Exercice 01

Soit une pompe centrifuge débitant 30 l/s sous une charge de 30 m, dont les caractéristiques géométrique sont :

$\beta_1 = \beta_2$; $b_1 = 2 b_2 = 25\ mm$, $R_1 = \frac{R_2}{3} = 50\ mm$, $\alpha_1 = 9$

1- Déterminer l'angle β_2 et la vitesse de rotation N (tr/

2- Déterminer la puissance sur l'arbre

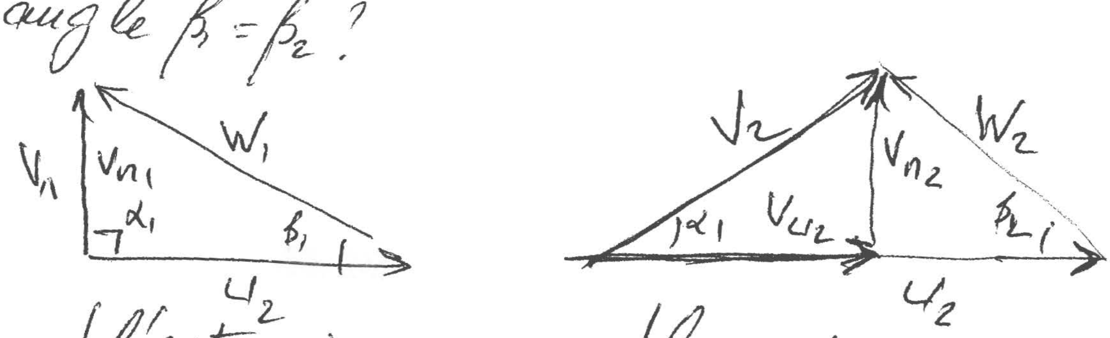
On donne : η_h rendement hydraulique $\eta_h = 0{,}75$

" volumique $\eta_v = 0{,}95$

" mécanique $\eta_m = 0{,}93$.

Solution

1.a. L'angle $\beta_1 = \beta_2$?



(l'entrée) (la sortie)

✓ $\eta_h = \frac{H}{H_{th}} \Longrightarrow H_{th} = \frac{H}{\eta_h} = \frac{30}{0{,}75} = 40\ mce$

✓ $\eta_v = \frac{Q}{Q'} \Longrightarrow Q' = \frac{Q}{\eta_v} = \frac{30}{0{,}95} = 31{,}58\ l/s$

Q : débit dans la conduite , Q' : débit dans la roue

$Q' = Q + q$ q : perte de débit

donc $\boxed{H_{th} = 40\ mce \text{ et } Q' = 31{,}58\ l/s}$

$\alpha_1 = 90°$ donc l'écoulement est radial à l'entrée de la roue donc $V_{u_1} = 0$ et $V_1 = V_{n_1}$

donc $H_{th} = \frac{1}{g}(U_2 V_{u_2}) \Rightarrow U_2 V_{u_2} = g \cdot H_{th} = 9{,}81 \cdot 40$

$$\boxed{U_2 \cdot V_{u_2} = 392{,}4}$$

✓ Le débit Q'

- $Q' = 2\pi \cdot R_1 \, b_1 \cdot V_{n_1} = 31{,}58 \Rightarrow V_{n_1} = V_1 = \dfrac{Q'}{2\pi \cdot R_1 \, b_1}$

$$V_{n_1} = V_1 = \frac{31{,}58 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}025 \cdot 0{,}05} = 4{,}023 \text{ m/s}$$

$$\boxed{V_1 = 4{,}023 \text{ m/s}}$$

de même $Q' = 2\pi R_2 \cdot b_2 \cdot V_{n_2} \Rightarrow V_{n_2} = \dfrac{Q'}{2\pi \cdot R_2 \cdot b_2}$

$$V_{n_2} = \frac{31{,}58 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot (3 \cdot 0{,}05) \cdot \left(\frac{0{,}025}{2}\right)} = 2{,}68 \text{ m/s}$$

$$\boxed{V_{n_2} = 2{,}68 \text{ m/s}}$$

on sait que $U = \omega R$ c.à.d $U_1 = \omega R_1$ et $U_2 = \omega R_2$

$$\Rightarrow \omega = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_2}{R_2} \Rightarrow \boxed{U_2 = U_1 \cdot \frac{R_2}{R_1}}$$

