Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2022/2023
Durée : 01 h 30min
1ère Année LMD-MI

Rattrapage de Mécanique

Exercice 1 : 05 Pts

L'équation de la trajectoire d'un mobile M dans le plan (oxy) est $\mathbf{y=x^2+2}$, avec **x=1-t**.
Trouver :

1- Les composantes de la vitesse et son module v.
2- Les composantes de l'accélération et son module a.
3- La nature du mouvement
4- Les accélérations tangentielle $\overrightarrow{a_T}$ et normale $\overrightarrow{a_N}$
5- Le rayon de courbure R.

Exercice 2: 05 Pts

L'énergie E d'un photon est donnée par l'expression $E=h\nu$, où h est la constante du Planck et ν la fréquence du photon.

1- Donner la dimension de h.
2- Trouver l'expression de la longueur d'onde λ en la supposant de la forme λ=k.$h^x m^y v^z$.

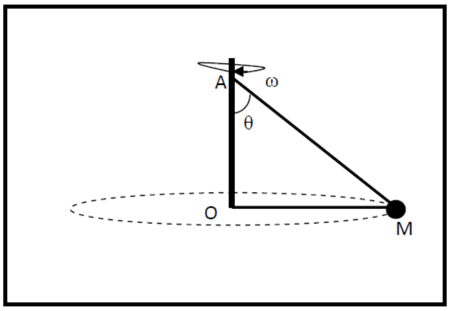
avec k est une constante sans dimension, m représente la masse et v : la vitesse du photon.

3- Déterminez l'incertitude relative sur λ en fonction de $\Delta h, \Delta m, \Delta v$.

Exercice 3 :03 pts

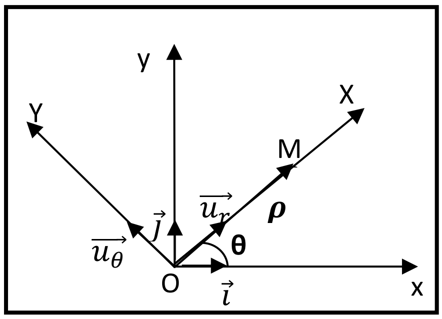
Une balle de masse m est attachée par deux fils (Am et Om) à un poteau vertical. Tout le système tourne avec une vitesse angulaire ω constante autour de l'axe du poteau
(on connait g l'accélération de la pesanteur, θ et $L = |\overrightarrow{OM}|$)

1- En supposant ω suffisamment grande pour maintenir les deux fils tendus, trouver la force (tension du fil) que chaque fil exerce sur la balle



Exercice 4 :07 pts

A) Un point matériel M est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x,y).
1. Ecrire x et y en fonction des coordonnées polaires ρ et θ.
2. Donner l'expression des vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ en fonction des vecteurs unitaires $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.



B) Le point M se déplace sur l'axe (OX), d'un repère (OXYZ) qui tourne avec une vitesse angulaire ω constante autour de l'axe (Oz) dans le plan (Oxy) tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \boldsymbol{t^2}\overrightarrow{\boldsymbol{u_r}}$.

- Calculer la vitesse relative $\overrightarrow{v_r}$ et la vitesse d'entrainement $\overrightarrow{v_e}$ et déduire la vitesse absolue $\overrightarrow{v_a}$.
- Calculer l'accélération relative $\overrightarrow{a_r}$ l'accélération d'entrainement $\overrightarrow{a_e}$ et l'accélération de Coriolis $\overrightarrow{a_c}$ et déduire la vitesse absolue $\overrightarrow{v_a}$.

Bon courage

Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2022/2023
Durée : 01 h 30min
1ère Année LMD-MI

Corrigé du rattrapage de Mécanique

Exercice 1: (05 pts)

1- **L'équation de la trajectoire 0.5 pts**

Nous avons x(t) =t^2 -1 et y = 2t donc t=y/2 (0.25pts)

Donc x=(y/2)^2-1 $\Rightarrow x = \frac{y^2}{4} - 1$ (0.25pts)

2- **Les composantes de la vitesse et son module 0.75 pts**

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} \\ v_y = \frac{dy}{dt} \end{cases} \quad (0.25pts) \Rightarrow \begin{cases} v_x = 2t \\ v_y = 2 \end{cases} \quad (0.25pts)$$

Le module de la vitesse :

