Chapitre 2: Analyse Combinatoire

I. Définition L' Analyse combinatoire est la théorie mathématiques de dénombrement,

II. Prinipe fondamentale de dénombrement Soient $A_1, A_2, \ldots, A_k$, k ensembles de cardinals respectivement $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Alors, le nombre de possibilités de choisir un éléments de chaque ensemble est m $n_1 * n_2 * \ldots * n_k$

Exemple: Si l'ont veut acheter un système informatique constitué de trois composantes: un ordinateur, un écran et une imprimante, et si on a le choix entre trois marques d'ordinateurs, deux marques d'écrans et quatre marque d'imprimantes, alors on peut acheter 3x2x4 systèmes différents.
On dit donc qu'on a 24 dispositions possibles pour les trois composantes (i.e. 24 manières de les placer).

Notamment, on distingue trois types de dispositions: les arrangements, les permutations et les combinaisons,

III. Les arrangements

a) Arrangements sans répétition: On appelle arrangement sans répétition tout ensemble de k éléments choisis parmi n éléments l'un après l'autre sans remise (disposition ordonnée). Le nombre de ces arrangements est

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Exemples:

1) Le nombre de mots de 5 lettres différentes (avec ou sans signification) formés avec les 26 lettres de l'alphabet correspond au nombre d'arrangements sans répétitions possibles avec $k=5, n=26$.
2) Le nombre de comités (président, secrétaire, caissier) de 3 membres que l'on peut former à partir de 8 personnes correspond au nombre d'arrangements répétitions possibles avec $k=3, n=8$
3) Une séquence d'ADN est constituée d'un enchaînement de 4 nucléotides [A (Adénine), C (Cytosine), G (Guanine) et T (Thymine)]. Il existe différents arrangements possibles de deux nucléotide (dinucléotide) avec $k=2, n=4$.

b) Arrangements avec répétition: C'est tout ensemble de k éléments choisis parmi n éléments l'un après l'autre avec remise. Le nombre de ces arrangements est

$$\tilde{A}_n^k = n^k$$

Exemples:

1) Concernant l'exemple de la séquence d' ADN, le nombre dinucléotides attendu si l'on fait l'hypothèse qu'une base peut être observée plusieurs fois dans la séquence (ce qui correspond à la réalité) est donc \$ 4^2 =16 dinucléotides possibles.
2) Combien de numéros de téléphone composés de 7 chiffres existe-t-il ? 10^7
3) De combien de manière peut-on répartir 10 personnes sur trois guichés ? 3^{10}
Remarque: dans le cas d'un arrangement avec répétition il est possible d'avoir $k > n$

IV. Les permutations

a) Permutations sans répétition: C'est un arrangement sans répétition avec . Le nombre de ces permutations est

$$P_n = n!$$

Exemples:

1) Dans un train à 10 wagons différents, il y a 10 ! manières de le constituer. En supposant que la locomotive se trouve toujours en tête).
2) Il y a 7 ! façons différents pour répartir un groupe de 7 personnes sur une rangée de 7 chaises.

b) Permutations avec répétition: C'est un arrangement de n éléments divisés en k classes de nombres d'éléments $n_1, n_2, \ldots, n_k$ respectivement . Le nombre de ces permutations est

$$\tilde{P}_n = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$$

Exemples:

1) Une classe comporte 12 élèves, de combien de manières ces 12 élèves peuvent ils subir trois examens

différents, sachant que 4 élèves subissent le même examen? $\tilde{P}_{12}=\frac{12!}{4!4!4!}$.

2) Combien d'anagrammes peut-on former avec les lettres du mot « excellence » ? $\tilde{P}_{10}=\frac{10!}{4!2!2!1!1!}$.

V. Les combinaisons

a) Combinaisons sans répétition: Une combinaison de k éléments choisis parmi n est une disposition non ordonnée de ces k éléments où chacun figure au plus une fois. Le nombre de ces combinaisons est

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exemples:

1) La formation d'une délégation de 5 personnes parmi un groupe de 50 constitue une combinaison avec $k=5$ et $n=50$; $C_{50}^5=\frac{50!}{5!45!}=2118760$ \\
2) Soient les nombre 1, 2 , 3, 4. En choisissant 2 nombres, on peut obtenir 6 combinaisons, en effet p=2 et n=4; $C_4^2=\frac{4!}{2!2!}$.

b) Combinaisons avec répétition: Une combinaison avec répétition de k éléments est un groupement dans un ordre quelconque de n éléments, ces éléments n sont pas forcément deux à deux distincts et k n'est plus forcement inférieur ou égal à n . Le nombre de ces combinaisons est

$$\tilde{C}_n^k=\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}$$

Exemples:

1) 12 délégués d'une association doivent élire un représentant au conseil d'établissement. Deux candidats se présentent ; tous les délégués doivent voter pour l'un ou pour l'autre, on veut déterminer le nombre de votes possibles, c'est le nombre de combinaison avec répétition $n=2, k=12$: $\tilde{C}_2^{12}=\frac{13!}{12!1!}$
2) Le nombre de groupes de 9 lettres, avec répétition, que l'on peut former avec les 3 lettres a, b, c est $\tilde{C}_3^9=\frac{11!}{9!2!}$