$\beta_1 = \beta_2$ avec $tg\,\beta_1 = \dfrac{V_1}{U_1}$ et $tg\,\beta_2 = \dfrac{V_{n_2}}{(U_2 - V_{u_2})}$

(des triangle des vitesse à la l'entrée et à la sortie)

alors que $U_2 V_{u_2} = 392{,}4 \Rightarrow \boxed{V_{u_2} = \dfrac{392{,}4}{U_2}}$

Puisque $\beta_1 = \beta_2 \Longrightarrow tg\beta_1 = tg\beta_2$

d'ou $\boxed{\dfrac{V_1}{U_1} = \dfrac{U_2 \cdot V_{n2}}{U_2^2 - 392{,}4}}$ avec $\boxed{U_2 = U_1 \cdot \dfrac{R_2}{R_1}}$

$$\Longrightarrow \frac{V_1}{U_1} = \frac{U_1 \frac{R_2}{R_1} \cdot V_{n2}}{U_1^2 \cdot \frac{R_2^2}{R_1^2} - 392{,}4}$$

$$\Longrightarrow U_1^2 \cdot \frac{R_2}{R_1} \cdot V_{n2} = \left[U_1^2 \cdot \frac{R_2^2}{R_1^2} - 392{,}4\right] \cdot V_1$$

$$\Longrightarrow U_1^2 \cdot \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{V_{n2}}{V_1} = U_1^2 \cdot \frac{R_2^2}{R_1^2} - 392{,}4$$

$$\Longrightarrow U_1^2 \left(\frac{R_2^2}{R_1^2} - \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{V_{n2}}{V_1}\right) = 392{,}4$$

$$\Longrightarrow U_1 = \sqrt{\frac{392{,}4}{\frac{R_2^2}{R_1^2} - \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{V_{n2}}{V_1}}} = \sqrt{\frac{392{,}4}{3^2 - 3 \cdot \frac{3}{4{,}02}}} = 7{,}62 \text{ m/s}$$

$$\boxed{U_1 = 7{,}62 \text{ m/s}}$$

✓ La puissance sur l'arbre

La puissance fourni par la pompe et $P_f = \rho g H \cdot Q$

$P_f = 10^3 \cdot 9{,}81 \cdot 30 \cdot 30 \cdot 10^{-3} = 8{,}829$ Kw

$\eta_G = \eta_h \cdot \eta_v \cdot \eta_m = 0{,}663$

La puissance sur l'arbre

$P_{ar} = \dfrac{8{,}829}{0{,}663} = 13{,}32$ Kw $\qquad \boxed{P_{arb} = 13{,}32 \text{ Kw}}$

Exercice 02

une pompe centrifuge débite 1440 l/min sous une hauteur manométrique de 27 m avec un rendement de 79 %. On admet que la perte interne vaut 5 fois l'énergie cinétique dans son mouvement relatif à la sortie.

Le diamètre de celle-ci est $D_2 = 0{,}2\,m$ et la section à la sortie est $S_2 = 0{,}2\,D_2^2$

1. Calculer l'angle β_2
2. Calculer la vitesse de rotation N (tr/min)

Solution

1. L'angle β_2

- $Q = V_{n_2} \cdot S_2 \Rightarrow V_{n_2} = \dfrac{Q}{S_2} = \dfrac{0{,}024}{0{,}2 \cdot 0{,}2^2} = 3\,m/s$

$$\boxed{V_{n_2} = 3\,m/s}$$

- La perte $\Delta H = 5\,\dfrac{W_2}{2g}$ (5 fois l'énergie cinétique relative)

