

Chapitre 1

Principes généraux

CHAPITRE I

PRINCIPES GENERAUX

1. Définitions

1.1 Convertisseurs électromécaniques

On définit une machine électrique comme étant un dispositif de conversion mécanique/électrique ou électrique/mécanique. Ces deux formes d'énergie ne sont pas stockables, la conversion se fait donc en passant par une forme d'énergie intermédiaire, pouvant être électrostatique ou électromagnétique stockable.

En fait la plus grande partie de la conversion de l'énergie est de loin électromagnétique, car on sait pas stocker dans la matière des quantités suffisantes d'énergie électrostatique pour produire des forces mécaniques de forte intensité. Les convertisseurs électromécaniques étant réversibles, les deux conversions d'énergie : électromécanique (moteurs) et mécanique-électrique (générateurs), sont possibles dans les mêmes structures de machines.

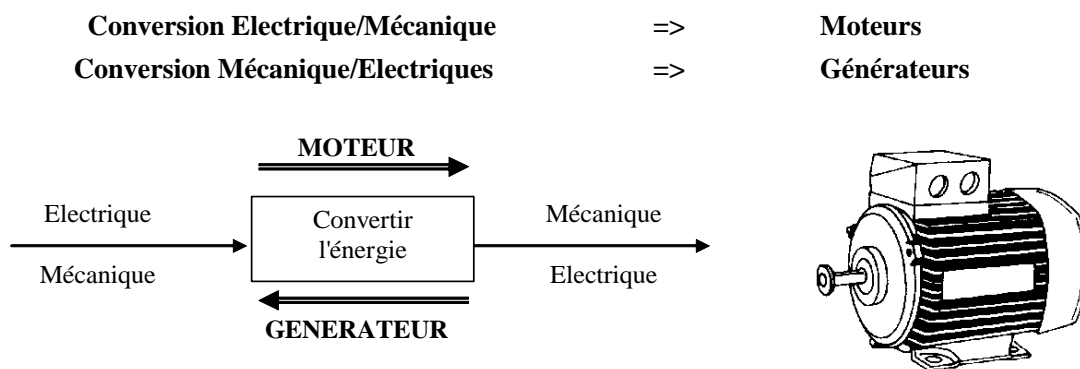


Figure 1. Définition des conversions électromécaniques

1.2 Classification des machines électriques

Les machines électriques sont classées en :

- ✓ **Génératrices** : si elles transforment de l'énergie mécanique en énergie électrique (les dynamos génèrent un courant continu, les alternateurs un courant alternatif)
- ✓ **Réceptrices** : si elles transforment de l'énergie électrique en énergie mécanique (ce sont les *moteurs électriques* à courant continu ou alternatif, tournant ou linéaires)
- ✓ **Transformatrices** : si l'énergie électrique entrant dans la machine est restituée en électrique (les convertisseurs tels que les redresseurs, les onduleurs et les hacheurs).

Cette conversion d'énergie s'accompagne de pertes sous forme de chaleur dans la machine électrique.

La structure des machines électriques comprend toujours un circuit magnétique, lieu de stockage et de la conversion d'énergie et un ou deux bobinages excitant le circuit magnétique.

Le circuit magnétique comprend toujours une partie ferromagnétique fixe, *le stator*, une partie ferromagnétique mobile, *le rotor*, et un entrefer coaxial (milieu de perméabilité μ_0). Les parties ferromagnétiques ont pour rôle de canaliser le flux magnétique.

L'entrefer est le lieu de stockage principal et donc de conversion de l'énergie magnétique. Il est également nécessaire pour que le rotor puisse être mécaniquement indépendant du stator et tourner librement autour de son axe (ou se déplacer en translation dans le cas d'un convertisseur linéaire). Il est de largeur constante (machines à pôles lisses) ou variable (machines à pôles saillants).

Les circuits magnétiques sont constitués de tôles en acier doux et le plus souvent feuilletés car sièges de pertes ferromagnétiques (pertes par hystérésis et courant de Foucault) ou aimants permanents. Les tôles sont magnétisées par des bobinages fortement inductifs, placés sur le rotor et le stator, recevant l'énergie électrique et qui sont aussi siège de pertes joules. Les circuits électriques sont donc essentiellement caractérisés par leurs résistances électriques, leurs inductances propres et mutuelles.

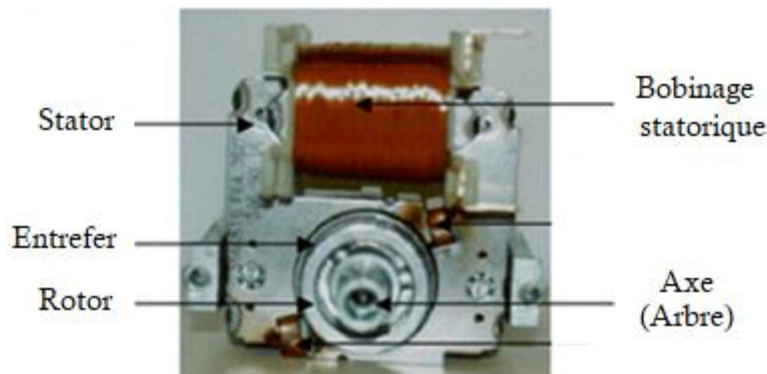


Figure 2. Petit moteur électrique utilisé dans l'électroménager

Lorsque le flux magnétique est constant, ou varie lentement, dans un tronçon du circuit, ce dernier peut être réalisé dans un circuit massif. Pour des raisons économiques toutefois, les opérations de poinçonnage et de découpage étant moins onéreuse que l'usinage complet d'une pièce massive, on réalise très souvent sous forme d'un empilage de tôles minces des circuits magnétiques traversés par un flux constant.

Lorsque le flux varie rapidement, par exemple de manière sinusoïdale en fonction du temps, à la fréquence du réseau, l'élément de circuit magnétique concerné doit être obligatoirement feuilleté sous peine de voir apparaître des pertes par courants de Foucault inadmissibles.

1.3 Processus d'aimantation

Les circuits magnétiques sont réalisés en matériaux ferromagnétiques présentant une aimantation importante, sous l'action d'un champ magnétique extérieur, même relativement faible. La courbe d'aimantation $B=f(H)$ de ces matériaux présente deux types de non-linéarité qui en limitent les possibilités d'emploi et compliquent les calculs. Les matériaux entrant dans la constitution de circuits magnétiques peuvent être classés en deux grandes familles : les matériaux magnétiques doux et les matériaux magnétiques durs.

1.4 Rappels sur les circuits magnétiquement couplés

1.4.1 Flux magnétique (ou "flux d'induction")

Considérons un circuit (C) et une surface quelconque (S) qui s'appuie sur lui.

- Relation du flux :

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Si le circuit est plan (uniforme), la définition du flux soit :

$$\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B \cdot S \cdot \cos \theta = B_n \cdot S$$

B_n : Composante normale du vecteur \vec{B} sur le vecteur axial \vec{B} de la surface du circuit (C).

Dans le cas où : $\vec{B} \parallel \vec{S} \Rightarrow \Phi = B \cdot S$

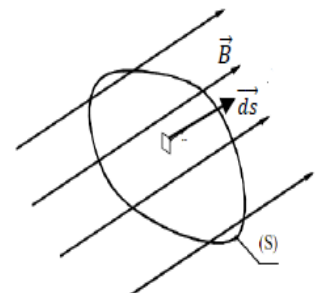


Figure 3. Définition du flux

1.4.2 Loi d'Ampère

Une bobine à N spires autour d'un noyau de section (S) constante alimentée par une source de tension parcourue par un courant i , dont les lignes d'induction sont-elles même et couplées avec la bobine inductrice.

$$\int_C H \cdot dl = \sum N \cdot i$$

La force magnétomotrice F (F.m.m.) produite est défini par :

$$\xi = N.i = \int_C H.dl = \sum N.i$$

où si l'induction magnétique B est telle que $\vec{B} \perp \vec{S}$, le flux magnétique s'écrit : $\Phi = B.S = \mu.H.S$

Donc on peut écrire pour un circuit magnétique homogène :

$$\Phi = \frac{N.i}{\frac{l}{\mu_0 \cdot \mu_r}} = \frac{\xi}{\mathfrak{R}}$$

μ est la perméabilité magnétique du matériau, elle s'exprime par le produit de la perméabilité du vide μ_0 , exprimée en Henry par mètre et de la perméabilité relative μ_r (sans dimension) : $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$ ($\mu_0 = 4.\pi.10^{-7}$ H/m).

\mathfrak{R} désigne la reluctance magnétique associée au noyau, elle permet d'introduire une proportionnalité entre le flux d'induction et force magnétomotrice associée :

$$\mathfrak{R} = \frac{l}{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot S}$$

Le théorème d'Ampère permet de déterminer la valeur du champ magnétique grâce à la donnée des paramètres de circuit électriques.

I.4.3 Tension induite dans un circuit électrique

La variation du flux dans un circuit électrique engendrera une tension appelée "*Force électromotrice induite*" (notée : F.E.M.)

- **La loi de Faraday :** Pour les circuits filiformes bobinés, la force électromotrice induite s'exprime sous la forme suivante :

$$e = N \cdot \frac{d\Phi}{dt}$$

N désignant le nombre de spires et Φ le flux totalisé couplé au circuit.

- **La loi de Lenz :** Si le circuit est fermé, il apparait un courant induit dont le sens est tel qu'il tend à s'opposer à la variation de flux qui l'a fait naître.

On met souvent le signe (-) pour rappeler cet effet d'opposition.

Dans un circuit électrique constitué par une bobine à N spires concentriques couplées avec le même flux Φ circulant dans le circuit magnétique, le flux totalisé se calcule simplement par la relation :

$$\Phi = N.\phi$$

- **F.E.M. de vitesse :** Considérons un fil de longueur (l) se déplaçant à la vitesse dans une induction uniforme, on peut écrire :

$$d\Phi = B.dS = B.l.dx$$

$$e(N=1) = \frac{d\Phi}{dt} = B.l \cdot \frac{dx}{dt} = B.l.V$$

V représentant la vitesse de déplacement

Dans le cas où la F.E.M. de vitesse s'oppose la tension de la source de tension, on ajoute le signe (-).

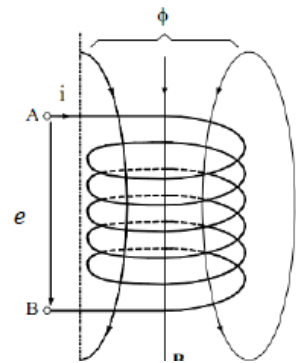


Figure 4. Relation entre tension, courant et flux

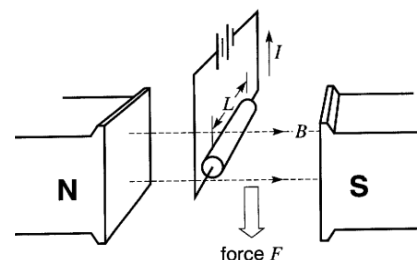


Figure 5. F.E.M. de vitesse

- **F.E.M. "Self-induction"** : Considérons une bobine autour d'un noyau de section (S) constante et de longueur moyenne l alimentée par une source de tension V .