$\vec{v} = 2t\,\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} \Rightarrow \ |\vec{v}| = v = \sqrt{4t^2 + 4}$ (0.25pts)

3- **les composantes de l'accélération et son module 0.75 pts**

$$\begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} \end{cases} \quad (0.25pts) \quad \Rightarrow \begin{cases} a_x = 2 \\ a_y = 0 \end{cases} \quad (0.25pts)$$

$\vec{a} = 2\vec{\imath} \Rightarrow |\vec{a}| = a = 2\ m/s^2$ (0.25pts)

4- **La nature du mouvement 0.5 pts**

$\vec{a}.\vec{v} = 2t\,.\,2 = 4t > 0$ (0.25pts) $\Rightarrow$ Le mouvement est uniformément accéléré.(0.25pts)

5- **les accélérations normale et tangentielle**

- **L'accélération tangentielle 01 pts**

$$a_T = \frac{d|\vec{v}|}{dt} \ (0.25pts) \Rightarrow a_T = \frac{d\left(\sqrt{4t^2+4}\right)}{dt} = \frac{4t}{\sqrt{4t^2+4}} = \frac{4t}{v} \quad (0.75pts)$$

- **L'accélération normale 01 pts**

Nous avons $a^2 = a_T^2 + a_N^2$ donc $a_N^2 = a^2 - a_T^2$ (0.5pts)

$$a_N^2 = 4 - \frac{16\,t^2}{4t^2+4} \Rightarrow a_N^2 = \frac{16}{v^2} \Rightarrow a_N = \frac{4}{v} \quad (0.5pts)$$

6- **Le rayon de courbure 0.5 pts** $a_N = \frac{v^2}{R}$ (0.25pts) $\Rightarrow R = \frac{v^2}{a_N} = \frac{v^3}{4}$ (0.25pts)

Bon courage

Exercice 2 : 05 pts

1- l'expression de la fréquence f **: (3,5 pts)**

$$\begin{cases} [\mathbf{f}] = \mathbf{T}^{-1} \ (0.25\text{pts}) \\ [F] = [\mathbf{m}][\mathbf{a}] = \mathbf{MLT}^{-2} (0.25\text{pts}) \\ [\mathbf{L}] = \mathbf{L} \ (0.25\text{pts}) \\ [\rho] = \frac{[\mathbf{m}]}{[\mathbf{V}]} = \mathbf{ML}^{-3} (0.25\text{pts}) \\ [\mathbf{K}] = \mathbf{1} (0.25\text{pts}) \end{cases}$$

On considère que la formule est homogène

$[\mathbf{f}] = [\mathbf{K}][\mathbf{F}]^{\mathbf{a}}[\mathbf{L}]^{\mathbf{b}}[\boldsymbol{\rho}]^{\mathbf{c}}$ (0.25pts)

$\mathbf{T}^{-1} = (\mathbf{MLT}^{-2})^{a}(\mathbf{L})^{b}(\mathbf{ML}^{-3})^{c}$

$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{M}^{\mathbf{a+c}}\, \mathbf{L}^{\mathbf{a+b-3c}}\, \mathbf{T}^{-2\mathbf{a}}$ (0.25pts)

Par identification on a

$$\begin{cases} \mathbf{a} + c = 0 \ (0.25\text{pts}) \\ \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{3c} = \mathbf{0} \quad (0.25\text{pts}) \\ -1 = -2a \ (0.25\text{pts}) \end{cases} \quad \textbf{donc} \quad \begin{cases} \mathbf{a} = \frac{1}{2} (0.25\text{pts}) \\ \mathbf{b} = -\mathbf{2} \quad (0.25\text{pts}) \\ \mathbf{c} = -\frac{1}{2} (0.25\text{pts}) \end{cases}$$

$\mathbf{f} = \mathbf{K}\mathbf{F}^{\frac{1}{2}}\mathbf{L}^{-2}\boldsymbol{\rho}^{-\frac{1}{2}}$ **Ou bien** $\mathbf{f} = \frac{\mathbf{K}}{\mathbf{L}^2}\sqrt{\frac{\mathbf{F}}{\boldsymbol{\rho}}}$ (0.25pts)

2- **L'incertitude relative** Δf/f en fonction de ΔF, ΔL et Δ ρ.**(1 pt)**

Méthode logarithmique :

