cet ensemble est appelée un câble coaxial.
- Les condensateurs sphérique sont composés d'une sphère creuse conductrice de rayon R_2 et d'une sphère conductrice de rayon R_1 au centre de la sphère creuse.



Les différents types des condensateurs (a) plan, (b) cylindrique et (c) sphérique

2. Méthode de calcul de la capacité d'un condensateur

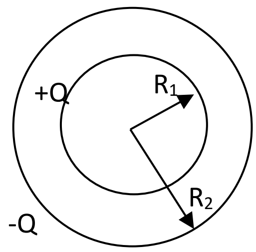
2.1. Capacité d'un condensateur sphérique

On considère deux sphères conductrices concentriques sous influence total l'une de charge +Q et l'autre de charge –Q.

Pour chercher la capacité de ce condensateur ainsi formé, on cherche d'abord le champ électrique en utilisant le Théorème de Gauss.

1ère étape : Calcul du champ E

Théorème de Gauss : on choisit comme surface de Gauss dans ce cas une sphère de centre O et de rayon r. Par raison de symétrie le champ est radial et constant en tout point de la surface de Gauss.



$$\emptyset = \oiint \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$\overrightarrow{E} \,//\, \overrightarrow{ds}$ Donc : $\oiint \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \iint E.ds = E \iint ds = E.S = E4\pi r^2 \Rightarrow \boldsymbol{E4\pi r^2} = \frac{\boldsymbol{\sum Q_{int}}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}$

On s'intéresse au champ entre les armatures donc :

Pour $R_1 < r < R_2$: $Q_{int} = Q \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$

2eme étape : Calcul du potentiel V

On a : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad} v \Rightarrow E = -\frac{dv}{dr}$ donc $v = -\int E dr$

Pour $R_1 < r < R_2$: $\int_{V_1}^{V_2} dV = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} \Rightarrow V_2 - V_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2}\right)$

$$\Rightarrow V_2 - V_1 = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right)$$

$$U = V_1 - V_2 \Rightarrow U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right)$$

3eme étape : Calcul de la capacité

La charge $Q = C\,U \Rightarrow C = \frac{Q}{U}$ $\quad donc \quad$ $\boldsymbol{C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}}$

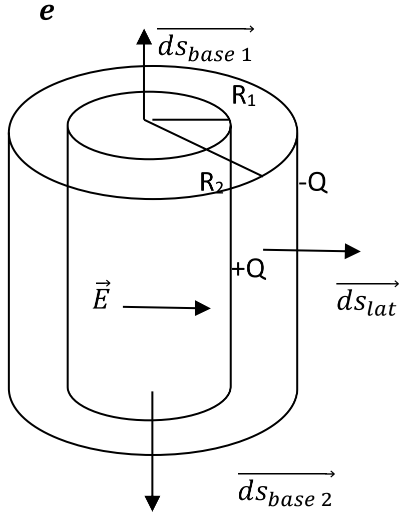
Dans le cas d'un condensateur sphérique ou les armatures sont très proches on a :

$R_2 \approx R_1$ et $e = R_2 - R_1$

$C = \frac{4\pi\varepsilon_0\ R^2}{e} = \frac{4\pi\ R^2}{e}\varepsilon_0 \quad et \quad s = 4\pi\ R^2$ donc $\boldsymbol{C = \frac{\varepsilon_0 s}{e}}$

2.2. Capacité d'un condensateur cylindrique

On considère deux cylindres conducteurs coaxiaux sous influence total l'un de charge +Q et l'autre de charge –Q.



1ere étape : Calcul du champ E

La surface de Gauss est un cylindre de rayon r et de hauteur h. A cause de la symétrie, le champ **radial et constant** dans la surface de Gauss.

D'après le Théorème de Gauss : $\emptyset = \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$

$$\emptyset = \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds_{\ base\ 1}} + \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds_{lat}} + \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds_{\ base\ 2}}$$

$\overrightarrow{E} \perp \overrightarrow{ds_{\ base}} \Rightarrow \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds_{lat}} = 0$

$\vec{E} \parallel \overrightarrow{ds_{lat}}$ Donc : $\emptyset = \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds_{lat}} = \iint E.ds_{lat} = E.\int ds_{lat} = E.S_{lat}$

Donc $\emptyset = E\ 2\pi r\mathrm{h} = \frac{Qi}{\varepsilon_0}$

Pour $R_1 < r < R_2$ $\quad Q_{int} = Q \Rightarrow E = \frac{Q}{2\pi h r \varepsilon_0}$

2^eme^ étape : Calcul du potentiel V

Le potentiel : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}v \Rightarrow E = -\frac{dv}{dr}$ donc $v = -\int E dr$