D'après le théorème d'ampère on obtient :

$$H = \frac{N.i}{l}$$

d'où :

$$H = \frac{B}{\mu}$$

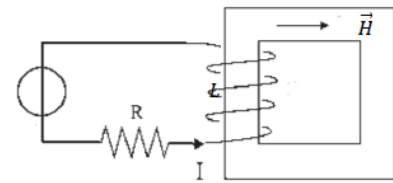


Figure 6. F.E.M. de "Self-induction"

Et donc l'induction magnétique de ce circuit est donnée par l'équation suivante :

$$B = \mu \cdot \frac{N.i}{l}$$

En combinant les équations précédentes, on obtient l'expression de la tension induite dans ce circuit comme ce qui suit :

$$e = N \cdot \frac{d\Phi}{dt} = \frac{N^2}{l} \cdot \frac{di}{dt} \cdot \mu \cdot S$$

Le facteur de proportionnalité $\frac{N^2}{l} \cdot \frac{\mu \cdot S}{\mu \cdot S}$ s'appelle l'inductance propre de la bobine : $L = \frac{N^2}{l} \cdot \mu \cdot S$

Finalement : $e = L \cdot \frac{di}{dt}$

- **F.E.M. de "transformation"** : Soit un noyau ferromagnétique sur lequel on a bobiné le circuit N°1, relié à la source de tension V , parcouru par un courant i_1 alternatif de N_1 spires et le deuxième circuit N°2 en circuit ouvert de N_2 spires.

En considérant qu'il n'y a pas de fuites magnétiques, la circulation du courant i_1 produit un flux alternatif qui traverse les deux circuits électriques. Il apparaît donc aux bornes du circuit N°2 une F.E.M. dite " F.E.M. de transformation".

$$e_1 = N_1 \cdot \frac{d\Phi}{dt} \quad \text{et} \quad e_2 = N_2 \cdot \frac{d\Phi}{dt}$$

On peut en déduire que :

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

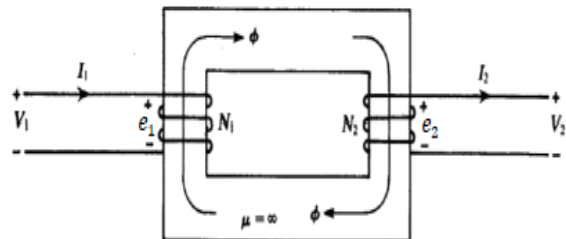


Figure 7. F.E.M. de "transformation"

- **Forme générale de la F.E.M induite** : Considérons un circuit mobile (à entrefer variable) dont la position est définie par un paramètre de déplacement x , et excité par un courant i , ce flux ϕ est désigné de "flux totalisé".

Son expression est donnée en fonction des deux variables i et x :

$$\phi = \phi(i, x)$$

Si on applique la loi de Faraday, en dérivant partiellement par rapport à i et x .

$$e = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{di} \cdot \frac{di}{dt} + \frac{d\phi}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

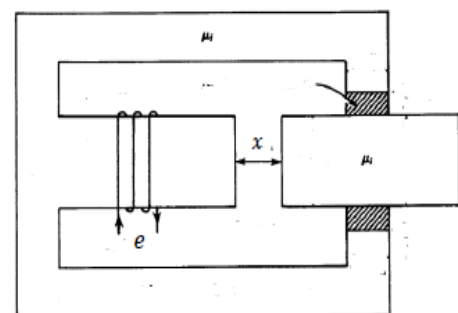


Figure 8. Circuit magnétique à entrefer variable

I.4.4 Définitions de l'inductance

La définition précédente de l'inductance propre n'est pas générale et, en fait, les inductances des circuits magnétique sont définites comme dans la suite

- **Inductance de fuite et inductance de magnétisation** : En désignant par Φ le flux produit par un circuit parcouru par un courant I et comportant N spires, on définit son "inductance propre" L par la relation :

$$L = \frac{N \cdot \Phi}{I}$$

Si on considère, par exemple, le flux d'une bobine dans un matériau ferromagnétique, une partie de ce flux Φ_f fuit dans l'air, et il reste seulement une partie utile dans le noyau : $\Phi_m = \Phi - \Phi_f$.

On est conduit à définir deux autres inductances, faisant intervenir ces flux de fuite Φ_f et de magnétisation (flux utile) Φ_m .

- Inductance de fuite :
$$L_f = \frac{N \cdot \Phi_f}{I}$$
- Inductance de magnétisation :
$$L_m = \frac{N \cdot \Phi_m}{I}$$

D'où, l'inductance propre donnée par la relation suivante :

$$L = L_f + L_m$$

Le coefficient de fuite est défini comme suit :

$$C_f = \frac{\Phi_m}{\Phi_f + \Phi_m} = \frac{L_m}{L}$$

Conventionnellement, le coefficient est toujours plus petit que 1.

- **Inductance mutuelle** : Considérons deux circuits (bobines) dans un milieu de perméabilité μ . On parle dans un tel cas de couplage magnétique des bobinages correspondants. Les flux totalisés dans les deux bobines s'écrivent alors :

$$\phi_1 = N_1 \cdot (\Phi_m + \Phi_{f1}) \quad \text{et} \quad \phi_2 = N_2 \cdot (\Phi_m + \Phi_{f2})$$

D'après Le théorème d'Hopkinson appliqué sur les trois tubes de flux et leurs matériaux sont linéaire, on a :

- le flux de magnétisation commun :

$$\Phi_m = \Phi_{m1} + \Phi_{m2} = \frac{N_1 \cdot I_1}{\mathfrak{R}_m} + \frac{N_2 \cdot I_2}{\mathfrak{R}_m}$$

- le flux de fuite 1 :

$$\Phi_{f1} = \frac{N_1 \cdot I_1}{\mathfrak{R}_{f1}}$$

- le flux de fuite 2 :

$$\Phi_{f2} = \frac{N_2 \cdot I_2}{\mathfrak{R}_{f2}}$$

En combinant les équations précédentes, il vient :

$$\phi_1 = N_1^2 \cdot I_1 \cdot \left(\frac{1}{\mathfrak{R}_m} + \frac{1}{\mathfrak{R}_{f1}} \right) + \frac{N_1 \cdot N_2}{\mathfrak{R}_m} \cdot I_2$$

$$\phi_2 = \frac{N_1 \cdot N_2}{\mathfrak{R}_m} \cdot I_1 + N_2^2 \cdot I_2 \cdot \left(\frac{1}{\mathfrak{R}_m} + \frac{1}{\mathfrak{R}_{f2}} \right)$$

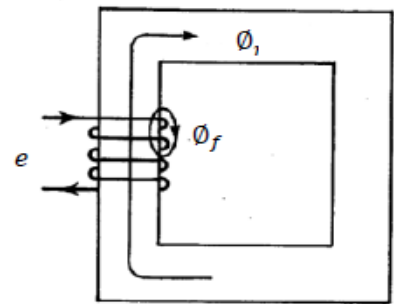


Figure 9. Circuit magnétique fermé

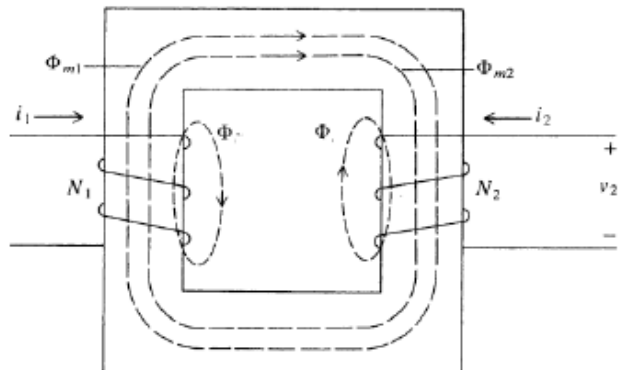


Figure 10. Couplage entre bobines électriques

Par analogie avec le cas de l'inductance propre, les inductances propres et mutuelles de deux bobines sont définies par :

➤ Inductances propres (totales) :

$$L_{11} = N_1^2 \cdot \left(\frac{1}{\mathfrak{R}_m} + \frac{1}{\mathfrak{R}_{f1}} \right) = L_{m1} + L_{f1}$$

$$L_{22} = N_2^2 \cdot \left(\frac{1}{\mathfrak{R}_m} + \frac{1}{\mathfrak{R}_{f2}} \right) = L_{m2} + L_{f2}$$

➤ Inductances mutuelles :

$$L_{12} = L_{21} = M = \frac{N_1 \cdot N_2}{\mathfrak{R}_m}$$

I.4.5 Coefficient de couplage et coefficient de dispersion

Dans le cas d'un système caractérisé par des flux de fuite nuls

$$\mathfrak{R}_{f1} = \mathfrak{R}_{f2} = 0$$

$$L_{11} = \frac{N_1^2}{\mathfrak{R}_m}$$

$$L_{12} = L_{21} = \frac{N_1 \cdot N_2}{\mathfrak{R}_m}$$

$$L_{22} = \frac{N_2^2}{\mathfrak{R}_m}$$

On en déduit la relation : $L_{12} = L_{21} = \sqrt{L_{11} \cdot L_{22}}$

Dans le cas général (avec flux de fuite), on peut poser :

$$L_{12} = L_{21} < \sqrt{L_{11} \cdot L_{22}}$$

Le coefficient de couplage, C_c est le quotient de l'inductance mutuelle par l'inductance correspondant à un couplage parfait :

$$C_c = \frac{M}{\sqrt{L_{11} \cdot L_{22}}} < 1$$

I.4.6 Analogies entre circuits électriques et magnétiques

Par la similitude de certaines équations, des analogies peuvent être tirées entre les grandeurs associées aux circuits électriques et celles liées aux circuits magnétiques. L'analogie est résumée dans le tableau 1.

Tableau 1. Analogies entre circuits électriques et magnétiques

Grandeur / Relation	Circuit électrique	Circuit magnétique
Champ	\vec{E}	\vec{H}
Vecteur caractéristique	\vec{J}	\vec{B}
Relation spécifique des matériaux	$\vec{J} = \vec{E} / \rho = \sigma \cdot \vec{E}$	$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$
Flux caractéristique	$i = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$	$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$
Résistance	$R = \int_S \frac{dl}{\sigma \cdot S}$	$\mathfrak{R} = \int_S \frac{dl}{\mu \cdot S}$
Éléments en série	$R = \sum_k R_k$	$\mathfrak{R} = \sum_k \mathfrak{R}_k$
Éléments en parallèle	$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sum_k R_k}$	$\frac{1}{\mathfrak{R}} = \frac{1}{\sum_k \mathfrak{R}_k}$

I.4.7 Calcul des circuits magnétiques

En pratique, pour définir les circuits magnétiques, il est nécessaire soit de calculer la f.m.m pour obtenir le flux utile, soit de déterminer le flux produit pour une f.m.m donnée.

Pour la résolution de ce type de problème, on utilise le schéma électrique équivalent du circuit magnétique et l'analogie existante entre les circuits magnétiques et électriques.

