مقدمة:

تعتبر طرق الاستقطاب من أهم الطرق التنبؤ في المدى القصير، و التي تتمثل في تحديد عدد معين من المكونات في السلسلة نفسها التي يمكن توسيعها في المستقبل.

و للحصول على النموذج الملائم يجب أولا أن يكون لدينا بيانات موثوقة و كافية. و في هذه الحالة يجب أن يكون لدينا تاريخ من المشاهدات متباعد بانتظام مع مرور الزمن، ثم بعدها البحث عن منهجية للتنبؤ.

و من دواعي استخدام هذه النماذج في المدى القصير:[1]

- غياب العلاقات السببية بين المتغيرات و صعوبة قياسها.
- عدم توفر المعطيات الكافية حول المتغيرات المفسرة كونها تحتاج إلى مجموعة كبيرة من المشاهدات.
- بساطة تركيب هذه النماذج و سهولة تفسير نتائجها بالنسبة للمسيرين.
- النماذج الإنحدارية رغم استعمالها لمعلومات معتبرة و تطلبها لإمكانات علمية و بشرية كبيرة، فإن نتائجها ليست دوما في مستوى هذا المجهود.

و نماذج الإستقطاب تنقسم إلى قسمين: الأولى تكمن في تحديد نماذج الإتجاه العام المختلفة مع طرق تقييمها ثم التنبؤ بها. أما النوع الثاني فهي نماذج مكيفة.

[1] مولود حشملن، مرجع سابق ذكره، ص: 25

1. التنبؤ بنماذج الإتجاه العام و طرق تقييمها:

تهتم هذه النماذج بالمركبة النظامية في السلسلة الزمنية، و المتمثلة في شكل اتجاه عام قد يكون على شكل دالة خطية، أسية أو لوغاريتمية.... إضافة إلى مركبة عشوائية ضعيفة التذبذب، كما أن المتغير دراسته يفسر بواسطة الزمن **t**.

1.1 نموذج الإتجاه العام الخطي:

يتم التعبير عن السلسلة الزمنية التي تنمو بمقدار مطلق ثابت عبر الزمن بالعلاقة التالية:

$Y_t = f(t, \mathcal{E}_t) = a + b.t + \mathcal{E}_t$. حيث **t** يشير إلى الزمن سواء: سنة، فصل، شهر، .....بينما **a** و **b** معالم يراد تقديرها لأغراض التوقع في المستقبل القريب.

بما أن نموذج الإتجاه العام ذو علاقة خطية، فيمكن تقدير معلمات النموذج بطريقة المربعات الصغرى أو بطريقة المصفوفات.

1.1.1 طريقة المربعات الصغرى:

تعتمد هذه الطريقة في التقدير على مبدأ تصغير مجموع مربعات البواقي:

$$\text{Min} \sum_{t=1}^{T} \varepsilon_t^2 = \sum_{t=1}^{T} (y_t - \hat{a} - \hat{b}.t)^2$$

مع العلم أن $\text{Min} \sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{\varepsilon_t^2}$ تتوافق مع نقطة انعطاف صغرى أين تكون المشتقة الأولى لها بالنسبة للمعلمتين معدومة حيث:

$$\frac{\partial \sum_{t=1}^{T} \varepsilon_t^2}{\partial \hat{a}} = 0 \Rightarrow -2 \sum_{i=1}^{T} (y_t - \hat{a} - \hat{b}.t) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{t=1}^{T} y_t - T\hat{a} - \hat{b} \sum_{t=1}^{T} t = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{t=1}^{T} y_t = T\hat{a} + \hat{b} \sum_{t=1}^{T} t$$

$$\Rightarrow \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{t} \quad \left(\bar{y} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} y_t \;\; ; \;\; \bar{t} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} t = \frac{T+1}{2}\right)$$

و بنفس الطريقة نشتق بالنسبة ل $\hat{}$ و نتحصل في الأخير على:

$$\boldsymbol{\hat{b} = \frac{\sum_{t=1}^{T} (t-\bar{t})(y_t-\bar{y})}{\sum_{t=1}^{T} (t-\bar{t})}} \qquad \text{أو} \qquad \boldsymbol{\hat{b} = \frac{\sum_{t=1}^{T} t.y_t - T\bar{y}.\bar{t}}{\sum_{t=1}^{T} t^2 - T\bar{t}^2}}$$

مثال: نفس المثال الخاص بالإختبارات المعلمية ص:

2.1.1 طريقة المصفوفات:

تمثل هذه الطريقة تعميما لتقدير معلمات النموذج بدون تحديد، كما أنها تقدم حلا رياضيا مبسطا و مختصرا لنموذج عام باستخدام خصائص المصفوفات.

كأول خطوة نقوم بتعويض **t** بالقيم **t= 1,2,3,.......,T** في المعادلة السابقة لنحصل على **T** من المعادلات كما يلي:

$Y_1 = a + b.1 + \varepsilon_1$

$Y_2 = a + b.2 + \varepsilon_2$

$Y_3 = a + b.3 + \varepsilon_3$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$Y_T = a + b.T + \varepsilon_T$

بعدها يتم صياغة هذه المعادلات في شكل مصفوفاتي كالأتي:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ . \\ . \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ . & . \\ . & . \\ 1 & T \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ . \\ . \\ \varepsilon_t \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} \; . \; \mathbf{B} + \varepsilon$$

ذات الأبعاد: $(T\times1)$ $(T\times2)$ (2×1) $(T\times1)$

و حل هذا النموذج من أجل مقدرات a و b يكون كما يلي:

