Chapitre 4: Variables aléatoires réelles

I. Généralité Dans de nombreuses expériences aléatoires, on n'est pas intéressé directement par le résultat de l'expérience, mais par une certaine fonction de ce résultat. Étant définie sur l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire, cette fonction est telle qu'il soit possible de déterminer la probabilité pour qu'elle prenne une valeur donnée ou qu'elle prenne une valeur dans un intervalle donné. On la nomme variable aléatoire.

Exemples.

(1) Lors d'un lancer de deux dés, on peut ne s'intéresser uniquement qu'à la somme des résultats des deux dés: $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$^2.

(2) On lance une pièce de monnaie trois fois. Alors $\Omega_2 = \{PPP ; PPF ; PFP ; FPP ; PFF; FPF; FFP; FFF\}$ et on s'intéresse au nombre de "Face" obtenus.

Définition: Soit $(\Omega, \mathcal{C})$ un espace probabilisable. On appelle variable aléatoire réelle (ou v.a.r) sur $(\Omega, \mathcal{C})$ toute application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{C}$

Notation:

- On note $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par la variable X.
- Si $I \subset \mathbb{R}$, $(X \in I)$ est l'événement $\{\omega \in \Omega ; X(\omega) \in I\}$.
- Si $a \in \mathbb{R}$, $(X = a)$ est l'événement $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = a\}$; $(X \leqslant a)$ est l'événement $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant a\}$ et $(X \geqslant a)$ est l'évènement $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \geqslant a\}$.

Exemples.

(1) Dans le premier exemple concernant le jet de deux dés et où X désigne la somme des deux résultats on a:

$$X(\Omega_1) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}.$$

(2) Dans le deuxième exemple concernant le jet d'une pièce de monnaie trois fois X désigne nombre de "Face" obtenus on a:

$$X(\Omega_2) = \{0, 1, 2, 3\}$$

II. Loi d'une variable aléatoire réelle Une variable aléatoire est caractérisée par l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre et par l'expression mathématique de la probabilité de ces valeurs. Cette expression s'appelle **la loi de probabilité** (ou **distribution de probabilité**) de la variable aléatoire.

Soit la tribu de $\mathbb{R}$, notée $B_{\mathbb{R}}$,engendrée par les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et soit $(\Omega, \mathcal{C})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{C})$.

Définition: On appelle loi de X l'application
$$P_X : \begin{array}{rcl} B_{\mathbb{R}} & \longrightarrow & [0; 1] \\ A & \longrightarrow & P(X \in A) \end{array}$$

L'application P_X associe donc à une partie de $\mathbb{R}$ la probabilité que X y prenne ses valeurs.

☞La loi d'une variable aléatoire est une probabilité sur ($\mathbb{R}$, $B_{\mathbb{R}}$).

☞La loi sera la principale information dont on disposera sur une variable aléatoire, l'univers Ω pouvant être inconnu ou implicite.

III. Espérance et variance: Une loi de probabilité peut être caractérisée par certaines valeurs typiques telle que **l'espérance** et **la variance,**

L'espérence: d'une variable aléatoire $E(X)$ correspond à la moyenne des valeurs possibles de X pondérées par les probabilités associées à ces valeurs. C'est l'équivalent de la **moyenne arithmétique**.

Propriétés:

- si X et Y admettent une espérance, alors il en est de même de $X+Y$ et $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$;
- si X admet une espérance, alors il en est de même de aX et $E(aX) = aE(X)$;
- si $X \geq 0$, alors $E(X) \geq 0$.

La variance: d'une variable aléatoire $V(X)$ est l'espérance mathématique du carré de l'écart à l'espérance mathématique: $V(X) = E([X - E(X)]^2)$. On peut également définir l'écart-type par $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Propriété: • Si X admet une variance, alors, pour tous réels a, b, la v.a. $aX + b$ admet une variance et $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

☞ Une variable aléatoire est dite centrée si son espérance est nulle et réduite si sa variance vaut 1.

☞La variable aléatoire $X^* = \dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est appelée variable aléatoire centrée-réduite associée à X.

III. Fonction de répartition

Définition: Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{C}, P)$. On appelle fonction de répartition de X la fonction $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0; 1]$
$x \longrightarrow P(X \le x)$.

La fonction de répartition caractérise la loi d'une variable aléatoire, c'est à dire qu'elle contient toute l'information caractérisant la loi de la v.a.

***Propriétés de la fonction de répartition:** Soit X une v.a.r sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{C}, P)$ de fonction de répartition F_X . Alors,

(i) F_X est croissante;
(ii) $\lim_{x\to-\infty} F_X(x)=0$, $\lim_{x\to+\infty} F_X(x)=1$;
(iii) F_X est continue à droite en tout point;
(iv) Si $a \le b$, alors . $P(a < X \le b) = F_X(b) - F_X(a)$

II. Variables aléatoire discrètes et continues

***variable aléatoire discrète:**

Définition: Une variable aléatoire X est dite discrète si ses valeurs appartiennent à un ensemble fini ou dénombrable c-à-d si ses valeurs peuvent s'écrire sous la forme d'une liste indexée par $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$)

$$X(\Omega) = \{x_0, x_1, x_2, x_3, ...\} = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}.$$

Exemples.