➤ Circuits en série

Soit le circuit magnétique représenté sur la figure 11 qui est constitué d'une partie ferromagnétique de réluctance \mathfrak{R}_f , supposé constante, et d'un entrefer de réluctance \mathfrak{R}_e . Ces deux réluctances étant connectées en série, leur réluctance équivalente est égale à la somme des deux.

On suppose, l'entrefer assez étroit pour pouvoir négliger la dispersion des lignes de champ dans celui-ci. La section commune du tube d'induction dans l'entrefer et dans le matériau magnétique est S et la longueur la ligne moyenne dans le matériau est l .

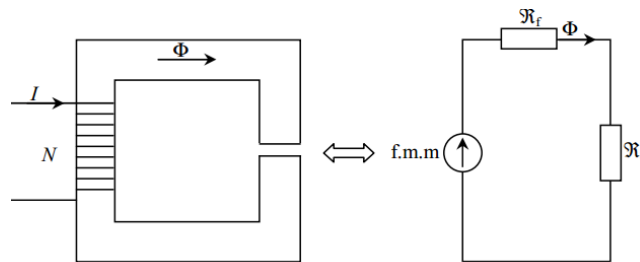


Figure 11. Circuit magnétique à une maille

Dans ce cas, la réluctance équivalente est donnée par l'expression suivante :

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_e + \mathfrak{R}_f = \frac{1}{\mu_0 \cdot S} \cdot \left(e + \frac{l}{\mu_r} \right)$$

La magnétisation de la bobine à N spires nécessite une f.m.m égale à :

$$N \cdot I = \mathfrak{R} \cdot \Phi = (\mathfrak{R}_e + \mathfrak{R}_f) \cdot \Phi$$

D'autre part :

$$\xi = N \cdot I = H_f \cdot l + H_e \cdot l$$

➤ Circuits en parallèle

La figure 12 représente le cas du circuit magnétique parallèle. Le flux étant conservatif on peut appliquer l'analogie précédente la loi des nœuds pour les flux.

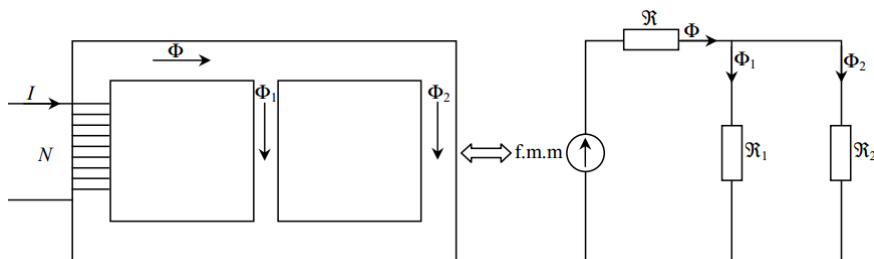


Figure 12. Circuit magnétique à deux mailles

On peut écrire : $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ avec $\xi = \mathfrak{R} \cdot \Phi + \xi'$ et $\xi' = \mathfrak{R}_1 \cdot \Phi_1 = \mathfrak{R}_2 \cdot \Phi_2 = \mathfrak{R}' \cdot \Phi = \mathfrak{R}' \cdot (\Phi_1 + \Phi_2)$

$$\Phi_1 = \frac{\mathfrak{R}'}{\mathfrak{R}_1} \cdot \Phi \quad \Phi_2 = \frac{\mathfrak{R}'}{\mathfrak{R}_2} \cdot \Phi \quad \text{d'où} \quad \mathfrak{R}' \cdot \Phi = \mathfrak{R}' \cdot \frac{\mathfrak{R}'}{\mathfrak{R}_1} \cdot \Phi + \mathfrak{R}' \cdot \frac{\mathfrak{R}'}{\mathfrak{R}_2} \cdot \Phi$$

et finalement :

$$\frac{1}{\mathfrak{R}'} = \frac{1}{\mathfrak{R}_1} + \frac{1}{\mathfrak{R}_2}$$

2. Conversion électromécanique de l'énergie

2.1. Système électromécanique à un seul bobinage

- Bilan des énergies

La conversion d'énergie électromécanique dans les machines électriques met en jeu quatre formes d'énergie :

- l'énergie électrique reçue (ou fournie) par le convertisseur électromécanique ;
- l'énergie mécanique restituée (ou absorbée) ;
- l'énergie thermique due aux pertes et dissipée de façon irréversible en chaleur ;
- l'énergie magnétique emmagasinée dans le champ de couplage.

L'énergie thermique correspond à des pertes de différentes natures :

- ✓ des pertes ohmiques affectant le système électrique du convertisseur ;
- ✓ des pertes mécaniques, dues aux frottements affectant le système mécanique ;
- ✓ des pertes par hystérésis et courant de Foucault associées au champ de couplage.

$$\begin{aligned}
 & \text{Energie électrique de la source} \\
 & = \\
 & \text{Energie mécanique restituée} \\
 & + \\
 & \text{Accroissement de l'énergie emmagasinée dans le champ de couplage} \\
 & + \\
 & \text{Energie de pertes sous forme de chaleur}
 \end{aligned}$$

Les bilans des énergies peuvent donc être représenté par les figures 13.a et 13.b.

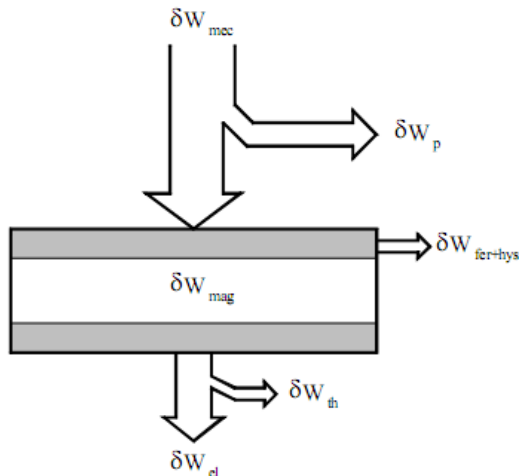


Figure 13.a. Conversion Energie mécanique-électrique

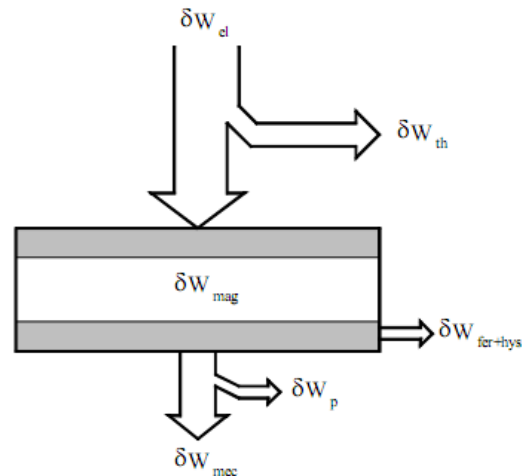


Figure 13.b. Conversion Energie électrique-mécanique

- δW_{mec} Énergie mécanique ;
- δW_p Énergie perdu sous forme mécanique ;
- δW_{mag} Énergie emmagasinée dans le convertisseur ;
- $\delta W_{fer+hys}$ Énergie perdu à travers le fer et le cycle d'hystérésis ;
- δW_{th} Énergie thermique perdu par effet joule ;
- δW_{el} Énergie électrique.

Par la suite, on considère que le système est conservatif : il n'y a donc ni pertes, ni accumulation d'énergie mécanique.

On aboutit alors à la relation fondamentale :

$$\delta W_{el} = \delta W_{mag} + \delta W_{mec}$$

- Energie magnétique emmagasinée et coénergie

La figure 14 présente la caractéristique magnétique d'un système à un seul bobinage comportant N spires parcouru par un courant i .

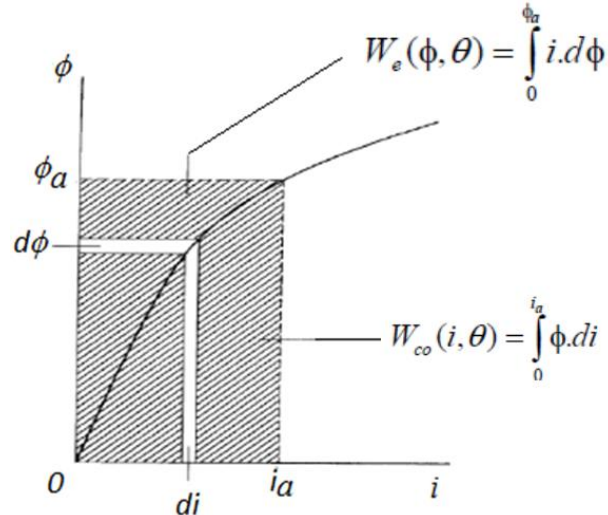


Figure 14. Caractéristique magnétique d'un système à un seul bobinage

D'où la relation :

$$W_{mag} + W_{co} = \phi.i$$

Ce qui permet d'écrire pour la co-énergie :

$$W_{co}(i, \theta) = \int_0^{i_a} \phi.di$$

Et, pour l'énergie emmagasinée :

$$W_e(\phi, \theta) = \int_0^{\phi_a} i.d\phi$$

Remarque :

Dans le cas d'un système électromécanique non saturé, c'est à dire ($\phi \propto i$ ou $\phi = L.i$), on obtient :

$$W_{mag} = W_{co} = \frac{1}{2} \cdot \phi.i = \frac{1}{2} \cdot L.i^2$$

- Expression du couple

Généralement, pour un système à un seul bobinage non saturé, l'énergie (emmagasinée ou coénergie) dépend du courant, du flux et de la position angulaire, Ce qui permet d'écrire le couple :

$$C_e = \frac{\partial W_{co}}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \cdot i^2 \cdot \frac{dL}{d\theta} \quad \text{avec} \quad L(\theta) = \frac{N^2}{\mathfrak{R}(\theta)}$$

Dans le cas où système électromécanique en translation linéaire :

$$F_e = \frac{\partial W_{co}}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot i^2 \cdot \frac{dL}{dx} \quad \text{avec} \quad L(x) = \frac{N^2}{\mathfrak{R}(x)}$$

2.2. Système électromécanique à deux bobinages

- Bilan des énergies

La figure 15 schématise le bilan des énergies d'un système électromécanique à deux bobinages.