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = (X'X)^{-1} . (X'Y)$$

مع العلم أن$(X'X)$ ذات محدد غير معدوم و قابلة للقلب

$$X'X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & . & . & 1 \\ 1 & 2 & . & . & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ . & . \\ . & . \\ 1 & T \end{bmatrix}$$

و بتطبيق قاعدة ضرب مصفوفتين نحصل على:

$$\begin{bmatrix} T & \sum t \\ \sum t & \sum t^2 \end{bmatrix}$$

حيث:

$$\sum_{t=1}^{T} t = \frac{T(T+1)}{2} \quad ; \quad \bar{T} = \frac{T+1}{2} \quad ; \quad \sum_{t=1}^{T} t^2 = \frac{T(T+1)(2T+1)}{6}$$

كذلك:

$$X'Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & . & . & 1 \\ 1 & 2 & . & . & T \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ . \\ . \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_t \\ \sum t.y_t \end{bmatrix}$$

مثال:

السنة	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992
المشاهدة	18.66	19.24	19.86	19.90	19.98	20.21	20.47	20.5	21.80	12.90	13.12	13.50	13.93
1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
14.50	14.78	14.92	15.30	15.90	16.20	16.84	17.20	18.53	19.5	19.75	19.97	20.15	20.63
2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
21.23	22.53	24.63	25.71	26.53	27.27	27.93	28.05	29.33	30.5	31.72	32.43	33.33	34.42

- أوجد معادلة الإتجاه العام.

لدينا:

$T=28$; $\sum t = 406$; $\sum t^2 = 7714$

و منه:

$$X'X = \begin{bmatrix} 28 & 406 \\ 406 & 7714 \end{bmatrix}$$

كما لدينا:

$\sum y_t = 750.28$; $\sum t.y_t = 11901.94$

و منه:

$$X'Y = \begin{bmatrix} 750.28 \\ 11901.94 \end{bmatrix}$$

نقوم باستخراج المصفوفة العكسية ل $X'X$:

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{-51156} \begin{bmatrix} 7714 & -406 \\ -406 & 28 \end{bmatrix}$$

و بالتالي:

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = (X'X)^{-1} . (X'Y) \Rightarrow \hat{B} = \frac{1}{-51156} \begin{bmatrix} 7714 & -406 \\ -406 & 28 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 750.28 \\ 11901.94 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18.68 \\ 0.56 \end{bmatrix}$$

و بالتالي فإن معادلة الإتجاه العام هي كالأتي:

$$\boxed{\hat{y}_t = 18.68 + 0.56\, t}$$

و إذا أردنا التنبؤ للفترة T+1 أي 2021 فإن :

$$\hat{y}_{T+1} = 18.68 + 0.56\,(T+1) \Rightarrow \hat{y}_{28+1} = 18.68 + 0.56\,(28+1)$$

$$\Rightarrow \hat{y}_{29} = 34.92$$

2.1 نموذج الإتجاه العام الأسي:

في هذه الحالة نفترض أن y_t ينمو بنسبة مئوية ثابتة مقدارها **(r)** أي: $y_t = A\, e^{rt}$

لتقدير معلمات هذا النموذج نحول المعادلة عن طريق اللوغاريتم إلى دالة خطية، بعد إضافة الخطأ العشوائي في شكل أسي لتسهيل عملية التحويل:

$$Y_t = A\, e^{rt+\varepsilon} \Rightarrow \mathrm{Ln}\,(Y_t) = \mathrm{Ln}\,(A) + rt + \varepsilon_t$$

$$\Rightarrow z_t = a + rt + \varepsilon_t$$

حيث: $\mathrm{Ln}\,(Y_t) = z_t\ ;\ \mathrm{Ln}\,(A) = a$

بعدها نقوم بتقدير المعلمتين a و r بإحدى الطريقتين الخاصتين بتقدير الإتجاه العام سواء طريقة المربعات الصغرى أو طريقة المصفوفات. بعدها نستخرج $\hat{}$ و $\hat{a}$ المقدرتين كالأتي:

$$\hat{r} = \frac{\sum_{t=1}^{T}(t-\bar{t})(z_t-\bar{z})}{\sum_{t=1}^{T}(t-\bar{t})^{2}}$$

$$\hat{a} = \bar{z} - \hat{r}\bar{t}$$

$$\bar{z} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} z_t$$

و لمعرفة التنبؤ في الفترة المستقبلية $\boldsymbol{\ell}$ لما يكون: $\boldsymbol{\ell = 1, 2, 3, \dots, L}$:

$$\hat{y}_{T+1} = \hat{A}.e^{\hat{r}(T+1)}$$

$$\hat{y}_{T+2} = \hat{A}.e^{\hat{r}(T+2)}$$

$$\vdots$$

$$\hat{y}_{T+L} = \hat{A}.e^{\hat{r}(T+L)}$$

و بإدخال Ln و استعمال الخطوات السابقة نتحصل على:

$$\hat{z}_{T+1} = \hat{a} + \hat{r}(T+1)$$

$$\hat{z}_{T+2} = \hat{a} + \hat{r}(T+2)$$

$$\vdots$$

$$\hat{z}_{T+L} = \hat{a} + \hat{r}(T+L)$$

و بعد تحويل هذه الدوال إلى أصلها عن طريق الدالة الأسية نجد:

$$\hat{y}_{T+1} = \exp(\hat{z}_{T+1})$$

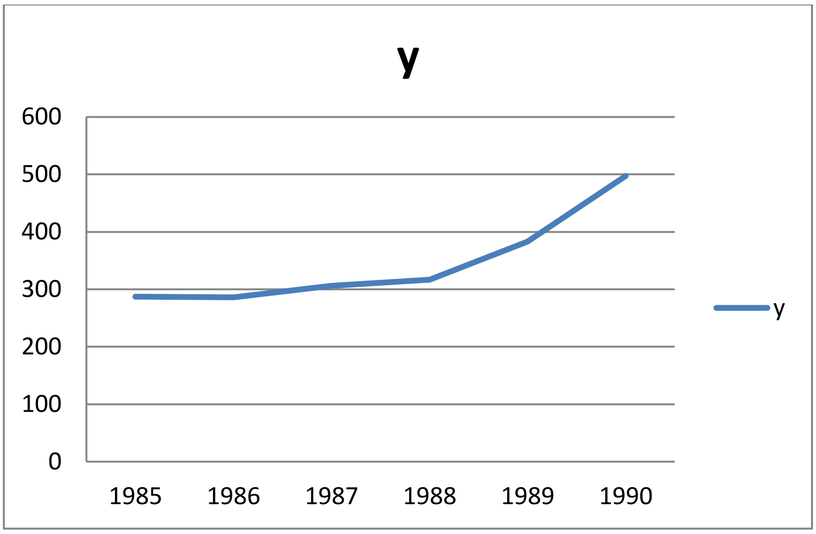
$$\hat{y}_{T+2} = \exp(\hat{z}_{T+2})$$

$$\vdots$$

$$\hat{y}_{T+L} = \exp(\hat{z}_{T+L})$$

مثال: لدينا الجدول التالي الذي يمثل الناتج الوطني الخام:

السنوات	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991
Y	287	286	306	317	383	497	735



بعد التأكد بيانيا بأن السلسلة الزمنية هي مركبة الإتجاه العام ذات الشكل الأسي، نقوم أولا بتحويلها إلى شكلها الخطي. بعدها نقوم بتقديرها باستخدام طريقة المربعات الصغرى.

$(t-\bar{t})^2$	$(t-\bar{t})(z-\bar{z})$	$z-\bar{z}$	$t-\bar{t}$	Ln(y)=z	y	t	السنة
9	0.81	-0.27	-3	5.66	287	1	1985
4	0.56	-0.28	-2	5.65	286	2	1986
1	0.21	-0.21	-1	5.72	306	3	1987
0	0	-0.17	0	5.76	317	4	1988
4	0.20	0.20	1	5.95	383	5	1989
9	0.54	0.27	2	6.21	497	6	1990
28	2.01	0.67	3	6.6	735	7	1991
28	4.15	0	0	41.55	2811	28	$\sum$

$$Y_t = A\,e^{rt+\varepsilon} \Rightarrow \mathrm{Ln}\,(Y_t) = \mathrm{Ln}\,(A) + rt + \mathcal{E}_t$$

$$\Rightarrow z_t = a + rt + \mathcal{E}_t$$

بتطبيق الخطوات السابقة نتحصل على:

$$\hat{r} = \frac{\sum_{t=1}^{T}(t-\bar{t})(z_t-\bar{z})}{\sum_{t=1}^{T}(t-\bar{t})^2} \Rightarrow \hat{r} = \frac{4.15}{28} = 0.15$$

$\hat{a} = \bar{z} - \hat{r}\bar{t} \Rightarrow \hat{a} = 5.93 - 0.15(4) = 5.33$; $(\bar{z} = 5.93; \bar{t} = 4)$

و بالتالي تصبح المعادلة كالأتي:

و إذا أردنا التنبؤ للسنة T+1 أي 1992 و هي السنة t=8 فتصبح المعادلة:

$$\hat{z}_{T+1} = 5.33 + 0.15\ (T+1) \Rightarrow \hat{z}_8 = 5.33 + 0.15\ (8)$$

$$\Rightarrow \hat{z}_8 = 6.53$$

نقوم الآن بتحويل الدالة إلى أصلها عن طريق الدالة الأسية:

$$\hat{y}_8 = \exp(\hat{z}_8) \Rightarrow \hat{y}_8 = \exp(6.53)$$

$$\Rightarrow \hat{\boldsymbol{y}}_8 = \mathbf{685.39}$$

3.1 دالة القطع المكافئ:

تعتبر دالة القطع المكافئ امتداد لنموذج الاتجاه العامل لأن شكلها قريب للشكل الخطي، لذا فهي تكتب كالأتي:

$$y_t = a + bt + ct^2 + \varepsilon_t$$

يتم تحويل هذه المعادلة الغير خطية إلى معادلة خطية:

$$y_t = a + bt + cx_t + \varepsilon_t$$

حيث: $x_t = t^2$

نقوم باستخدام نفس الخطوات السابقة (طريقة المربعات الصغرى لاستخراج معادلة الإتجاه العام).

تعتمد هذه الطريقة في التقدير على مبدأ تصغير مجموع مربعات البواقي:

$$\text{Min} \sum_{t=1}^{T} \varepsilon_t^2 = \sum_{t=1}^{T} (y_t - \hat{a} - \hat{b}.t - \hat{c}.x)^2$$

مع العلم أن $\text{Min} \sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{\varepsilon}_t^2$ تتوافق مع نقطة انعطاف صغرى أين تكون المشتقة الأولى لها بالنسبة للمعلمتين معدومة حيث:

$$\frac{\partial \sum_{t=1}^{T} \varepsilon_t^2}{\partial \hat{a}} = 0 \Rightarrow -2\sum_{i=1}^{T} (y_t - \hat{a} - \hat{b}.t - \hat{c}.x) = 0$$

و بعد القيام بعملية الإشتقاق نجد:

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{t} - \hat{c}\bar{x}$$

بنفس الطريقة نقوم باشتقاق $\hat{b}$ و $\hat{c}$ حيث نجد:

$$\hat{b} = \frac{(\sum_{t=1}^{T} t.y_t)(\sum_{t=1}^{T} x_t^2) - (\sum_{t=1}^{T} x_t y_t)(\sum_{t=1}^{T} t.x_t)}{\sum_{t=1}^{T} t^2 \sum_{t=1}^{T} x_t^2 - (\sum_{t=1}^{T} t.x_t)^2}$$

$$\hat{c} = \frac{(\sum_{t=1}^{T} x_t.y_t)(\sum_{t=1}^{T} t^2) - (\sum_{t=1}^{T} t.y_t)(\sum_{t=1}^{T} x_t.t)}{\sum_{t=1}^{T} t^2 \sum_{t=1}^{T} x_t^2 - (\sum_{t=1}^{T} t.x_t)^2}$$

2. التنبؤ و التمهيد بالطرق المكيفة:

يقصد بالتنبؤ استشراف المستقبل القريب بتقنيات بسيطة. بينما التمهيد فهو يعني إزالة أو التخفيف من حدة التذبذبات القصيرة المدى في السلسلة الزمنية.

1.2 طريقة المتوسطات المتحركة:

تعني حساب المتوسط الحسابي لعدد محدود من الفترات **n** أو **k**، وينقسم إلى قسمين:

المتوسطات المتحركة البسيطة، المتوسطات المتحركة المرجحة.

1.1.2 المتوسطات المتحركة البسيطة:

نقوم بحساب المتوسط الحسابي لعدد فترات محدودة من السلسلة الزمنية، مع إعطاء أوزان متساوية لكافة المشاهدات المعنية بالدراسة، والقيمة المتنبأ بها تعتمد على الفترات السابقة. (سميت بالبسيطة لأن الأوزان متساوية =1).

$$\text{MAS} = \hat{y}_{T+1} = \frac{1}{n}(y_T + y_{T-1} + y_{T-2} + \cdots + y_{T-n+1})$$

$$\hat{y}_{T+1} = \frac{1}{n}\sum_{r=0}^{n=1} y_{t-r}$$

n : عدد الفترات المستخدمة في حساب المتوسط الحسابي.

$\hat{y}_{T+1}$: القيمة المتنبأ بها في الفترة **t-r**.

t: الفترة الزمنية.

مثال: يمثل الجدول التالي بيانات الطلب لفترة 1999 إلى 2004:

السنوات	1999	2000	2001	2002	2003	2004
الطلب	7	12	14	14	18	19

- أحسب التنبؤ للفترة القادمة (2005) باستخدام **MAS** لثلاث سنوات.

الحل:

السنوات	t	الطلب	$\hat{y}_t$	$\varepsilon_t = y_t - \hat{y}_t$
1999	1	7	-	-
2000	2	12	-	-
2001	3	14	-	-
2002	4	14	11	3
2003	5	18	13.33	4.67
2004	6	19	15.33	3.67
Σ				**11.34**

$$y_{2002} = \frac{14+12+7}{3} = 11$$

$$y_{2003} = \frac{14+14+12}{3} = 13.3$$

$$y_{2004} = \frac{18+14+14}{3} = 15.33$$

$$y_{2005} = \frac{19+18+14}{3} = \mathbf{17}$$

و بالتالي التنبؤ للفترة القادمة (2005) باستخدام **MAS** لثلاث سنوات هو **17**

2.1.2 المتوسطات المتحركة المرجحة:

تعتمد هذه الطريقة على مجموع الأوزان، فكلما كانت الفترة قريبة كلما كانت الأوزان كبيرة.

مثال: نفس المثال السابق مع مراعاة الفترة الأحدث (0.5) والفترة التي تسبقه (0.3)، والفترة الأقدم (0.2).

السنوات	y_t	$\hat{y}$	$\varepsilon_t = y_t - \hat{y}_t$
1999	7	-	-
2000	12	-	-
2001	14	-	-
2002	14	12	2
2003	18	13.6	4.4
2004	19	16	4
$\sum$			**10.4**

$$\hat{y}_{2002} = (0.5)14 + (0.3)12 + (0.2)7 = 12$$

$$\hat{y}_{2003} = (0.5)14 + (0.3)14 + (0.2)12 = 13.6$$

$$\hat{y}_{2004} = (0.5)18 + (0.3)14 + (0.2)14 = 16$$

$$\hat{y}_{2005} = (0.5)19 + (0.3)18 + (0.2)14 = \mathbf{17.7}$$

تعتبر تقنية المتوسطات المتحركة المرجحة أحسن من تقنية المتوسطات المتحركة البسيطة، لأن نسبة الخطأ ε_t في الأولى هي أكبر من الثانية.

2.2 طريقة التمهيد الأسي:

لقد استخدمت تقنيات التمهيد الأسي لأول مرة عام 1957 من قبل الباحث Holt، وبعد ذلك من قبل Brown عام 1962، ويشمل التمهيد مجموعة من التقنيات التجريبية التي لها هدف مشترك هو إعطاء أوزان للقيم الحديثة من السلسلة الزمنية بشكل أكبر من باقي قيم السلسلة.