- $\eta = \dfrac{H}{H_{th}} \Rightarrow H_{th} = \dfrac{H}{\eta} = \dfrac{27}{0{,}79} = \underline{34{,}18\,mce}$

de plus $H_{th} = H + \Delta H \Rightarrow \Delta H = H_{th} - H$

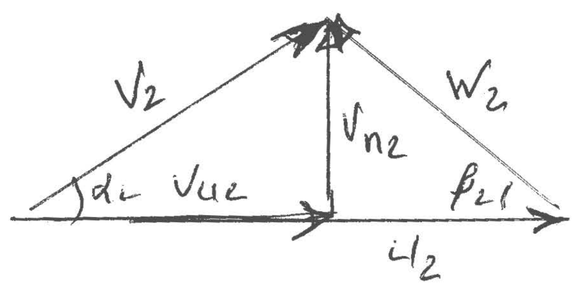
et $\Delta H = 5\,\dfrac{W_2}{2g}$

$$\Rightarrow W_2 = \sqrt{\frac{2}{5}(H_{th} - H) \cdot g} = \sqrt{\frac{2}{5}(34{,}18 - 27) \cdot 9{,}81}$$

$$\boxed{W_2 = 5{,}31\,m/s}$$

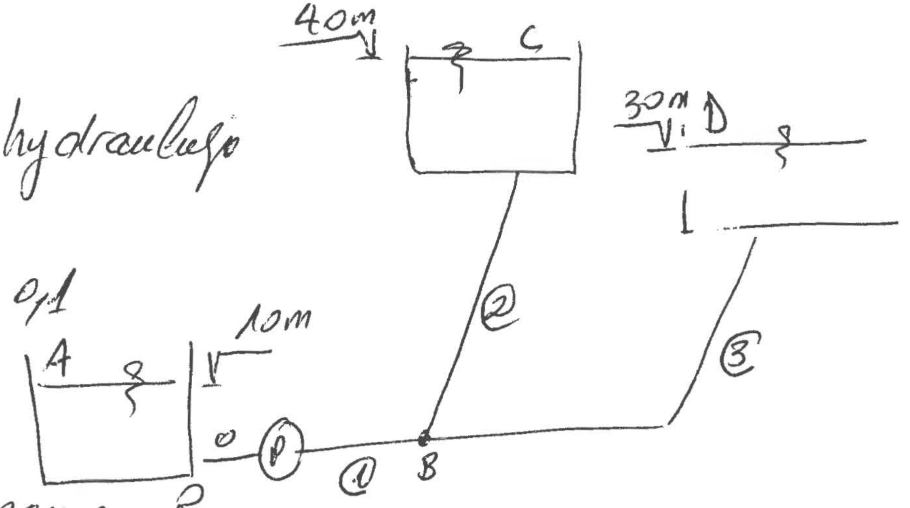
- $\sin \beta_2 = \dfrac{V_{n2}}{W_2} = \dfrac{3}{5{,}31} = 0{,}565$

donc $\boxed{\beta_2 = 34{,}05 \simeq 34°}$



Exercice 03

Soit le système hydraulique en face :



On donne $R(01) = 0$, $R_1 = 0{,}1$

$R_2 = R_3 = 0{,}15$ m.s/l

la caractéristique de la pompe P

est $h_p = 50 - 0{,}1\,Q^2$; Q en l/s

Determiner Q1, Q2 et Q3

Solution Analytique

Noeud B : $Q_1 = Q = Q_2 + Q_3 \longrightarrow I$

Eq Bernoulli entre A.C : Patm

$$\cancel{\frac{P_A}{\rho g}} + z_A + \cancel{\frac{V_A^2}{2g}} = \cancel{\frac{P_C}{\rho g}} + z_C + \cancel{\frac{V_C^2}{2g}} + \Delta H_{AC} - h_p$$

$$h_p = (z_C - z_A) + R_1 Q_1^2 + R_2 Q_2^2 = 30 + 0{,}1\,Q^2 + 0{,}15\,Q_2^2$$

$$50 - 0{,}1\,Q^2 = 30 + 0{,}1\,Q^2 + 0{,}15\,Q_2 \Rightarrow 0{,}2\,Q^2 + 0{,}15\,Q_2 = 20$$