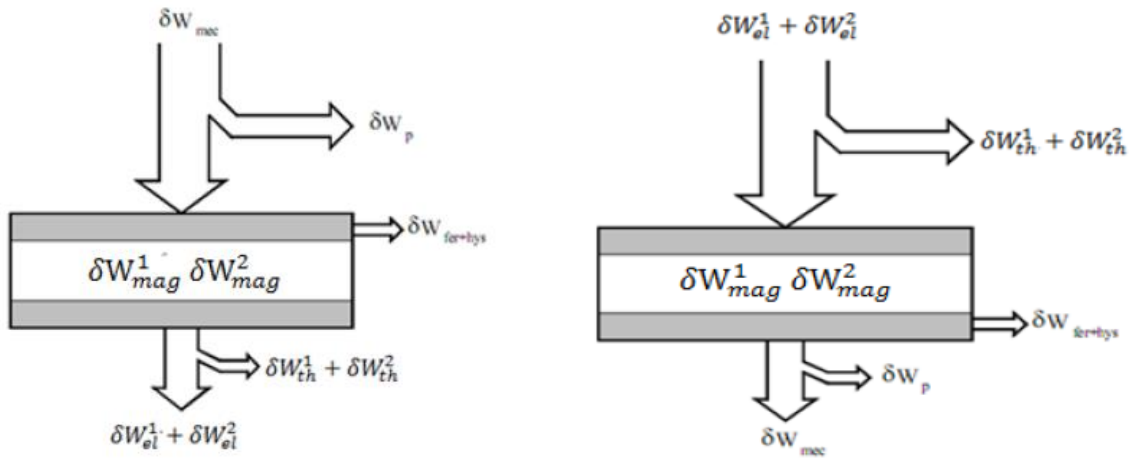


Figure 15.a. Conversion Energie mécanique - électrique Figure 15.b. Conversion Energie électrique - mécanique

Si on considère que le système est conservatif : il n'y a donc ni pertes, ni accumulation d'énergie mécanique, d'où :

$$(dW_{el}^1 + dW_{el}^2) = (dW_{mag}^1 + dW_{mag}^2) + dW_{mec}$$

- Energie magnétique emmagasinée et coénergie

L'expression de l'énergie emmagasinée par le système non saturé est égale à la somme des énergies de chaque bobine :

$$W_{mag}(\phi_1, \phi_2, \theta) = W_{co}(i_1, i_2, \theta) = \frac{1}{2} \cdot \phi_1 \cdot i_1 + \frac{1}{2} \cdot \phi_2 \cdot i_2$$

En désignant par L_1 , L_2 et M les inductances propres et mutuelle qui sont maintenant fonction de θ :

$$\begin{cases} \phi_1 = N_1 \cdot \phi_1 = L_1(\theta) \cdot i_1 + M(\theta) \cdot i_2 \\ \phi_2 = N_2 \cdot \phi_2 = L_2(\theta) \cdot i_2 + M(\theta) \cdot i_1 \end{cases}$$

D'après les relations précédentes, on a :

$$W_{co}(i_1, i_2, \theta) = \frac{1}{2} \cdot L_1(\theta) \cdot i_1^2 + \frac{1}{2} \cdot L_2(\theta) \cdot i_2^2 + M(\theta) \cdot i_1 \cdot i_2$$

- Expression du couple

On a pour un système à deux bobinages :

$$C_e = \frac{\partial W_{co}(i_1, i_2, \theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \cdot i_1^2 \cdot \frac{dL_1(\theta)}{d\theta} + \frac{1}{2} \cdot i_2^2 \cdot \frac{dL_2(\theta)}{d\theta} + i_1 \cdot i_2 \cdot \frac{dM(\theta)}{d\theta}$$

Dans le cas d'un système électromécanique en translation linéaire, on obtient :

$$F_e = \frac{\partial W_{co}(i_1, i_2, x)}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot i_1^2 \cdot \frac{dL_1(x)}{dx} + \frac{1}{2} \cdot i_2^2 \cdot \frac{dL_2(x)}{dx} + i_1 \cdot i_2 \cdot \frac{dM(x)}{dx}$$

Ce qui donne sous forme matricielle :

$$[W_{co}] = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} i_1 & i_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot [i]^T \cdot [L] \cdot [i]$$

D'où la formule du couple :

$$C_e = \frac{\partial [W_{co}]}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \cdot [i]^T \cdot \left\{ \frac{\partial L}{\partial \theta} \right\} \cdot [i]$$

2.3. Equations dynamiques des systèmes électromécaniques linéaires

- Système à un seul bobinage

Le moment du couple agit généralement sur une machine tournante du deuxième ordre du type :

$$C_e = k \cdot (\theta - \theta_0) + F \cdot \dot{\theta} + J \cdot \ddot{\theta} + C_r \quad (\text{Equation mécanique})$$

C_e : Couple électromagnétique ;

k : Coefficient d'élasticité ;

F : Coefficient de frottement visqueux ;

J : Moment d'inertie ;

C_r : Couple de résistant.

D'autre part, en régime linéaire :

$$E = R \cdot i + \frac{d[L(\theta) \cdot i]}{dt} = R \cdot i + L(\theta) \cdot \frac{di}{dt} + i \cdot \frac{d[L(\theta)]}{d\theta} \cdot \dot{\theta} \quad (\text{Équation électrique})$$

Le couple du système est :

$$C_e = \frac{1}{2} \cdot i^2 \cdot \frac{d[L(\theta)]}{d\theta}$$

Ceci permet de connaître l'interaction entre l'équation mécanique et l'équation électrique.

- Système à deux bobinages

Dans le cas d'un système électromécanique en rotation, on obtient :

$$C_e = \frac{\partial W_{co}(i_1, i_2, \theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \cdot i_1^2 \cdot \frac{dL_1(\theta)}{d\theta} + \frac{1}{2} \cdot i_2^2 \cdot \frac{dL_2(\theta)}{d\theta} + i_1 \cdot i_2 \cdot \frac{dM(\theta)}{d\theta}$$

$$C_e = k \cdot (\theta - \theta_0) + F \cdot \dot{\theta} + J \cdot \ddot{\theta} + C_r \quad (\text{Equation mécanique})$$

Les équations électriques peuvent se mettre sous la forme :

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \cdot \frac{d}{d\theta} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \dot{\theta} \cdot \left\{ \frac{d}{d\theta} \begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \right\} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

Cela correspond aux équations matricielles suivantes :

$$[E] = [R] \cdot [i] + [L(\theta)] \cdot \left\{ \frac{d}{d\theta} [i] \right\} + \dot{\theta} \cdot \left\{ \frac{d}{d\theta} [L(\theta)] \right\} \cdot [i]$$

D'où la formule du couple :

$$C_e = \frac{\partial [W_{co}]}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \cdot [i]^T \cdot \left\{ \frac{\partial L}{\partial \theta} \right\} \cdot [i]$$

3. Classification des machines électriques selon leur géométrie

Le domaine de puissance des machines électriques s'étend de quelque μW pour des micromoteurs à environ 2 GW pour les turbo-alternateurs. Toutefois, malgré la diversité des types de machines et de leurs usages, toutes les machines électriques appartiennent à l'une ou l'autre des deux familles suivantes :

- les machines à pôles lisses ou entrefer constant (Figures 16.a et 16.b),
- les machines à pôles saillants (Figures 17.a et 17.b).

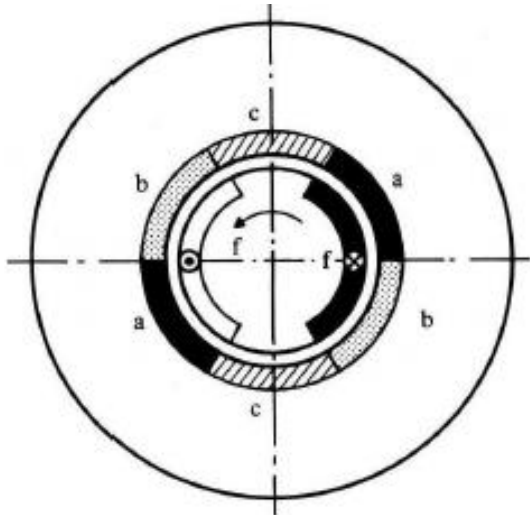


Figure 16.a. Machine synchrone triphasée à rotor lisse ($2.p = 2$)

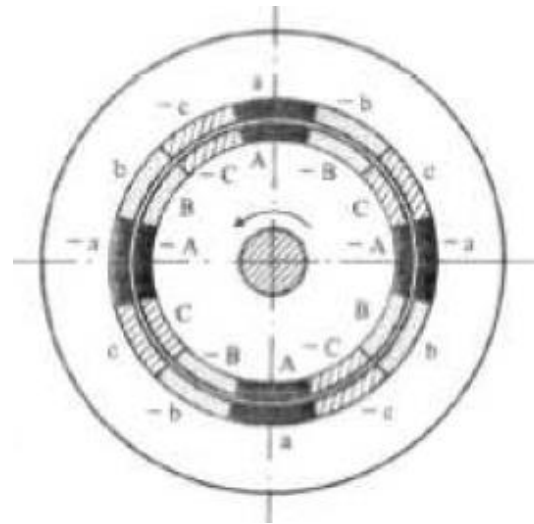


Figure 16.b. Machine asynchrone triphasée à rotor bobiné ($2.p = 4$)

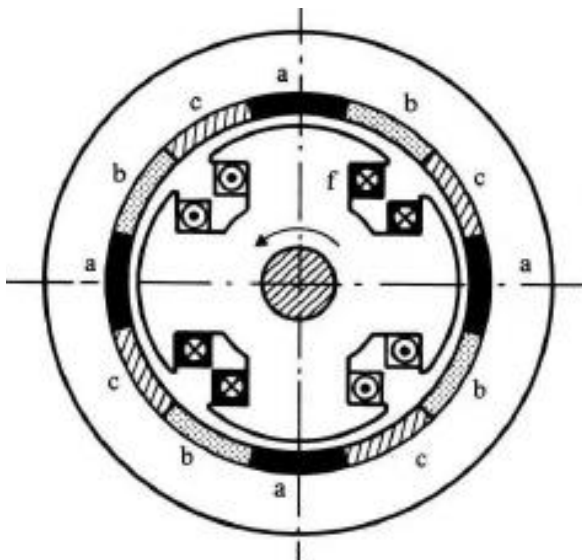


Figure 17.a. Machine synchrone triphasée à pôles saillants ($2.p = 4$)

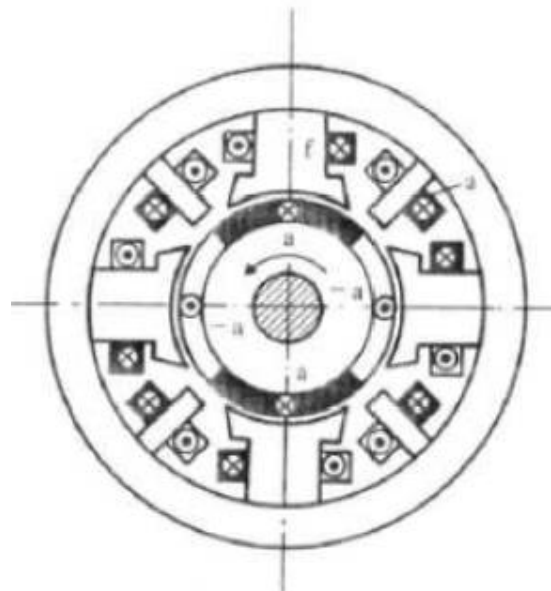


Figure 17.b. Machine à courant continu ($2.p = 4$)

4. Calcul des forces magnétomotrices dans les machines électriques

Pour que le couple électromagnétique d'une machine soit toujours de même sens, il faut que la position des pôles du stator par rapport à ceux du rotor reste la même, donc que les deux jeux de pôles tournent à la même vitesse. Or l'un est créé par l'armature fixe, l'autre par l'armature mobile.

Dans toutes les machines à courants alternatifs polyphasés les flux statorique et rotorique tournent. Qu'elles soient synchrones ou asynchrones, ces machines utilisent pour leur stator les mêmes types d'enroulements. Il est donc important de montrer comment l'enroulement fixe du stator peut créer un flux tournant.