إن هذه الطريقة تتأثر بالفترات المتأخرة لسلوك الظاهرة أكثر من الفترات الأقدم، و هي لا تحتاج إلى الاحتفاظ ببيانات تاريخية لفترات طويلة.[2]

تتصف هذه الطريقة بالبساطة و تساعد في تحديد سلوك الظاهرة المتوقعة للفترة القادمة بشكل مباشر من خلال البيانات الفعلية و المتوقعة لسلوك الظاهرة المدروسة للفترة الحالية. و الصيغة المستخدمة لهذه الطريقة هي:

$$\tilde{y}_{t+1} = \alpha y_t + (1 + \alpha)\tilde{y}_t$$

حيث:

$\tilde{y}_{t+1}$: الظاهرة المتوقعة للفترة القادمة.

α: معامل التكييف.

$\tilde{y}_t$: قيم الظاهرة المتوقعة للفترة الحالية.

t: الفترة الزمنية الحالية.

y_t: القيم الفعلية للفترة الحالية.

عادة ما تستخدم هذه الطريقة للتنبؤ بسلوك قيم الظاهرة للمدى القصير و لفترة قادمة واحدة أو اثنين، و لا تستمر لفترات بعيدة كونها تعتمد على البيانات الفعلية لآخر فترة للتنبؤ بقيم الظاهرة للفترة القادمة.

كما أن هذه الطريقة تعتمد على البيانات التاريخية للظاهرة للفترات الأخيرة، و هي تعتمد إلى تجاوز العيوب في الطرق التي تعتمد سلسلة من الفترات الطويلة قد لا تترك أثرها على الأحداث المستقبلية.

[2] حامد الشمرتي، مؤيد الفضل، مرجع سابق ذكره، ص: 220

ترتكز هذه التقنية على عمليتين أساسيتين:

عملية التمهيد smoothing:	**عملية التنبؤ:**
تعني تمهيد السلسلة الزمنية أي تهذيبها وذلك من خلال إزالة أو التخفيف من التذبذبات العشوائية في السلسلة الزمنية (داخل العينة الفعلية $\tilde{y}$).	تعني استشراف الظاهرة خارج العينة ($\hat{y}$).

لهذه التقنية عدة أشكال من بينها:

1.2.2 التمهيد الأسي البسيط (أو الأحادي):

يستخدم في السلاسل الزمنية العشوائية التي تذبذباتها تتمحور حول وسط حسابي ثابت (أي يجب أن تكون السلسلة مستقرة)، وتستخدم في التنبؤ القصير المدى (البورصة،أسعار البترول،...).

❖ **عملية التمهيد: (إزالة التذبذبات داخل العينة)**

تعتمد هذه التقنية على الصيغة الرياضية التالية:

$$\tilde{y}_t = \alpha y_t + \alpha(1-\alpha)^1 y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2 y_{t-2} + \alpha(1-\alpha)^3 y_{t-3} + \ldots + \alpha(1-\alpha)^n y_{t-n}$$

$$\Rightarrow \tilde{y}_t = \alpha \sum_{r=0}^{\infty} (1-\alpha)^r y_{r-1}$$

$t = 1 ;2 ;3 ;\ldots ;T$

α: معامل التكييف ($0 < \alpha < 1$)

كلما زاد حجم العينة كلما صعب استخراج هذه المعادلة، لذلك قام مجموعة من الباحثين بتبسيط هذه العلاقة كالتي:

$$\boxed{\tilde{y}_t = \alpha y_t + (1+\alpha)\tilde{y}_{t-1}}$$

$$\left.\begin{array}{l} t=1 \Rightarrow \tilde{y}_1 = \alpha y_1 + (1-\alpha)\tilde{y}_0 \Rightarrow \tilde{y}_1 = Y_1 \\ t=2 \Rightarrow \tilde{y}_2 = \alpha y_2 + (1-\alpha)\tilde{y}_2 \\ t=2 \Rightarrow \tilde{y}_2 = \alpha y_2 + (1-\alpha)\tilde{y}_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ t=T \Rightarrow \tilde{y}_T = \alpha y_T + (1-\alpha)\tilde{y}_{T-1} \end{array}\right\}$$

عملية التمهيد (داخل العينة الفعلية فقط)

❖ **عملية التنبؤ: (خارج العينة الفعلية)**

T+1 ;T+2 ;... ;T+L

$$\boxed{\tilde{y}_{T+1} = \tilde{y}_{T+2} = \ldots = \tilde{y}_{T+L}}$$

معناه أن التنبؤ للسنوات المقبلة هو نفسه

مثال: لدينا الجدول التالي:

الأشهر	1/93	2/93	3/93	4/93	5/93	6/93	7/93	8/93	9/93	10/93	11/93	12/93
y_t	16.76	16.71	16.03	16.53	15.16	13.34	17.61	18.52	18.01	20.17	21.58	21.77

- قم بالتنبؤ للفترة المقبلة مع العلم أن $\alpha=0.95$

❖ **عملية التمهيد:**

$t=1, 2, 3, \ldots\ldots, 12$

$$\tilde{y}_T = \alpha y_T + (1-\alpha)\tilde{y}_{T-1}$$

$$t=1 \Rightarrow \tilde{y}_1 = y_1$$

$$t=2 \Rightarrow \tilde{y}_2 = 0.95y_2 + (1-0.95)\tilde{y}_1$$

$$\Rightarrow \tilde{y}_2 = 0.95(16.7) + 0.05(16.76)$$

$$\Rightarrow \tilde{y}_2 = 16.7125$$

$t = 3 \Rightarrow \tilde{y}_3 = 0.95y_3 + 0.05\tilde{y}_2$

$\Rightarrow \tilde{y}_3 = 0.95(16.03) + 0.05(16.7125)$

$\Rightarrow \tilde{y}_3 = 16.064125$

$t = 12 \Rightarrow \tilde{y}_{12} = 0.95y_{12} + 0.05\tilde{y}_{11}$

$\Rightarrow \tilde{y}_{12} = 21.7565$

الأشهر	t	y_t	$\tilde{y}_t$
1/93	1	16.76	16.76
2/93	2	16.71	16.7125
3/93	3	16.03	16.0641
4/93	4	16.53	16.5067
5/93	5	15.16	15.1703
6/93	6	13.34	13.6215
7/93	7	17.61	17.4105
8/93	8	18.52	17.4645
9/93	9	18.01	18.0325
10/93	10	20.17	20.0631
11/93	11	21.58	21.5041
12/93	12	21.77	21.7565