$$\Rightarrow Q^2 + 0{,}75\,Q_2^2 - 100 = 0 \quad — \quad II$$

Eq. de Bernoulli ent A et D

$$h_p = (z_D - z_A) + R_1 Q_1^2 + R_3 Q_3^2 = 20 + 0{,}1\,Q^2 + 0{,}15\,Q_3 = h_p$$

$$\Rightarrow 50 - 0{,}1\,Q^2 = 20 + 0{,}1\,Q^2 + 0{,}15\,Q_3$$

$$\Rightarrow Q^2 + 0{,}75\,Q_3^2 - 150 = 0 \quad — \quad III$$

On obtient 3 équations à 3 inconnues

$$\begin{cases} Q = Q_2 + Q_3 & — I \Rightarrow Q_2 = Q - Q_3 \ — 1 \\ Q^2 + 0{,}75\,Q_2 - 150 = 0 & \to II \\ Q^2 + 0{,}75\,Q_3 - 100 = 0 & — III \Rightarrow Q = \sqrt{100 - 0{,}75\,Q_3^2} \ — 1 \end{cases}$$

IV ou $V \iff Q^2 + 0,75(Q - Q_3)^2 = 150$

$\Rightarrow Q^2 + 0,75(Q^2 + Q_3^2 - 2QQ_3) = 150$

$\Rightarrow 1,75Q^2 + 0,75Q_3^2 - 1,5QQ_3 = 150$ — VI

I ou $VI \iff 1,75(100 - 0,75Q_3^2) + 0,75Q_3^2 - 1,5Q_3\sqrt{100 - 0,75Q_3^2} = 1$