$logf = \frac{1}{2}logF - \frac{1}{2}log\rho - 2logL$ (0.25pts)

$$\frac{df}{f} = \frac{dF}{2F} - \frac{d\rho}{2\rho} - 2\frac{dL}{L} \quad (0.25\text{pts})$$

$$\frac{\Delta f}{f} = \left|\frac{\Delta F}{2F}\right| + \left|-\frac{\Delta\rho}{2\rho}\right| + \left|-2\frac{\Delta L}{L}\right| = \frac{\Delta F}{2F} + \frac{\Delta\rho}{2\rho} + 2\frac{\Delta L}{L} \ (0.5\text{pts})$$

3- **L'incertitude absolue** Δf **(0,5pts)**

$$\Delta f = f\left(\frac{\Delta F}{2F} + \frac{\Delta\rho}{2\rho} + 2\frac{\Delta L}{L}\right) = \mathrm{K}\mathrm{F}^{\frac{1}{2}}\mathrm{L}^{-2}\rho^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\Delta F}{2F} + \frac{\Delta\rho}{2\rho} + 2\frac{\Delta L}{L}\right) (0.5\text{pts})$$

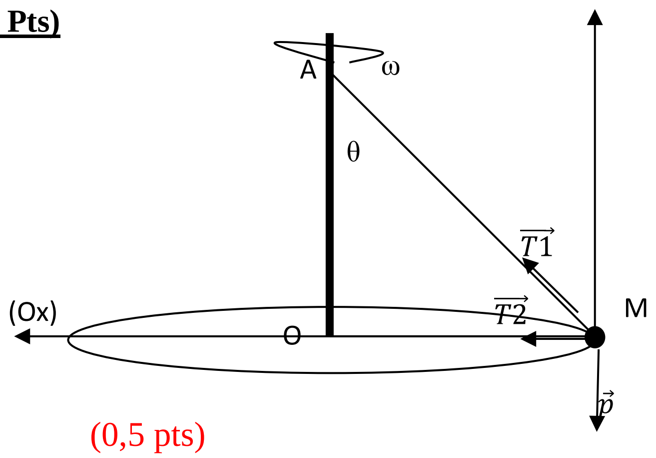
$$\Delta f = K\frac{1}{2}F^{\frac{-1}{2}}L^{-2}\rho^{\frac{-1}{2}}\Delta F + K\frac{1}{2\rho}F^{\frac{1}{2}}L^{-2}\rho^{\frac{-3}{2}}\Delta\rho + 2KF^{\frac{1}{2}}L^{-3}\rho^{\frac{-1}{2}}\Delta L$$

Bon courage

Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2022/2023
Durée : 01 h 30min
1ère Année LMD-MI

<u>Exercice 3 (03 Pts)</u>



(0,5 pts)

1-Trouvons la force (tension du fil) que chaque fil exerce sur la boule **<u>(2,5 pts)</u>**
D'après le principe fondamental de la dynamique

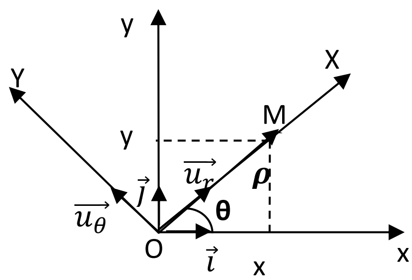
$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{p} + \overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2} = m\vec{a}$ (0,5 pts)
Le mouvement de la boule est circulaire donc l'accélération dans ce cas est l'accélération normale a_N qui est dirigé vers le centre du cercle (avec a_N.=v^2/R) (0,25 pts)
On choisit le repère tel que
(Ox) est suivant l'accélération normale et il est dirigé vers le centre du cercle
(Oy) est perpendiculaire à (Ox)

Sur (Ox) $T_2+T_1 \sin\theta = m\, a_N \Rightarrow T_2 + T_1 \sin\theta = m\frac{v^2}{R}$ (0,25 pts)

Sur (Oy) $p - T_1 \cos\theta = 0 \Rightarrow mg = T_1 \cos\theta$ (0,25 pts)
Donc $T_1 = \frac{mg}{\cos\theta}$(0,25 pts)
$T_2 = m\frac{v^2}{R} - T_1 \sin\theta = m\frac{v^2}{R} - \frac{mg}{\cos\theta} \sin\theta$ (0,5 pts)
Donc $T_2 = m\frac{v^2}{R} - m\, g\, tg\,\theta$ (0,5 pts)

<u>Exercice 4 : 07 Pts</u>

A. Les relations de passage entre les coordonnées polaires et les coordonnées cartésiennes (x et y en fonction de ρ et θ et $\overrightarrow{u_\rho}$et $\overrightarrow{u_\theta}$ e(0,25 pts)n fonction de $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$) (**<u>03 Pts)</u>**



1. La relation entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires.
$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ (01 pt)
2. L'expression des vecteurs unitaires $\overrightarrow{U_r}\ et\ \overrightarrow{U_\theta}$ en fonction des vecteurs unitaires$\vec{\imath}\ et\ \vec{\jmath}$.