Pour $R_1 < r < R_2$ $\quad \int_{V_1}^{V_2} dV = -\frac{Q}{2\pi h\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r} \Rightarrow V_2 - V_1 = -\frac{Q}{2\pi h\varepsilon_0}(lnR_2 - lnR_1)$

$$\Rightarrow V_2 - V_1 = -\frac{Q}{2\pi h\varepsilon_0}\left(ln\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$U = V_1 - V_2 \Rightarrow U = \frac{Q}{2\pi h\varepsilon_0}\left(ln\frac{R_2}{R_1}\right)$$

3^eme^ étape : Calcul de la capacité

La charge est $Q = C\ U \Rightarrow la\ capacité\ sera\ \ C = \frac{Q}{U}$ $\quad donc\ \boldsymbol{C = 2\pi h\varepsilon_0\left(ln\frac{R_1}{R_2}\right)}$

2.3. Capacité d'un condensateur plan

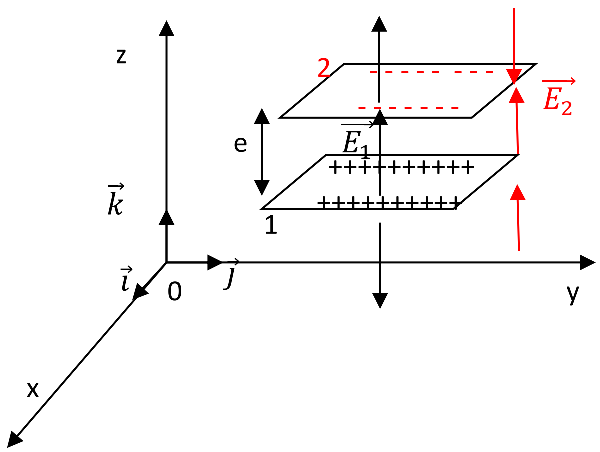
Ce condensateur est composé de deux plans chargés disposée parallèlement espacés d'une épaisseur e, la distribution de charge dans les deux armatures est surfacique.

1^ere^ étape : Calcul du champ E

Supposons que C_1 a une charge +Q et C_2 a une charge –Q

Dans la première armature: $\overrightarrow{E_1} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k}$

Dans la deuxième armature: $\overrightarrow{E_2} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-\vec{k}) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{k}$



Entre les deux armatures $\vec{E} = \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2}$

$$\vec{E} = \left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)\vec{k} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{k}$$

2eme étape : Calcul du potentiel

Le potentiel : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}v\,; E\ est\ suivant\ (oz) \Rightarrow E = -\frac{dv}{dz}$ donc $v = -\int Edz$

$$\int_{V_1}^{V_2} dV = -\int_{z_1}^{z_2} Edz \Rightarrow V_2 - V_1 = -E(z_2 - z_1) = -E.e$$

U= V_1-V_2 = E.e = $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}.e$

3eme étape : Calcul de la capacité

Il y a une distribution surfacique des charges : Q = σ.dS alors σ =Q/S donc $U = \frac{e.Q}{S.\varepsilon_0}$

On a Q=C. U donc $\mathbf{C} = \frac{S.\varepsilon_0}{e}$

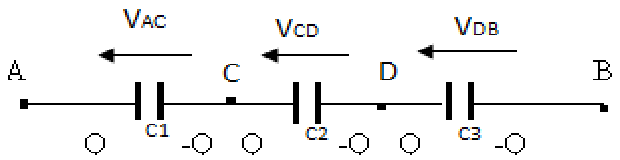
3. Association des condensateurs

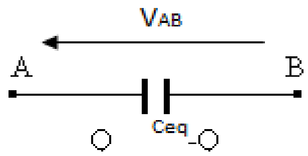
On a deux types de groupement des condensateurs :

3.1. Groupement en série ربط على التسلسل

Dans un branchement en série de n condensateurs, tous les condensateurs emmagasinent la même charge Q à cause de phénomène d'influence totale entre les armatures des condensateurs.

$Q_{eq}=Q_{C1}=Q_{C2}=Q_{C3}=\ldots\ldots.=Q_{Cn}$





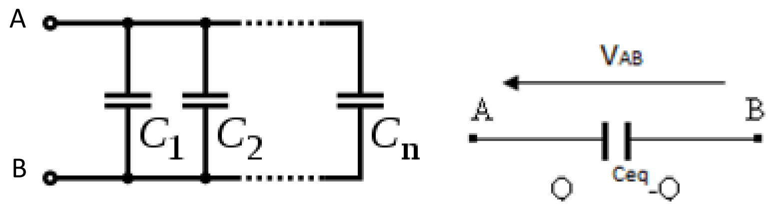
D'autre part la tension entre l'ensemble des condensateurs égale à la somme des tensions des différents condensateurs (branchement en série).

$U=V_A-V_B=U_1+U_2+\ldots.+U_n=\frac{Q}{C_{eq}}$

$=(V_A-V_1)+(V_1-V_2)+(V_2-V_3)+\ldots\ldots.+(V_n-V_B)=\frac{Q}{C_1}+\frac{Q}{C_2}+\cdots+\frac{Q}{C_n}=\frac{Q}{C_{eq}}$

Alors $U=V_A-V_B=Q\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_i}$ et $\frac{1}{C_{eq}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_i}$

3.2. Groupement en parallèle ربط على التفرع



Dans un branchement en parallèle de n condensateurs, tous les condensateurs ont la tension U et la charge totale est la somme des charges des différents condensateurs.