$\Rightarrow 175 - 1,3125Q_3^2 + 0,75Q_3^2 - 150 = 1,5Q_3\sqrt{100 - 0,75Q_3^2}$

$$\frac{25 - 0,5625\,Q_3^2}{1,5} = Q_3\sqrt{100 - 0,75Q_3^2}$$

$\Rightarrow (16,667 - 0,375Q_3^2)^2 = \left(Q_3\sqrt{100 - 0,75Q_3^2}\right)^2$

$\Rightarrow 277,778 + 0,141\,Q_3^4 - 12,5Q_3^2 = 100Q_3^2 - 0,75Q_3^4$

$\Rightarrow 0,891\,Q_3^4 - 112,5Q_3^2 + 277,778 = 0$

changeant la variable $Q_3 = \sqrt{q_3}$

$\Rightarrow 0,891\,q_3^2 - 112,5\,q_3^2 + 277,778 = 0$

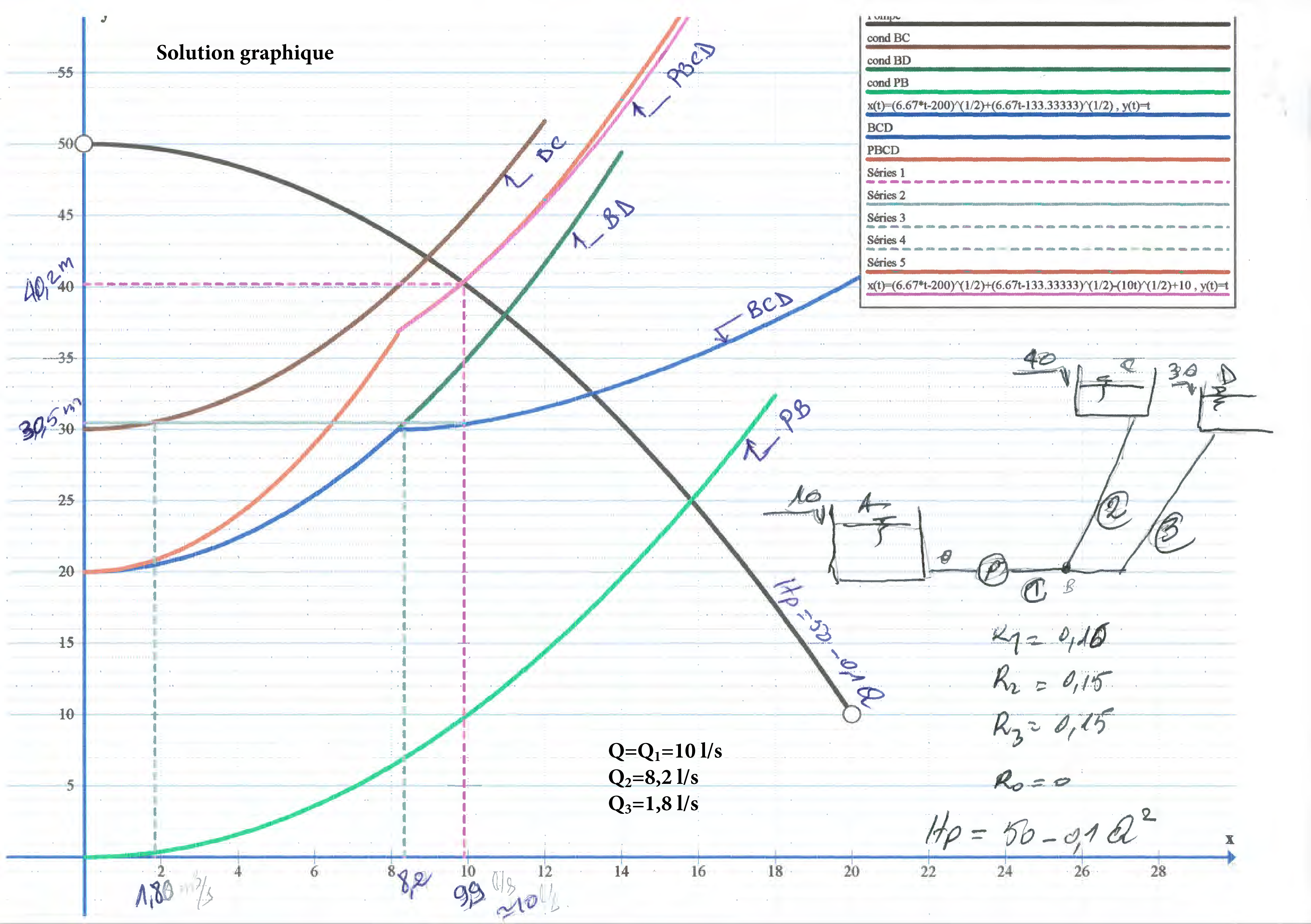
$\Delta = 11666,25$ et $\sqrt{\Delta} \simeq 108$.

$$q_3 = \frac{112,5 \pm 108}{2 \cdot 0,891} \quad \begin{cases} q_3 = 2,525 \longrightarrow Q_3 = 1,589 \simeq 1,6 \ l/s \\ \text{ou} \\ q_3 = 123,73 \Longrightarrow Q_3 = 11,123 \ l/s \end{cases}$$

ainsi $Q = \sqrt{100 - 0,75Q_3} \Rightarrow \begin{cases} Q = 9,94 \ l/s \\ \text{ou} \ Q = 2,68 \ l/s \ \text{impossible car} < Q_3 \end{cases}$

donc $Q_3 = 1,6 \ l/s$ et $Q = 9,94 \ l/s$.

et $Q_2 = Q - Q_3 = 9,94 - 1,6 = 8,34 \ l/s$



Solution graphique
Pompe
cond BC
cond BD
cond PB
x(t)=(6.67*t-200)^(1/2)+(6.67t-133.33333)^(1/2) , y(t)=t
BCD
PBCD
Séries 1
Séries 2
Séries 3
Séries 4
Séries 5
x(t)=(6.67*t-200)^(1/2)+(6.67t-133.33333)^(1/2)-(10t)^(1/2)+10 , y(t)=t
BC
PBCD
BD
BCD
PB
Hp = 50 - 0,1 Q
40,2 m
30,5 m
1,80 m³/s
8,2
9,9 l/s
≃10 l/s
Q=Q1=10 l/s
Q2=8,2 l/s
Q3=1,8 l/s
40
30
10
A
C
D
P
B
1
2
3
R1 = 0,10
R2 = 0,15
R3 = 0,15
R0 = 0
Hp = 50 - 0,1 Q²
x
y