4.1. Représentation de l'enroulement statorique

La figure 18 représente le plus simple des bobinages triphasés, chaque phase ne comporte qu'une bobine occupant deux encoches diamétralement opposées ; les trois phases sont identiques et décalées entre elles d'un angle de $2\pi/3$.

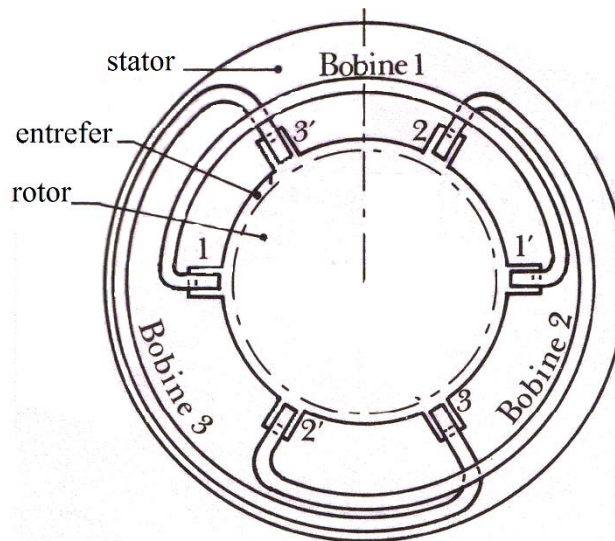


Figure 18. Machine triphasée simplifiée avec une bobine à deux encoches diamétralement opposées

Pour représenter l'enroulement d'une armature cylindrique on peut développer dans le plan de la figure la surface située face à l'entrefer (Figure 19.a) ou simplement on déroule la surface frontale de l'armature en supposant les têtes de bobines redressées (Figure 17.b).

En pratique, on multiplie le nombre d'encoches occupées par le bobinage de chaque phase.

Cela permet :

- de mieux utiliser la surface de l'armature,
- de rendre plus sinusoïdales les forces magnétomotrices créées par les diverses phases,
- de rendre plus sinusoïdales les forces électromotrices engendrées dans celles-ci.

Pour les machines à courants alternatifs, la courbe représentant l'induction à la surface de l'armature cylindrique dépend de la forme de l'entrefer et, en plus de la position qu'occupe à l'instant considéré l'autre armature par rapport à celle dont on veut caractériser l'effet.

C'est ainsi qu'il est d'usage de considérer la F.M.M. \mathcal{E} et non l'induction.

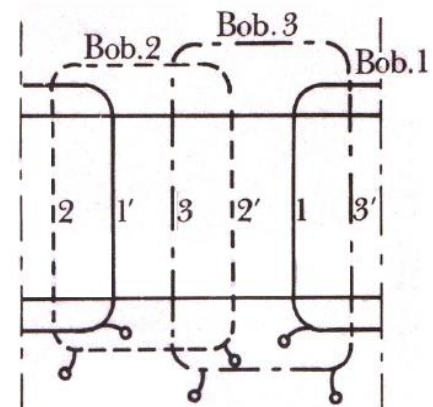


Figure 19.a

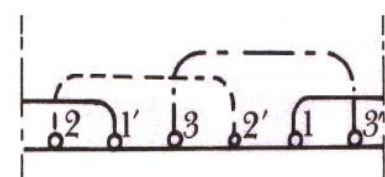


Figure 19.b

Considérons une armature cylindrique portant une seule bobine de N spires occupant les encoches (1) et (1') et parcourue, à l'instant étudié, par le courant i ayant le sens indiqué sur les figures 18.

On caractérise un point M de l'entrefer par son écart angulaire θ avec l'axe OX de la bobine. La courbe $B_e(\theta)$ dépend de la forme et de la position du fer rotorique.

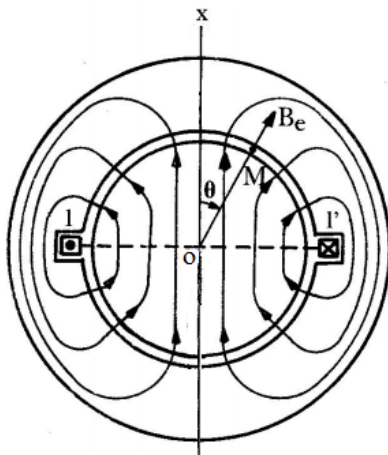


Figure 20.a

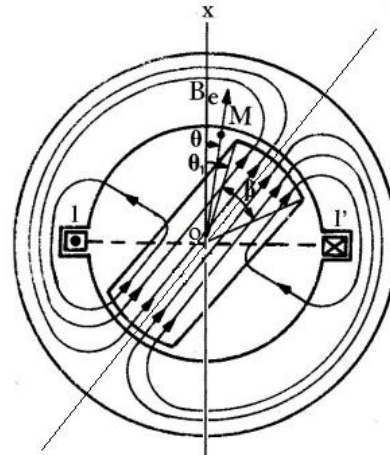


Figure 20.b

Dans le premier cas, figure 20.a, l'entrefer est constant. Si on néglige les ampères-tours nécessités par le trajet du flux dans le fer devant les A.T. d'entrefer, la courbe $B_e(\theta)$ présente un palier positif pour $(-\pi/2 < \theta < \pi/2)$ et un palier négatif pour $(\pi/2 < \theta < 3\pi/2)$.

Dans le cas de la figure 20.b, $B_e(\theta)$ est positif, mais faible pour $(-\pi/2 < \theta < \theta_1)$ et $(\theta_1 + \beta < \theta < \pi/2)$, positif et fort pour $(\theta_1 < \theta < \theta_1 + \beta)$; on obtient la même chose au signe près pour la partie de $B_e(\theta)$ correspondant à l'autre moitié de l'entrefer. Si θ_1 était différent, le spectre des lignes de force et la courbe $B_e(\theta)$ seraient différents.

Cet exemple montre que la forme β et la position θ_1 de l'autre armature empêche de caractériser un bobinage statorique par l'induction qu'il crée. Pour caractériser une bobine on ne peut prendre en considération que sa position sur son armature, son ouverture et la F.m.m. qu'elle crée.

Aussi on trace la courbe donnant la F.m.m. \mathcal{E} le long de l'entrefer développé :

- en négligeant l'effet d'encoche de l'armature,
- en négligeant les A.T. consommés par le fer devant les A.T. d'entrefer.

La courbe tracée donne donc les A.T. d'entrefer en supposant lisse l'armature cylindrique et la perméabilité du fer infinie. La forme de l'autre armature n'intervient pas, on sous-entend toutefois qu'elle est symétrique par rapport à l'axe du cylindre.

4.2. Enroulement à pas diamétral

✓ Cas d'une bobine unique

Dans le cas d'une bobine d'ouverture diamétrale (Figure 21) la réluctance rencontrée par le flux pour aller du rotor au stator est la même que pour revenir du stator au rotor, les deux traversées de l'entrefer exigent la moitié de la F.m.m. de la bobine.

La F.m.m. existant entre le rotor et tous les points de la demi-surface supérieure du stator est $+N.i/2$.

Elle est de $-N.i/2$ entre le rotor et tous les points de l'autre moitié du stator.

D'où la courbe $\mathcal{E}(\theta)$ tracée sur la figure 21.

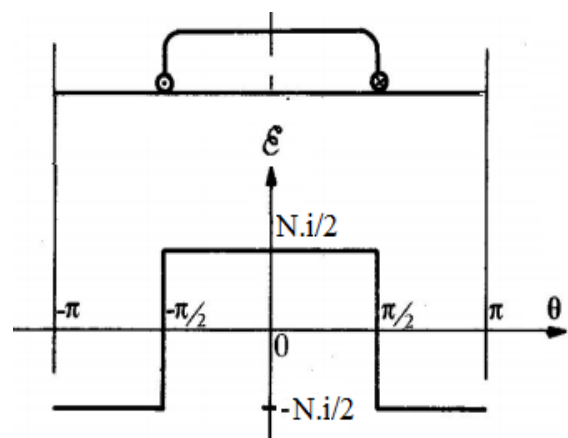


Figure 21. F.m.m. produite par une bobine à pas diamétral

✓ **Cas de plusieurs bobines**

Lorsqu'il y a plusieurs bobines, les F.m.m. s'ajoutent algébriquement comme les A.T. des bobines traversées par les lignes de force.

Si on répartit une bobine entre plusieurs encoches, la F.m.m. totale s'obtient en ajoutant les F.m.m. élémentaires (Figure 22).

On a encore une F.m.m. bipolaire mais sa forme se rapproche de la sinusoïde.

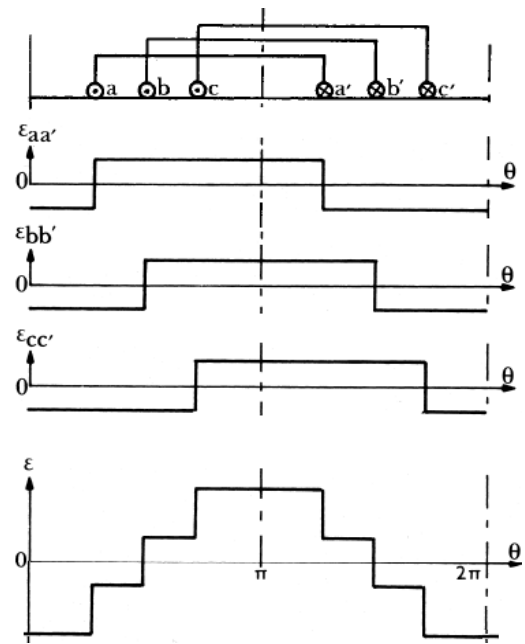


Figure 22. F.m.m. produite par trois bobines à pas diamétral

4.3. Enroulement à pas raccourci

Si les bobines n'ont pas une ouverture diamétrale, on ne peut tracer les courbes $\mathcal{E}(\theta)$, à moins de faire l'hypothèse que les réluctances des deux traversées de l'entrefer sont inversement proportionnelles à leurs largeurs ou, ce qui revient au même, que l'entrefer est constant (Figure 23).

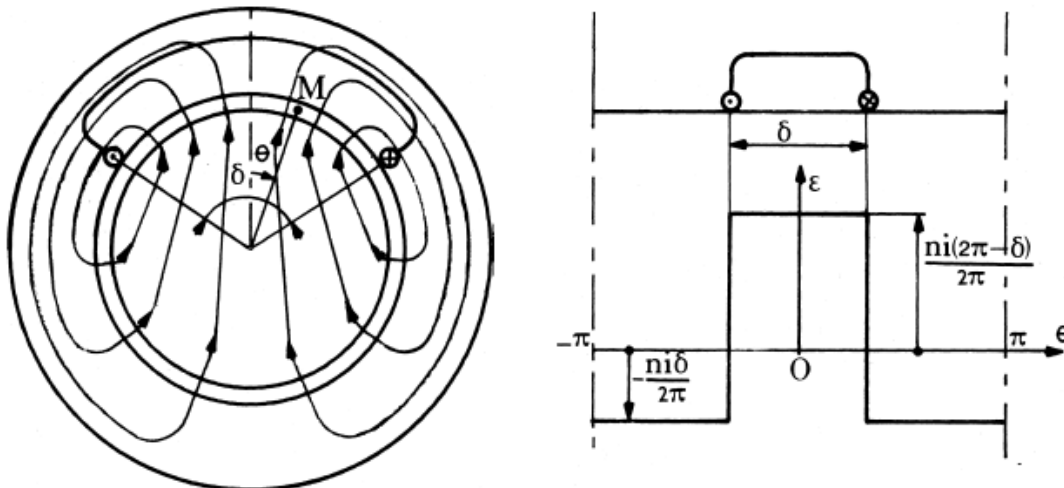


Figure 23. F.m.m. produite par une bobine à pas raccourci

4.4. Force magnétomotrice bipolaire tournante

Soit un bobinage triphasé, formé de trois enroulements identiques décalés de $2\pi/3$ entre eux, alimenté par des courants triphasés équilibrés, donc identiques mais déphasés de $2\pi/3$ deux à deux (Figure 24).