1/94	T+1=13 T+L		21.7693 21.7693

❖ **عملية التنبؤ:** (خارج العينة الفعلية)

T+1 ;T+2 ;...T+L

$\hat{y}_{T+1} = \alpha y_T + (1-\alpha)\tilde{y}_T$

$\hat{y}_{13} = 0.95y_{12} + 0.05\tilde{y}_{12} = 0.05(21.77)+0.05(21.7565)$

$\Rightarrow \hat{y}_{13} = 21.7693$

2.2.2 التمهيد الأسي المزدوج (أو الثنائي):

يستخدم في السلسلة الزمنية ذات المركبة العشوائية بالإضافة إلى مركبة الاتجاه، حيث و بطريقة انحدارية يمكن التعبير عنها كما يلي:

$$\boxed{Y_t = B_0 + B_1 t + \varepsilon_t}$$

حيث أن: $B_0 + B_1 t$ تمثل مركبة الاتجاه العام، و ε_t تمثل المركبة العشوائية، فيمكن تمهيدها بهذه الطريقة كالآتي:[3]

❖ **عملية التمهيد: (إزالة أو التخفيف من التذبذبات)**

المرحلة1:

$\tilde{y}_t = \alpha y_t + (1-\alpha)\tilde{y}_{t-1}$

t= 1 , 2 , 3 ,... ,T

[3] زين العابدين البشير، " تحليل السلاسل الزمنية"، دار الجنان للنشر و التوزيع، عمان، 2016، ص: 57

عند: $t=1$ نجد: $\tilde{y}_1 = y_1$

المرحلة2: (إزالة أكثر للتذبذبات)

$$\tilde{\tilde{y}}_t = \alpha\, \tilde{y}_t + (1-\alpha)\, \tilde{\tilde{y}}_{t-1}$$

$t = 1, 2, 3, \dots, T$

عند: $t=1$ نجد: $\tilde{\tilde{y}}_1 = y_1$

❖ **عملية التنبؤ: (خارج العينة الفعلية)**

$$\hat{y}_{T+L} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 . \ell$$

$\ell = 1, 2, 3, \dots\dots, L$

$$\beta_0 = 2\tilde{y}_T - \tilde{\tilde{y}}_T$$

$$\beta_1 = \frac{\alpha}{1-\alpha}\left(\tilde{y}_T - \tilde{\tilde{y}}_T\right)$$

ℓ: أفق التنبؤ

مثال: لدينا السلسلة الزمنية التالية:

السنوات	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
y_t	23	27	33	35	40	42	45	50	52	55	52	55

- أوجد التنبؤات للسنوات: 2013، 2014، 2015، إذا علمت أن: **$\alpha = 0.8$**.

❖ **عملية التمهيد:**

المرحلة1:

$t = 1, 2, 3, \dots\dots, 12$

$$\tilde{y}_T = \alpha y_T + (1-\alpha)\tilde{y}_{T-1}$$

$t=1 \Rightarrow \tilde{y}_1 = y_1 = 23$

$t=2 \Rightarrow \tilde{y}_2 = 0.8y_2 + (1-0.8)\tilde{y}_1$

$\Rightarrow \tilde{y}_2 = 0.8(27)+0.2(23)$

$\Rightarrow \tilde{y}_2 = 26.2$

$t=3 \Rightarrow \tilde{y}_3 = 0.8y_3 + 0.2\tilde{y}_2$

$\Rightarrow \tilde{y}_3 = 0.8(33)+0.2(26.2)$

$\Rightarrow \tilde{y}_3 = 31.64$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$t = 12 \Rightarrow \tilde{y}_{12} = 0.8y_{12} + 0.2\tilde{y}_{11}$

$\Rightarrow \boldsymbol{\tilde{y}_{12} = 54.49}$

المرحلة2:

$t=1, 2, 3, ..., 12$

$\tilde{\tilde{y}}_t = \alpha\, \tilde{y}_t + (1-\alpha)\, \tilde{\tilde{y}}_{t-1}$

$t=1 \Rightarrow \tilde{\tilde{y}}_1 = y_1 = 23$

$t=2 \Rightarrow \tilde{\tilde{y}}_2 = 0.8\, \tilde{y}_2 + (1-0.8)\, \tilde{\tilde{y}}_1$

$\Rightarrow \tilde{\tilde{y}}_2 = 0.8(26.2)+0.2(23)$

$\Rightarrow \tilde{\tilde{y}}_2 = 25.56$

$t=3 \Rightarrow \tilde{\tilde{y}}_3 = 0.8\, \tilde{y}_3 + 0.2\, \tilde{\tilde{y}}_2$

$\Rightarrow \tilde{\tilde{y}}_3 = 0.8(31.64)+0.2(25.56)$

$\Rightarrow \tilde{\tilde{y}}_3 = 30.424$

$t = 12 \Rightarrow \tilde{\tilde{y}}_{12} = 0.8\ (54.49) + 0.2\ (52.673)$

$\Rightarrow \boldsymbol{\tilde{\tilde{y}}_{12} = 54.126}$

❖ **عملية التنبؤ: (خارج العينة الفعلية)**

$$\hat{y}_{T+L} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 . \ell$$

من أجل حساب $\hat{y}_{T+}$ يجب حساب أولا $\hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$:

$\boldsymbol{\beta_0 = 2\tilde{y}_T - \tilde{\tilde{y}}_T}$

$t=1 \Rightarrow \beta_0 = 2\tilde{y}_1 - \tilde{\tilde{y}}_1$

$\Rightarrow \beta_0 = 2(23) - 23$

$\Rightarrow \beta_0 = 23$

$t=2 \Rightarrow \beta_0 = 2\tilde{y}_2 - \tilde{\tilde{y}}_2$

$\Rightarrow \beta_0 = 2(26.2) - 25.56$

$\Rightarrow \beta_0 = 26.84$

$t=3 \Rightarrow \beta_0 = 2\tilde{y}_3 - \tilde{\tilde{y}}_3$

$\Rightarrow \beta_0 = 2(31.64) - 30.424$

$\Rightarrow \beta_0 = 32.856$

$t=12 \Rightarrow \beta_0 = 2\tilde{y}_{12} - \tilde{\tilde{y}}_{12}$

$\Rightarrow \beta_0 = 2(54.49) - 54.126$

$\Rightarrow \beta_0 = 54.854$

$\boldsymbol{\beta_1} = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{1-\alpha}}\ (\tilde{y}_{\boldsymbol{T}} - \tilde{\tilde{\boldsymbol{y}}}_{\boldsymbol{T}}) \Rightarrow \beta_1 = \frac{0.8}{1-0.8}\ (\tilde{y}_T - \tilde{\tilde{y}}_T)$

$\Rightarrow \beta_1 = 4\ (\tilde{y}_T - \tilde{\tilde{y}}_T)$

$t=1 \Rightarrow \beta_1 = 4\ (\tilde{y}_1 - \tilde{\tilde{y}}_1)$

$\Rightarrow \beta_1 = 4\ (23 - 23)$

$\Rightarrow \beta_1 = 0$

$t=2 \Rightarrow \beta_1 = 4\ (\tilde{y}_2 - \tilde{\tilde{y}}_2)$

$\Rightarrow \beta_1 = 4\ (26.2 - 25.56)$

$\Rightarrow \beta_1 = 2.56$

$t=3 \Rightarrow \beta_1 = 4\ (\tilde{y}_3 - \tilde{\tilde{y}}_3)$

$\Rightarrow \beta_1 = 4\ (31.64 - 30.424)$

$\Rightarrow \beta_1 = 4.864$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$t=12 \Rightarrow \beta_1 = 4\ (\tilde{y}_{12} - \tilde{\tilde{y}}_{12})$

$\Rightarrow \beta_1 = 4\ (54.49 - 54.126)$

$\Rightarrow \beta_1 = 1.456$

$$\hat{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{T+L}} = \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{0}} + \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{1}}.\boldsymbol{\ell}$$

T=12 ; ℓ= 1, 2, 3, …., L

$$\hat{y}_{2013} = \hat{y}_{12+1} = \hat{\beta}_{0/12} + \hat{\beta}_{1/12}.\ell \Rightarrow \hat{y}_{2013} = 54.854 + 1.456(1)$$

$$\Rightarrow \hat{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{2013}} = \mathbf{56.32}$$

$$\hat{y}_{2014} = \hat{y}_{12+2} = \hat{\beta}_{0/12} + \hat{\beta}_{1/12}.\ell \Rightarrow \hat{y}_{2014} = 54.854 + 1.456(2)$$

$$\Rightarrow \hat{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{2014}} = \mathbf{57.766}$$

$$\hat{y}_{2016} = \hat{y}_{12+4} = \hat{\beta}_{0/12} + \hat{\beta}_{1/12}.\ell \Rightarrow \hat{y}_{2016} = 54.854 + 1.456(4)$$

$$\Rightarrow \hat{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{2016}} = \mathbf{60.678}$$

السنوات	t	y_t	$\tilde{y}_t$	$\tilde{\tilde{y}}_t$	B_0	B_1	$\hat{y}_t$
2001	1	23	23	23	23	0	
2002	2	27	26.2	26.56	26.84	2.56	
2003	3	33	31.64	30.424	32.856	4.864	
2004	4	35	34.328	33.547	35.109	3.124	
2005	5	40	38.865	37.801	39.924	4.256	
2006	6	42	41.373	40.658	42.088	2.86	
2007	7	45	44.274	43.547	45.002	2.92	
2008	8	50	48.854	47.792	49.916	4.245	
2009	9	52	51.37	50.654	52.086	2.864	
2010	10	55	54.274	53.55	54.998	2.896	
2011	11	52	52.454	52.673	52.236	-0.873	
2012	12	55	54.49	54.126	54.854	1.456	
2013							56.32
2014							57.766

2015							60.678

3.2.2 التمهيد الأسي لـ: Holt: (ذات ثابتي التمهيد)

يلجأ إلى هذه الطريقة في نفس الظروف التي تستعمل فيها التقنية السابقة، وهذا طبعا لا يعني أنها تعطي نفس النتائج. و تتكون هذه الطريقة من معادلتين وكذا ثابتي التمهيد، أحدهما خاص بالعشوائية و الآخر بالاتجاه العام، تمر هذه الطريقة بمرحلتين:

❖ **عملية التمهيد:**

تتكون من ثابتي التمهيد أحدهما خاص بالعشوائية، و الآخر خاص بالاتجاه العام.