$\overrightarrow{OM}/pol = \rho\vec{U}_r$ (0,5 pts)
$\overrightarrow{OM}/cart = x_M\vec{\imath} + y_M\vec{\jmath} = \rho(\cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath})$ (0,5 pts)

Par identification $\begin{cases} \overrightarrow{U_r} = \cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath} \\ \overrightarrow{U_\theta} = \frac{d\overrightarrow{U_r}}{d\theta} = -\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath} \end{cases}$ (01 pt)

B . $\boldsymbol{\overrightarrow{OM} = t^2\overrightarrow{u_r}}$

Bon courage

Calculons la vitesse relative, d'entrainement et absolue (02 Pts)

- Vitesse relative :

$\vec{v_r} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}/(OXY)$ (0,25 pts) $= \frac{d(t^2)}{dt}\overrightarrow{U_r} \Rightarrow \vec{v_r} = 2t\overrightarrow{U_r}$ (0,25 pts)

- Vitesse d'entrainement :

$\vec{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}$(0,25 pts)

$\overrightarrow{OO'} = \vec{0}$ (0,25 pts)donc $\vec{v_e} = \vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}$

$\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{U_x} & -\overrightarrow{U_y} & \overrightarrow{U_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ \boldsymbol{t^2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(-\omega \boldsymbol{t^2})\,\overrightarrow{U_y}$ Donc $\vec{v_e} = \omega\,\boldsymbol{t^2}\,\overrightarrow{U_y}$ (0,5 pts)

- Vitesse absolue :

$\vec{v_a} = \vec{v_r} + \vec{v_e}$(0,25 pts) $= 2t\overrightarrow{U_x} + \omega\,\boldsymbol{t^2}\,\overrightarrow{U_y}$ (0,25 pts)

Calculons l'accélération relative, d'entrainement, de Coriolis et absolue (02 Pts)

L'accélération relative

$\vec{a_r} = \frac{d\vec{v_r}}{dt}/(R')$(0,25 pts) avec $\vec{v_r} = 2t\overrightarrow{U_x}$ Donc $\vec{a_r} = 2\overrightarrow{U_x}$ (0,25 pts)

L'accélération d'entrainement

$\vec{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \vec{\omega}\Lambda(\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\Lambda\overrightarrow{O'M}$ (0,25 pts)

$\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} = \vec{0}\,, \frac{d\vec{\omega}}{dt}\Lambda\overrightarrow{O'M} = \vec{0}$ car ω constante (0,25 pts)

Et $\vec{\omega}\Lambda(\vec{\omega}\Lambda\overrightarrow{O'M}) = \vec{\omega}\Lambda\omega t^2\overrightarrow{U_y} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{U_x} & \overrightarrow{U_y} & \overrightarrow{U_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & \omega t^2 & 0 \end{vmatrix} = -\omega^2 t^2\overrightarrow{U_x}$ (0,25 pts)

Donc $\vec{a_e} = -\omega^2 t^2\overrightarrow{U_x}$

L'accélération de Coriolis

$\vec{a_c} = 2\vec{\omega}\Lambda\vec{v_r}$(0,25 pts) $= 2\begin{vmatrix} \overrightarrow{U_x} & \overrightarrow{U_y} & \overrightarrow{U_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ 2t & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4t\omega\overrightarrow{U_y}$ (0,25 pts)

L'accélération absolue

$\vec{a_a} = \vec{a_r} + \vec{a_c} + \vec{a_e} = 2\overrightarrow{U_x} - \omega^2 t^2\overrightarrow{U_x} + 4t\omega\overrightarrow{U_y}$ (0,25 pts)

Alors$\vec{a_a}$=$(2 - \omega^2 t^2)\overrightarrow{U_x} + 4t\,\omega\overrightarrow{U_y}$

Bon courage