Cherchons la F.m.m. qu'il produit le long d'un entrefer, en supposant que chaque phase donne une F.m.m. à répartition sinusoïdale et que les courants sont sinusoïdaux.

On prend l'axe de la phase 1 comme origine des angles, le maximum du courant i_1 comme origine des temps.

La phase 1 parcourue par le courant $i_1 = I_m \cos(\omega.t)$ crée dans son axe une F.m.m. : $A. I_m \cos(\omega.t)$, et au point M, distant de θ , une F.m.m. :

$$\mathcal{E}_1(\theta) = A.I_m \cos(\omega.t) \cos(\theta)$$

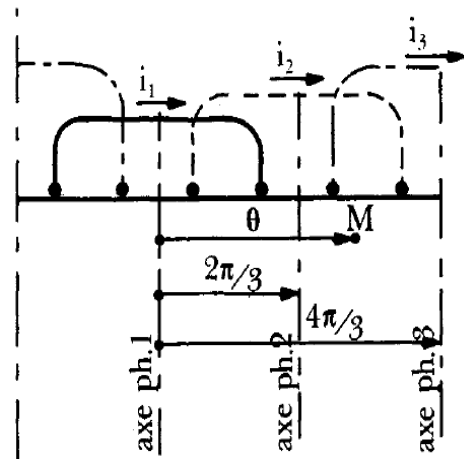


Figure 24

Le courant $i_2 = I_m \cdot \cos(\omega \cdot t - 2\pi/3)$ crée dans l'axe de la phase 2 une F.m.m. : $A \cdot I_m \cos(\omega \cdot t - 2\pi/3)$, et au point M, distant de $(\theta - 2\pi/3)$:

$$\mathcal{E}_2(\theta) = A \cdot I_m \cdot \cos(\omega \cdot t - 2\pi/3) \cdot \cos(\theta - 2\pi/3)$$

De manière analogue la phase 3, parcourue par le courant $i_3 = I_m \cos(\omega \cdot t - 4\pi/3)$, crée en M la F.m.m. :

$$\mathcal{E}_3(\theta) = A \cdot I_m \cdot \cos(\omega \cdot t - 4\pi/3) \cdot \cos(\theta - 4\pi/3)$$

d'où la F.m.m. résultante au point M :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 = A \cdot I_m \cdot \left(\cos(\omega \cdot t) \cdot \cos(\theta) + \cos\left(\omega \cdot t - \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\omega \cdot t - \frac{4\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) \right) \\ &= \frac{A \cdot I_m}{2} \cdot [\cos(\omega \cdot t + \theta) + \cos(\omega \cdot t - \theta) + \cos(\omega \cdot t + \theta - \frac{4\pi}{3}) \\ &\quad + \cos(\omega \cdot t - \theta) + \cos(\omega \cdot t + \theta - \frac{2\pi}{3}) + \cos(\omega \cdot t - \theta)] \\ \mathcal{E} &= \frac{3}{2} \cdot A \cdot I_m \cdot \cos(\omega \cdot t - \theta) \end{aligned}$$

Cette relation montre qu'on obtient une force magnétomotrice répartie sinusoidalement dans l'entrefer et qui tourne à la vitesse angulaire ω .

En effet :

- à un instant t donné, $\mathcal{E} = \frac{3}{2} \cdot A \cdot I_m \cdot \cos(\omega \cdot t - \theta)$, où si t est constant signifie que la courbe $\mathcal{E}(\theta)$ est une sinusoïde d'amplitude $3/2 \cdot A \cdot I_m$ indépendante du temps.
- si un point de l'entrefer tournait à la vitesse ω , pour lui $(\omega \cdot t - \theta)$ vaudrait $\omega \cdot t - (\omega \cdot t - \theta_0) = -\theta_0$, la F.m.m. en ce point serait constante, c'est-à-dire que ce point se déplacerait à la même vitesse que l'onde sinusoïdale.
- Pour illustrer ce phénomène, la figure 25 montre les F.m.m. partielles $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ et totale \mathcal{E} pour les instants $t = 0$ et $t = T/6$. On voit que l'onde de F.m.m. totale avance sans se déformer effectuant un tour par période.

Le maximum $3/2 \cdot A \cdot I_m$ est dans l'axe d'une phase quand le courant dans cette phase est maximum.

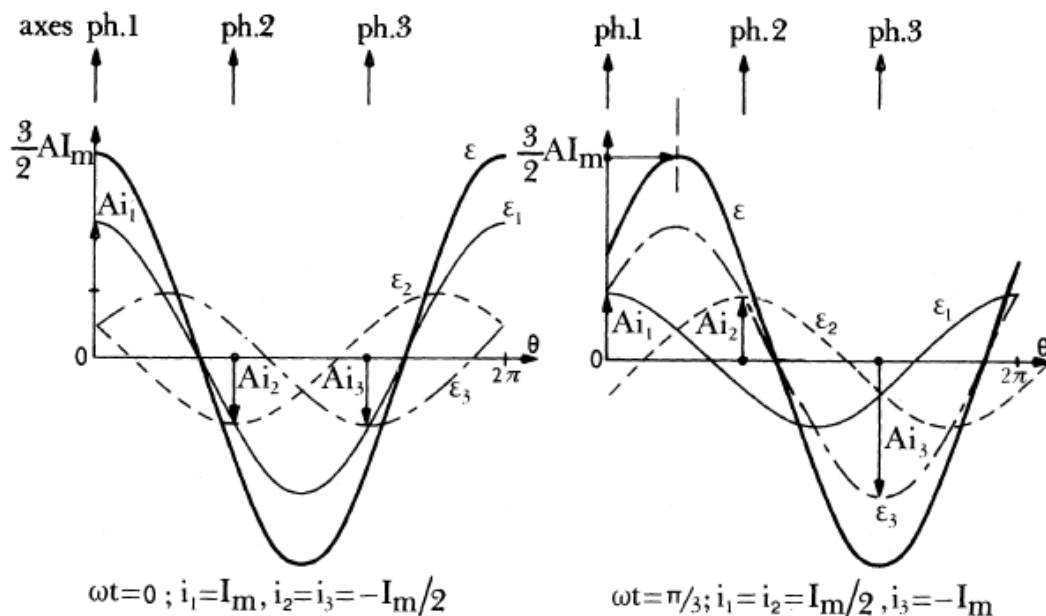


Figure 25

On dit que l'enroulement triphasé produit *un champ tournant circulaire*.

Si on trace un diagramme vectoriel, on peut représenter la F.m.m. \mathcal{E} par un vecteur de module $3/2 \cdot A \cdot I_m$ dirigée suivant la direction θ où \mathcal{E} est alors maximum. Ce vecteur tourne à la vitesse angulaire ω , son extrémité décrivant un cercle (Figure 26). Pour avoir \mathcal{E} en un point (θ) donné à un instant t donné, il suffit de projeter le vecteur représentant à cet instant la F.m.m. maximum sur la direction θ .

On obtient bien :

$$\mathcal{E} = \frac{3}{2} \cdot A \cdot I_m \cdot \cos(\omega t - \theta)$$

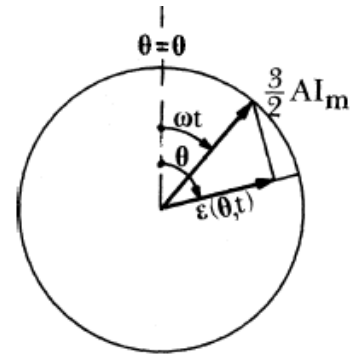


Figure 24

4.4. Forces magnétomotrices tournantes multipolaires

Pour créer une F.m.m. tournante de $2 \cdot p$ pôles il suffit de placer dans les encoches statoriques p groupes identiques de trois bobinages (si on est en triphasé).

La figure 27 montre une armature triphasée tétrapolaire à une encoche par pôle et par phase.

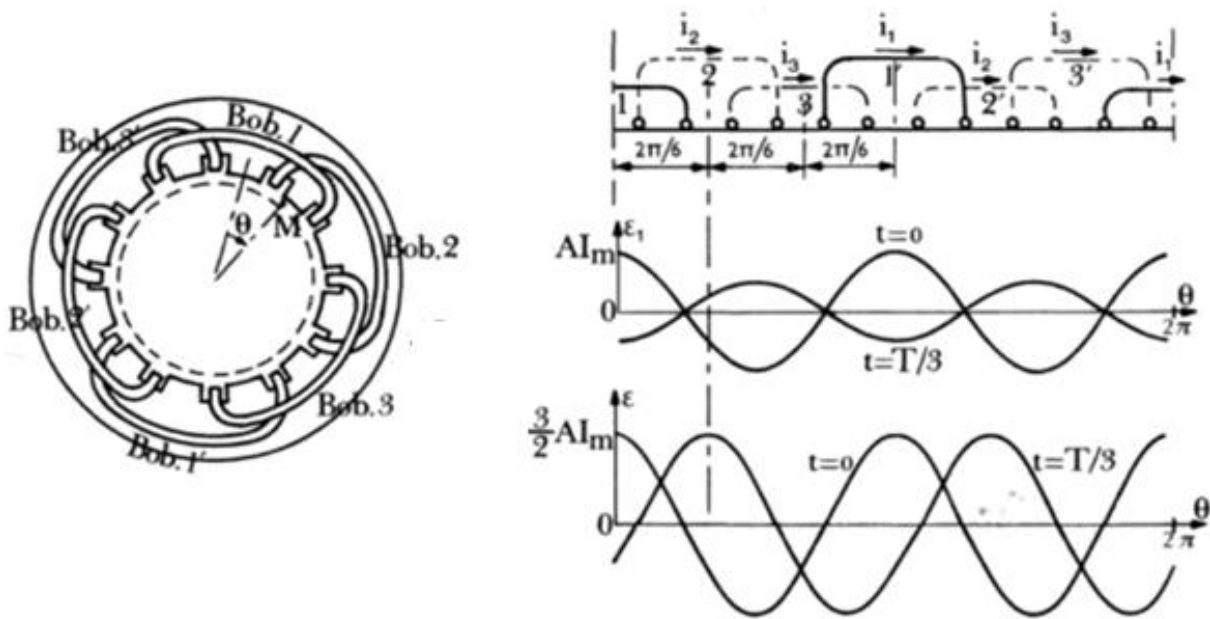


Figure 27

Les trois bobinages sont décalés deux à deux de $2\pi/6$; l'enroulement d'une phase se reproduit quand on avance de π . D'une façon générale quand il y a $2 \cdot p$ pôles, à un angle géométrique correspond un angle électrique p fois plus grand.

