Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Math

Année Universitaire 2022/2023
1ère Année LMD-Math
Durée : 01 h

Contrôle Continu d'Electricité

Exercice 1 :

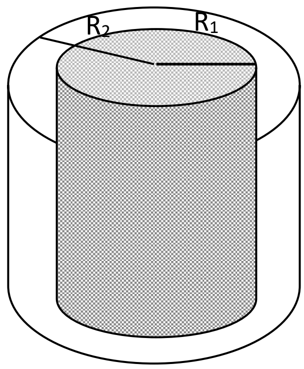
Soient deux cylindres coaxiaux de longueurs infinies et de rayons R_1, R_2 respectifs tel que $R_1 < R_2$.

Le cylindre de rayon R_1 est chargée en volume. Le second de rayon R_2 est chargée en surface.

1- En utilisant le théorème de GAUSS trouver l'expression du champ électrostatique E(r) en tout point de l'espace.

2- En déduire l'expression du potentiel électrique V(r) en tout point de l'espace (sans calculer les constantes).

3- Peut-on utiliser ce théorème pour un cylindre de hauteur finie et pourquoi ?



Donner la forme de la charge élémentaire dq et le champ élémentaire pour les trois types de distribution de charges.

Distribution linéique : dq=……….. , $d\vec{E}$ =…………, dV=…………..

Distribution surfacique : dq=…… , $d\vec{E}$ =……………,dV=…………..

Distribution volumique : dq=……….. , $d\vec{E}$ =………., dV=…………..

Bon courage

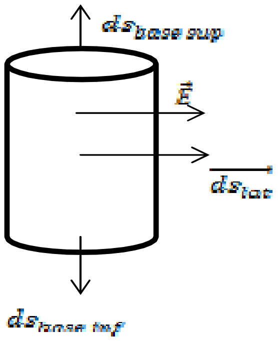
Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Math

Année Universitaire 2022/2023
1ère Année LMD-Math
Durée : 01 h

Corrigé du Contrôle Continu d'Electricité

On considère comme surface de gauss un cylindre de rayon **r** et de hauteur $\boldsymbol{h}$, A cause de la symétrie, le champ est radial et constant en tout point de la surface de Gauss (0,5pts)

D'après le Théorème de Gauss : $\emptyset = \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$ (0,5pts)



$\emptyset = \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds} = 2\iint \vec{E}.\overrightarrow{ds_{\ base}} + \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds_{lat}}$ (0,5pts)

$(ds_{base} \perp r)$ et $(ds_{surface\ latérale} \parallel r)$ et le champ est radial (suivant le rayon $(E \parallel r)$)

$\vec{E} \perp \overrightarrow{ds_{\ base}} \Longrightarrow \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds_{base}} = 0$

$\vec{E} \parallel \overrightarrow{ds_{lat}}$ Donc : $\emptyset = \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds_{lat}} = \iint E.ds_{lat} = E.\iint ds_{lat} = E.S_{lat}$

$\Rightarrow \emptyset = \boldsymbol{E2\pi rh} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$ donc $\boldsymbol{E} = \frac{\sum \boldsymbol{Q_{int}}}{\boldsymbol{2\pi rh\varepsilon_0}}$ (0,5pts)

1-Le champ électrique :

1er cas r<R$_1$

$dq = \rho dv = \rho h 2\pi r dr \Rightarrow Q_{int} = \rho \iiint dv$(0,5pts)

$\Rightarrow Q_{int} = \rho \int_0^r 2\pi hrdr$ (0,25pts) $= \rho\pi hr^2 \Rightarrow E2\pi rh = \frac{\rho\pi hr^2}{\varepsilon_0}$

$\Longrightarrow \boldsymbol{E_1} = \frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{2\varepsilon_0}}\boldsymbol{r}$ (0,5pts)

2eme cas R$_1$ ≤ r<R$_2$

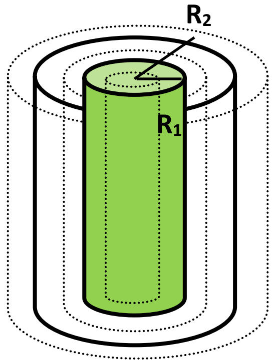
$Q_{int} = \iiint \rho dv$ (0,5pts) $= \rho \int_0^{R_1} 2\pi hrdr = \rho\pi hR_1^2$(0,25pts) $\Rightarrow E2\pi rh = \frac{\rho\pi hR_1^2}{\varepsilon_0}$