$U=U_1=U_2=\ldots\ldots\ldots=U_n$

et $Q_{eq}=Q_{C1}+Q_{C2}+Q_{C3}+\ldots\ldots.+Q_{Cn}=C_{eq}\,U$

$Q_{eq}=C_1U+C_2U+\ldots\ldots.+C_nU=C_{eq}\,U$

alors $Q_{eq}=(\sum_{i=1}^{n}C_i).U=C_{eq}\,U$ alors $\mathbf{Ceq}=\sum_{i=1}^{n}C_i$

4. Energie d'un condensateur

L'énergie potentielle d'un condensateur de charge Q et de capacité C soumis à une différence de potentiel (ddp) U est : $E_p=\frac{1}{2}Q.U=\frac{1}{2}.C.U^2=\frac{1}{2}.\frac{Q^2}{C}$ (Joule)

Exercice d'application :

Soit le montage au-dessous.

1- Sachant que le condensateur C_1 porte la charge $Q_1=10\mu C$, quelle sera la ddp V_{AD} entre les points A et D ?

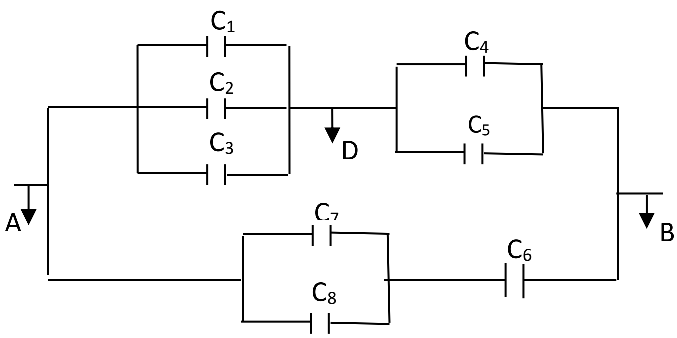
2- Déterminer les charges Q_2 et Q_3 des condensateurs C_2 et C_3 respectivement.

3- La ddp entre B et D étant égale à 2V, calculer les charges Q_4 et Q_5 des condensateurs C_4 et C_5.

4- Quelle est la capacité équivalente C_{eq} de tout le montage.

5- Calculer l'énergie emmagasinée par le condensateur C_1.

On donne : $C_1=4\mu F$, $C_2=3.5\mu F$, $C_3=2.5\mu F$, $C_4=C_5=C_7=C_8=5\mu F$, $C_6=10\mu F$.



<u>Le corrigé:</u>

1. $Q_{C1}=C_1U_{AD}\Rightarrow U_{AD}=\frac{Q_{C1}}{C_1}=\frac{10}{4}\Rightarrow U_{AD}=2.5\,Volt$
2. $Q_{C2}=C_2U_{AD}=3.5x2.5=8.75\mu c$ $\quad Q_{C3}=C_3U_{AD}=2.5x2.5=6.25\mu c$

3. $U_{BD}=2\,Volt$

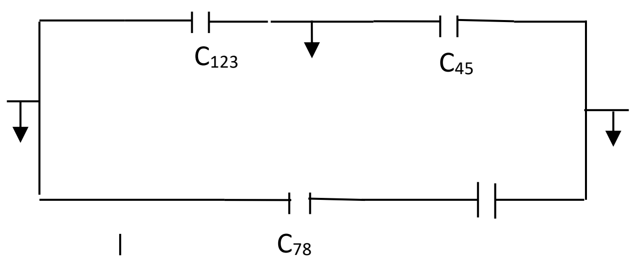
$Q_{C4}=C_4U_{BD}=5x2=10\mu C$ et $Q_{C5}=C_5U_{BD}=5x2=10\mu C$

4. Calculons C_{eq}

$C_{123}=C_1+C_2+C_3=4+3,5+2,5=10\mu F$

$C_{45}=C_4+C_5=5+5=10\mu F$

$C_{78}=C_7+C_8=5+5=10\mu F$



$\frac{1}{C_{eq1}} = \frac{1}{C_{123}} + \frac{1}{C_{45}} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10} \Rightarrow C_{eq1} = 5\mu F$ C_6

$$\frac{1}{C_{eq2}} = \frac{1}{C_{78}} + \frac{1}{C_6} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{10} \Rightarrow C_{eq2} = 5\mu F$$

$C_{eq}=C_{eq1}+C_{eq2}=5+5=10\ \mu F$

5. L'énergie stoquée dans le condensateur C_1

   $E_{C1} = \frac{1}{2} C_1 U_{AD}^2 = \frac{1}{2} 4\ (2,5)^2 = 12,5\mu j$