Si on suppose sinusoïdale la répartition de la F.m.m. de chaque phase et que le courant qui la traverse est également sinusoïdal, les F.m.m. créées par les trois phases en un point M, distant de θ degrés géométriques donc de $p \cdot \theta$ degrés électriques de l'axe de la phase 1, ont pour valeur :

$$\mathcal{E}_1 = A \cdot I_m \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(p \cdot \theta)$$

$$\mathcal{E}_2 = A \cdot I_m \cdot \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(p \cdot \left(\theta - \frac{2\pi}{3 \cdot p}\right)\right)$$

$$\mathcal{E}_3 = A \cdot I_m \cdot \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(p \cdot \left(\theta - \frac{4\pi}{3 \cdot p}\right)\right)$$

d'où la F.m.m. résultante :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3$$

$$\mathcal{E} = \frac{3}{2} \cdot A \cdot I_m \cdot \cos(\omega t - p \cdot \theta)$$

Cela correspond à une onde de F.m.m. constante à répartition sinusoïdale présentant p maxima et p minima, tournant à la vitesse angulaire Ω telle que :

$$\Omega = \frac{\omega}{p}$$

En effet, un point mobile de l'entrefer tournant à cette vitesse serait soumis à une F.m.m. constante.

Pour lui θ vaudrait :

$$\Omega t + \theta_0 = \frac{\omega t}{p} + \theta_0 \quad \text{et} \quad \cos(\omega t - p\theta), \text{ égal à } \cos(p\theta_0) \text{ serait constant.}$$

Théorème de Ferraris :

Un enroulement polyphasé à $2.p$ pôles (p paires de pôle) au stator, excité par des courants d'amplitude I_m et de pulsation $\omega = 2.\pi.f$, crée un champ tournant par rapport au stator à la vitesse $\Omega = \omega/p$, avec une F.m.m. de module $3/2.A.I_m$.

Si on inverse deux phases, le sens de rotation est inversé. C'est de cette façon qu'on modifie le sens de rotation des moteurs à courant alternatif.

Il est d'usage d'exprimer la vitesse de rotation par n définie en tr/s en fonction la fréquence f des courants traversant les phases de l'enroulement, soit :

$$\Omega = \frac{\omega}{p} \quad \Rightarrow \quad 2.\pi.n = \frac{2.\pi.f}{p} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{f}{p}$$

Remarques :

- Ω est appelé *vitesse de synchronisme* (souvent notée : Ω_s ou n_s).
- Si une machine ayant son stator parcouru par des courants de pulsation ω voit son rotor tourner exactement à la vitesse ω/p , on la qualifiera de *machine synchrone*, sinon il s'agira d'une *machine asynchrone*.
- Pour ne pas distinguer angles géométriques et angles électriques on suppose, chaque fois que c'est possible, que les armatures sont *bipolaires*, quitte à effectuer les divisions par p ultérieurement.

4.5. Cas d'une armature monophasé

Une armature monophasée crée une f.m.m. alternative d'axe fixe (Figure 28). Si on suppose que le courant est une fonction sinusoïdale du temps et que la répartition de la F.m.m. est une fonction sinusoïdale de l'espace, en un point M de l'entrefer :

Alors elle peut être exprimée par la relation :

$$\mathcal{E} = A.I_m \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(\theta)$$

On peut considérer cette F.m.m. d'axe fixe comme la résultante de deux F.m.m. tournantes d'amplitude constante, tournant, l'une dans le sens direct, l'autre dans le sens inverse : c'est le *théorème de Leblanc*.

En effet :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= A.I_m \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(\theta) \\ &= \frac{1}{2} A.I_m \cdot [\cos(\omega t - \theta) + \cos(\omega t + \theta)] \end{aligned}$$

et donc :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_d + \mathcal{E}_i$$

avec :

$$\mathcal{E}_d = \frac{1}{2} A.I_m \cdot \cos(\omega t - \theta)$$

et

$$\mathcal{E}_i = \frac{1}{2} A.I_m \cdot \cos(\omega t + \theta)$$

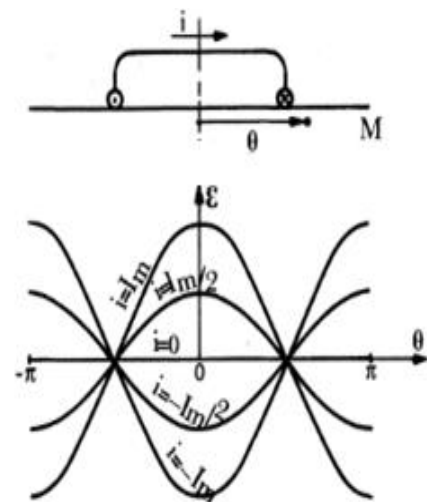


Figure 28

\mathcal{E}_d est une onde sinusoïdale d'amplitude $(A.I_m/2)$, tournant dans le sens direct à la vitesse ω ou ω/p .

\mathcal{E}_i est une onde de F.m.m. de même amplitude, mais tournant en sens inverse à la vitesse $-\omega$ ou $-\omega/p$.

- Si l'on trace les deux vecteurs tournants correspondant aux deux FMM \mathcal{E}_d et \mathcal{E}_i , ils décrivent des cercles de même rayon $(A.I_m/2)$.
- L'ellipse, lieu des maxima de la F.m.m., se réduit à un segment de droite AB (Figure 29). C'est en effet toujours suivant les directions $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, donc suivant l'axe du bobinage que la F.m.m. résultante \mathcal{E} est maximale.

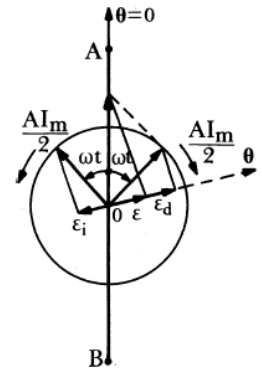


Figure 29

4.6. Répartition non sinusoïdale de la F.m.m

Si un bobinage polyphasé de construction symétrique est parcouru par des courants équilibrés, la répartition de la F.m.m. due à chaque phase n'est pas sinusoïdale, même pour un bobinage repartit entre plusieurs encoches (Figure 22). Or si chaque phase ne donne pas une répartition sinusoïdale à la F.m.m. qu'elle crée, on voit apparaître des harmoniques d'espace. Donc à la F.m.m. tournante circulaire de vitesse ω se superposent des F.m.m. tournantes de vitesses différentes dues aux ces harmoniques d'espace.

Chaque bobine étant symétrique, le développement en série de la F.m.m. qu'elle crée à un instant donné ne comprend que les harmoniques de rang impair. Donc, en un point M de l'entrefer, les trois phases créent :

$$\mathcal{E}_1 = I_m \cdot \cos(\omega t) \cdot (A_1 \cdot \cos(\theta) + A_3 \cdot \cos(3\theta) + \dots + A_h \cdot \cos(h\theta) + \dots)$$

$$\mathcal{E}_2 = I_m \cdot \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \cdot (A_1 \cdot \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) + A_3 \cdot \cos[3(\omega t - \frac{2\pi}{3})] + \dots + A_h \cdot \cos[h(\theta - \frac{2\pi}{3})] + \dots)$$

$$\mathcal{E}_3 = I_m \cdot \cos(\omega t - \frac{4\pi}{3}) \cdot (A_1 \cdot \cos(\theta - \frac{4\pi}{3}) + A_3 \cdot \cos[3(\omega t - \frac{4\pi}{3})] + \dots + A_h \cdot \cos[h(\theta - \frac{4\pi}{3})] + \dots)$$

La F.m.m. résultante \mathcal{E} est égale à $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3$, a pour expression :

$$\mathcal{E} = \frac{3}{2} A_1 \cdot I_m \cdot \cos(\omega t - \theta) + \frac{3}{2} A_3 \cdot I_m \cdot \cos(\omega t - 5\theta) + \frac{3}{2} A_7 \cdot I_m \cdot \cos(\omega t - 7\theta) + \dots + \frac{3}{2} A_h \cdot I_m \cdot \cos(\omega t \pm h\theta)$$

La F.m.m. résultante est la somme des F.m.m. dues :

- aux **harmoniques d'espace de rang $(h = 3k + 1)$** , qui créent des F.m.m. à répartition sinusoïdale tournantes dans le sens direct à la vitesse (ω/h) (ou $(\omega/p.h)$ s'il y a $2.p$ pôles).
- aux **harmoniques d'espace de rang $(h = 3k - 1)$** , qui créent des f.m.m. tournantes dans le sens inverse à la vitesse $(-\omega/h)$ (ou $(-\omega/p.h)$ s'il y a $2.p$ pôles).

Les harmoniques 3, 6, 9 ... donnent une F.m.m. nulle.

Les F.m.m. dues aux harmoniques d'espace tournent moins vite que la F.m.m. fondamentale, d'où le nom de *flux rampants* donné aux flux qu'elles engendrent.

La figure 28 donne, à titre d'exemple, la forme d'onde de la F.m.m. $\mathcal{E}(\theta)$ pour $t = 0$ et $t = T/12$, dans le cas d'un enroulement à une seule bobine par phase, donc à répartition pratiquement rectangulaire de la F.m.m. due à chaque phase.

L'axe des pôles avance bien d'un douzième de tour par douzième de période, mais l'onde se déforme en se déplaçant, (Pour $t = T/6$, on trouverait la même forme que pour $t = 0$ au décalage de $2\pi/6$ près).

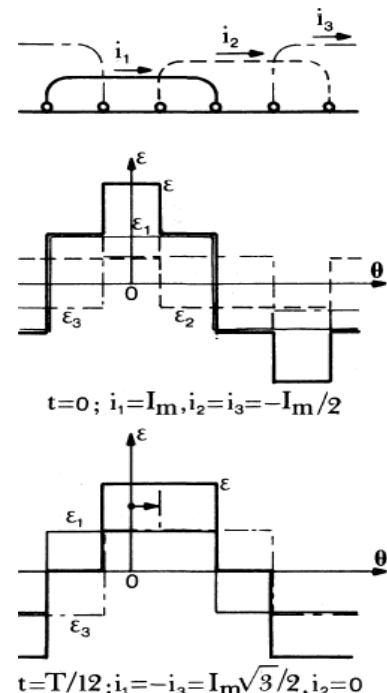


Figure 30

5. Enroulements

5.1. Enroulements triphasés à une couche

Pour les machines de faible ou moyenne puissance et les grosses machines à nombre de pôles élevé, on utilise des enroulements à un seul côté de bobine ou de section par encoche.

5.1.1 Schémas de bobinage

Ce qui caractérise un tel bobinage c'est le nombre m d'encoches par pôle et par phase ; il permet en effet de placer les côtés des bobines ou des sections en précisant à quelle phase ils appartiennent et dans quel sens y passent les courants.