(1) Dans l'exemple concernant le jet d'une pièce de monnaie trois fois et où X désigne nombre de "Face" est une variable discrète ayant ses valeurs dans l'ensemble fini $X(\Omega_2) = \{0,1,2,3\}$.
(2) Si on lance la pièce jusqu'à l'obtention du premier Face. Alors, la variable aléatoire X qui compte le nombre de lancers nécessaires est une variable aléatoire discrète, elle prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

☞Si $\{x_i\}_i$ sont les valeurs prises par X , alors la famille d'événement $\{(X = x_i)\}_i$ forme un système complet et en particulier

$$\Sigma P(X = x_i) = 1 \quad .$$

☞La loi d'une variable aléatoire discrète est la donnée de la suite des couples $\{(x_i, P(X = x_i))\}_i$.

Exemple: Dans le premier exemple concernant le jet de deux dés et où X désigne la somme des deux résultats, la loi de X est donnée par :

$X = x_i$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\sum$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

☞La définition de fonction de répartition ne change pas $F_X(t) = P(X \le t), (t \in \mathbb{R})$. On insiste une fois de plus sur le lien entre la loi de X et sa fonction de répartition, qu'on présente à nouveau via la proposition suivante.

Proposition: Soit X une variable aléatoire discrète. On suppose que les valeurs de X sont rangées dans l'ordre croissant $x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$. Alors, pour tout entier $k \ge 2$,

$$P(X = x_k) = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1}).$$

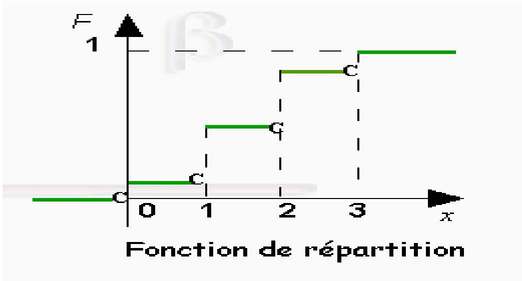
Par conséquent, la fonction F_X est constante sur chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}[$. La fonction F_X est donc constante par morceaux et présente des sauts en chaque point x_k . L'amplitude du saut en xk est égale à $P(X = x_k)$.

Exemple. Dans le deuxième exemple concernant le jet d'une pièce de monnaie trois fois X désigne nombre de "Face", la loi de X est donnée par :

$X = x_i$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Sa fonction de répartition ainsi que sont graphe sont donnés par :

$$F_{(x)}=\begin{cases} 0 & si\, x<0 \\ \frac{1}{8} & si\, 0\leq x<1 \\ \frac{1}{8}+\frac{3}{8} & si\, 1\leq x<2 \\ \frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8} & si\, 2\leq x<3 \\ \frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8} & si\, x\geq 3 \end{cases}$$



Espérance: Soit X une variable aléatoire discrète, de loi $\{(x_k, P(X=x_k))\}_k$. On dit que X admet une espérance si la série $\sum p_k x_k$ est absolument convergente. Auquel cas, cette espérance se note $E(X)$ et vaut

$$E(X)=\sum_{k=0}^{+\infty} p_k x_k.$$

Exemple: dans l'exemple précédent, on a

$$E(X)=\frac{1}{8}*0+\frac{3}{8}*1+\frac{3}{8}*2+\frac{1}{8}*3=\frac{5}{4} \quad \text{et} \quad V(X)=\frac{1}{8}*0^2+\frac{3}{8}*1^2+\frac{3}{8}*2^2+\frac{1}{8}*3^2-\frac{5}{4}=\frac{3}{4}$$

*variable aléatoire continu:

Définition: Une variable aléatoire X est dite continue si elle peut prendre toute ses valeurs dans un intervalle donné. Dans ce cas on a

$P(X\leq t)=P(X<t)$

Fonction densité de probabilité Pour une variable aléatoire continue, la probabilité associée à l'événement $\{X=a\}$ est nulle, car il est impossible d'observer exactement cette valeur. On considère alors la probabilité que la variable aléatoire X prenne des valeurs comprises dans un intervalle $[a,b]$ tel que $P(a\leq X\leq b)$. Lorsque cet intervalle tend vers 0, la valeur prise par X tend alors vers une fonction que l'on appelle **fonction densité de probabilité** ou **densité de probabilité**. C'est une application continue par morceaux :

$$\begin{aligned} f \quad : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x) \end{aligned}$$

telle que: (1) $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)\geq 0$

(2) $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx=1$

La relation entre la fonction de répartition et la fonction densité de probabilité: La fonction de répartition F_X est **la primitive** de la fonction densité de probabilité f

$$\forall x\in\mathbb{R}, F_X(t)=P(X<x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad ,$$

et permet d'obtenir les probabilités associées à la variable aléatoire X, en effet :

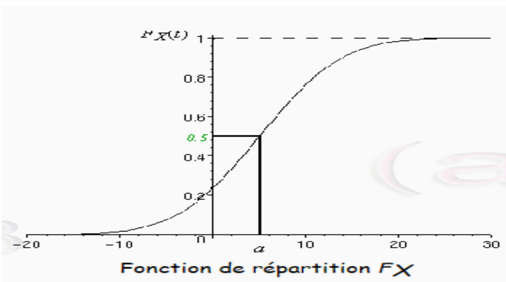
$$P(a\leq X\leq b)=F_X(b)-F_X(a)=\int_a^b f(x)dx, avec\; a<b$$

Les ***propriétés*** associées à la fonction de répartition sont les suivantes:

(1) F_X est continue sur $\mathbb{R}$

(2) F_X est croissante sur $\mathbb{R}$

(3) $\lim_{x\to-\infty} F_X(x)=0$, $\lim_{x\to+\infty} F_X(x)=1$;



Espérance d'une variable aléatoire continue Soit X une variable aléatoire de densité f. On dit que X admet une espérance si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)dt$ *est absolument convergente. Auquel cas,* $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)dt$