$\Longrightarrow \boldsymbol{E_2} = \frac{\boldsymbol{\rho R_1^2}}{\boldsymbol{2\varepsilon_0}}\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r}}$ (0,5pts)

3eme cas r≥R$_2$

$Q_{int} = Q_1 + Q_2$ (0,5pts)

$Q_1 = \iiint \rho dv = \rho \int_0^{R_1} 2\pi hrdr = \rho\pi hR_1^2$(0,25pts)



$dq_2 = \sigma ds \Rightarrow Q_2 = \sigma S = \sigma 2\pi R_2 h$ (0,25pts)

Donc

$Q_{int} = Q_1 + Q_2 = \rho\pi hR_1^2 + \sigma 2\pi R_2 h$

$E2\pi rh = \frac{\rho\pi hR_1^2 + \sigma 2\pi R_2 h}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boldsymbol{E_3} = \frac{\boldsymbol{\rho R_1^2}}{\boldsymbol{2\varepsilon_0}}\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r}} + \frac{\boldsymbol{\sigma R_2}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r}}$(0,5pts)

Bon courage

Le potentiel électrique v(r) en tout point de l'espace.

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}v \Rightarrow E = -\frac{dv}{dr}$ donc $v = -\int Edr$ (0,5pts)

<u>1er cas : r<R₁</u>

$V_1 = -\int E_1.dr \Longrightarrow V_1 = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\int rdr = -\frac{\boldsymbol{\rho}}{\boldsymbol{4\varepsilon_0}}\boldsymbol{r^2} + \boldsymbol{C_1}$ (0,5pts)

<u>2eme cas $R_1 \leq r < R_2$</u>

$V_2 = -\int E_2.dr = -\frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0}\int \frac{1}{r}.dr = -\frac{\boldsymbol{\rho R_1^2}}{\boldsymbol{2\varepsilon_0}}\boldsymbol{lnr} + \boldsymbol{C_2}$ (0,5pts)

<u>3eme cas $r \geq R_2$</u>

$E_3 = \frac{\boldsymbol{\rho R_1^2}}{\boldsymbol{2\varepsilon_0}}\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r}} + \frac{\boldsymbol{\sigma R_2}}{\boldsymbol{\varepsilon_0}}\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{r}} \Rightarrow V_3 = -\left(\frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0}\int \frac{1}{r}.dr + \frac{\boldsymbol{\sigma R_2}}{\varepsilon_0}\int \frac{1}{r}.dr\right)$

donc $\boldsymbol{V_3} = -\left(\frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0}\ln r + \frac{\boldsymbol{\sigma R_2}}{\varepsilon_0}\ln r\right) + \boldsymbol{C_3} \Rightarrow \boldsymbol{V_3} = -\left(\frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0} + \frac{\boldsymbol{\sigma R_2}}{\varepsilon_0}\right)\ln r + \boldsymbol{C_3}$ (0,5pts)

On ne peut pas utiliser le théorème de Gauss pour un cylindre de hauteur finie car dans ce cas nous n'avons une symétrie à n'importe quel point du cylindre, et sans avoir de symétrie, le théorème de Gauss ne peut pas être appliqué (0,5pts)

Distribution linéique : dq= λ dl , d$\vec{E}$ =$k\frac{dq}{r^2}\vec{u} = k\frac{\lambda dl}{r^2}\vec{u}$, dV= $k\frac{dq}{r} = k\frac{\lambda.dl}{r}$ (0,5pts)

Distribution surfacique : dq= $\boldsymbol{\sigma}$ ds ,d$\vec{E}$ = $k\frac{dq}{r^2}\vec{u} = k\frac{\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{ds}}{r^2}\vec{u}$, dV= $k\frac{dq}{r} = k\frac{\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{ds}}{r}$(0,5pts)

Distribution volumique : dq= ρ dv, d$\vec{E}$ = $k\frac{dq}{r^2}\vec{u} = k\frac{\rho\,\mathrm{dv}}{r^2}\vec{u}$, dV= $k\frac{dq}{r} = k\frac{\rho\,\mathrm{dv}}{r}$(0,5pts)

Bon courage