° معادلة تمهيد السلسلة العشوائية:

$$\tilde{y}_t = \alpha y_t + (1-\alpha)(\tilde{y}_{t-1} + r_{t-1})$$

حيث α ثابت التمهيد للمركبة العشوائية.

° معادلة تمهيد الاتجاه العام للسلسلة:

$$r_t = \lambda(\tilde{y}_t - \tilde{y}_{t-1}) + (1-\lambda)r_{t-1}$$

حيث λ ثابت تمهيد الإتجاه العام.

❖ **عملية التنبؤ:**

$$\hat{y}_{T+L} = \tilde{y}_T + \ell r_T$$

$$\ell = 1, 2, 3, \dots, L$$

حيث: ℓ أفق التنبؤ

كما قام بعض الباحثين بافتراض قيم الانطلاق:

$$\tilde{y}_1 = r_1 = 0$$

$$\tilde{y}_2 = y_1$$

$$r_2 = y_2 - y_1$$

$$\hat{y}_2 = y_1$$

مثال: لدينا الجدول التالي:

الأشهر	جانفي	فيفري	مارس	أفريل	ماي	جوان	جويلية	أوت	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
y_t	152	176	160	192	220	272	256	280	300	280	312	328

إذا علمت أن: $\alpha = 0.2$ ، $\lambda = 0.3$

- حدد قيم تمهيد السلسلة الزمنية الخاصة بالعشوائية و بالاتجاه العام لكل فترة.

- تنبأ بحجم مبيعات ثلاثة أشهر الأولى من السنة المقبلة.

الحل:

❖ **عملية التمهيد:**

° **قيم الانطلاق:**

$$\tilde{y}_1 = r_1 = 0$$

$$\tilde{y}_2 = y_1 = 152$$

$$r_2 = y_2 - y_1 = 176 - 152 = 24$$

$$\hat{y}_2 = y_1$$

° **معادلة التمهيد العشوائية:**

$$\tilde{y}_t = \alpha y_t + (1-\alpha)(\tilde{y}_{t-1} + r_{t-1})$$

t=1 $\Rightarrow \tilde{y}_1 = 0$

t=2 $\Rightarrow \tilde{y}_2 = y_1 = 152$

t=3 $\Rightarrow \tilde{y}_3 = 0.2y_3 + 0.8(\tilde{y}_2 + r_2)$

$\Rightarrow \tilde{y}_3 = 0.2(160) + 0.8(152 + 24)$

$\Rightarrow \tilde{y}_3 = 172.8$

t=12 $\Rightarrow \tilde{y}_{12} = 0.2y_{12} + 0.8(\tilde{y}_{11} + r_{11})$

$\Rightarrow \tilde{y}_{12} = 0.2(328) + 0.8(335.49 + 17.32)$

$\Rightarrow \tilde{y}_{12} = 347.85$

° معادلة التمهيد الاتجاه العام:

$r_t = \lambda(\tilde{y}_t - \tilde{y}_{t-1}) + (1-\lambda)r_{t-1}$

t=1 $\Rightarrow r_1 = 0$

t=2 $\Rightarrow r_2 = y_2 - y_1$

$\Rightarrow r_2 = 176 - 152$

$\Rightarrow r_2 = 24$

t=3 $\Rightarrow r_3 = 0.3(\tilde{y}_3 - \tilde{y}_2) + 0.7r_2$

$\Rightarrow r_3 = 0.3(172.8 - 152) + 0.7(24)$

$\Rightarrow r_3 = 23.04$

t=12 $\Rightarrow r_{12} = 0.3(\tilde{y}_{12} - \tilde{y}_{11}) + 0.7r_{11}$

$\Rightarrow r_{12} = 0.3(347.85 - 335.49) + 0.7(17.32)$

$\Rightarrow r_{12} = 15.83$

الأشهر	t	y_t	$\tilde{y}_t$	r_t	$\hat{y}_t$
جانفي	1	152	0	0	
فيفري	2	176	152	24	

مارس	3	160	172.8	23.04	
أفريل	4	192	195.07	22.81	
ماي	5	220	218.31	22.94	
جوان	6	272	247.39	24.78	
جويلية	7	256	268.94	23.81	
أوت	8	280	290.20	23.05	
سبتمبر	9	300	310.60	22.25	
أكتوبر	10	280	322.28	19.08	
نوفمبر	11	312	335.49	17.32	
ديسمبر	12	328	347.85	15.83	
T+1	13				363.68
T+2	14				379.51
T+3	15				395.34

❖ **عملية التنبؤ:**

$\hat{y}_{T+L} = \tilde{y}_T + \ell r_T$

$\ell = 1, 2, 3, \dots, L$

$\ell = 1 : T + 1 \Rightarrow 12 + 1 = 13$

$\Rightarrow \hat{y}_{13} = \tilde{y}_{12} + \ell r_{12}$

$$\Rightarrow \hat{y}_{13} = 347.85 + (1)15.83$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\hat{y}_{13} = 363.68}$$

$\ell = 2: T + 2 \Rightarrow 12 + 2 = 14$

$$\Rightarrow \hat{y}_{14} = \tilde{y}_{12} + \ell r_{12}$$
$$\Rightarrow \hat{y}_{14} = 347.85 + (2)15.83$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\hat{y}_{14} = 379.51}$$

$\ell = 3: T + 3 \Rightarrow 12 + 3 = 15$

$$\Rightarrow \hat{y}_{15} = \tilde{y}_{12} + \ell r_{12}$$
$$\Rightarrow \hat{y}_{15} = 347.85 + (3)15.83$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\hat{y}_{13} = 395.34}$$