$3 \times 2 m = 6 m$ pas dentaires correspondent à une double distance polaire ou à 360° électriques ; les phases 2 et 3 sont identiques à la phase 1 à 120° et à 240° près donc à $2.m$ et à $4.m$ pas dentaires près ; l'ouverture moyenne d'une bobine est de 180° donc de $3.m$ pas dentaires.

On trouve donc successivement :

- m encoches pour l'aller de la phase 1 : 0° ;
- m encoches pour le retour de la phase 3 : $(240+180=360+60^\circ)$;
- m encoches pour l'aller de la phase 2 : 120° ;
- m encoches pour le retour de la phase 1 : 180° ;
- m encoches pour l'aller de la phase 3 : 240° ;
- m encoches pour le retour de la phase 2 : $120^\circ + 180^\circ \dots$

et, s'il y a plus de deux pôles, on continue de la même façon $(p-1)$ fois.

On précise ensuite comment sont connectés les faisceaux aller et les faisceaux retour d'une phase en indiquant si le bobinage est

- en bobines ou en sections,
- par pôle ou par pôles conséquents.

L'enroulement est en bobines si on utilise plusieurs bobines concentriques pour réaliser le bobinage d'une phase correspondant à une distance polaire simple ou double. Les bobines élémentaires sont réalisées sur des gabarits différents.

L'enroulement est en sections si on utilise des éléments identiques ; le bobinage d'une phase est formé de sections décalées.

L'enroulement est par pôle si chaque phase compte une bobine ou un groupe de sections par pôle, il est par pôles conséquents si chaque phase compte une bobine ou un groupe de sections par paire de pôles.

La figure 31 donne le schéma d'un enroulement à 4 encoches par pôle et par phase et à 4 pôles réalisé :

- en bobines par pôles conséquents (Figure 31.a)
par pôle (Figure 31.b)
- en sections par pôles conséquents (Figure 31.c)
par pôle (Figure 31.d).

On voit qu'on trouve pour chaque phase les mêmes conducteurs dans les mêmes encoches parcourus par le courant dans le même sens. Les connexions ne sont représentées que pour la phase 1 ; pour les autres elles sont les mêmes à 120° et à 240° électriques près.

Les connexions effectuées correspondent à une voie par phase. On pourrait grouper de manière différente les p fractions identiques formant le bobinage d'une phase. Si on bobine par pôle et si m est pair, on a $2.p$ ensembles identiques par phase, on peut donc arriver jusqu'à $2.p$ voies en parallèle.

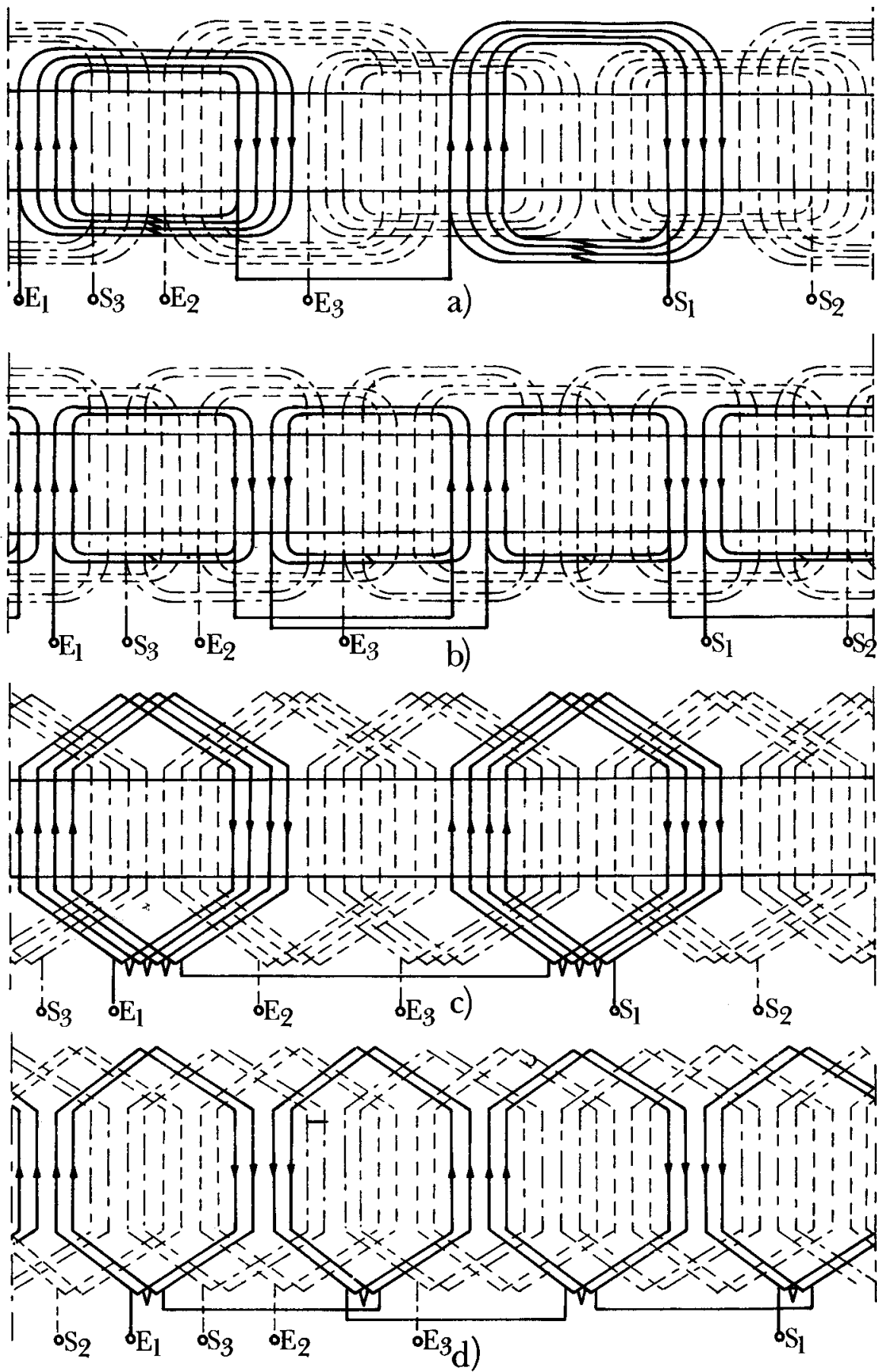


Figure 29

5.1.2 Réalisation

- Bobines

Pour éviter les intersections entre les têtes des bobines des différentes phases, il est d'usage de relever certaines de ces têtes.

Dans les enroulements par pôles consécutifs, deux étages de têtes de bobine suffisent (Figure 32.a), comme le montre le schéma (Figure 31.a) où pour figurer les divers étages on écarte plus ou moins les connexions des sorties d'encoches.

Les m bobines concentriques élémentaires, formant le bobinage d'une phase pour 2 pôles, sont ligaturées ensemble dans la zone où elles s'appuient les unes sur les autres.

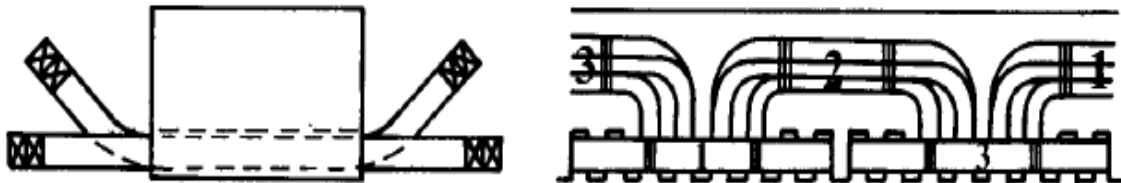


Figure 32.a

Dans les enroulements par pôle, l'ouverture moyenne des bobines est plus faible ($2,5.m$ pas dentaires au lieu de $3.m$), mais trois étages de têtes de bobines sont nécessaires (Figure 31.b).



Figure 32.b

- Sections

Il suffit que les développantes allant de gauche à droite soient dans un plan différent de celles allant de droite à gauche pour qu'il n'y ait pas d'intersection (Figure 33).

- Aussi, dès la sortie (a) de l'encoche, on coude vers l'extérieur (b)
- puis on recoude (c) pour se mettre au niveau supérieur ;
- le coude effectué en (d.e) ramène au niveau inférieur où on reste jusqu'au retour (f) dans l'encoche où se situe le second côté de section.
- On a tracé, en traits légers, une section du même groupe et le retour d'une section d'une autre phase.

Souvent les têtes des sections sont plus ou moins relevées vers l'extérieur.

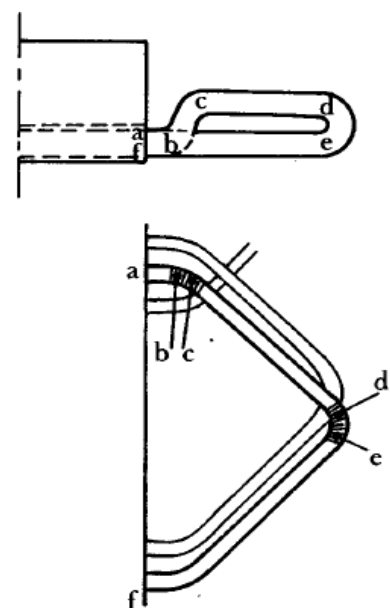


Figure 33

5.1.3 Coefficient de bobinage

- Définitions

Soit n le nombre de tours par paire de pôles du bobinage d'une phase et i le courant de celle-ci.

- Si m égalait 1, on aurait une seule bobine d'ouverture égale à 180° électriques par paire de pôles créant une f.m.m. de forme d'onde rectangulaire (Figure 32.a) donnée par :

$$\xi = +\frac{n.i}{2} \quad \text{pour} \quad -\frac{\pi}{2} + k.2.\pi < p.\theta < \frac{\pi}{2} + k.2.\pi$$

$$-\frac{n.i}{2} \quad \text{pour} \quad \frac{\pi}{2} + k.2.\pi < p.\theta < \frac{3.\pi}{2} + k.2.\pi$$

En prenant pour origine des angles l'axe d'une bobine, on peut développer en série de Fourier cette fonction périodique de θ :

$$\xi = \frac{n.i}{2} \cdot \frac{4}{\pi} \left(\cos(p.\theta) - \frac{1}{3} \cdot \cos(3.p.\theta) + \frac{1}{5} \cdot \cos(5.p.\theta) + \dots \pm \frac{1}{h} \cdot \cos(h.p.\theta) \pm \dots \right)$$

ou plus simplement :

$$\xi = (A_1' \cdot \cos(p.\theta) + A_3' \cdot \cos(3.p.\theta) + A_5' \cdot \cos(5.p.\theta) + \dots + A_h' \cdot \cos(h.p.\theta) + \dots) \cdot i$$

- Si $m > 1$, on a m sections de n/m tours créant m ondes de même forme que celle qu'on avait pour $m = 1$ mais d'amplitude m fois plus faible et décalées entre elles d'un angle β (Figure 34.b).

La F.m.m. due à ces m sections est :

$$\xi = \frac{A_1'}{m} \cdot \{ \cos[p.\theta] + \cos[p.(\theta - \beta)] + \dots + \cos[p.(\theta - (m-1).\beta)] \} \cdot i$$

$$\frac{A_3'}{m} \cdot \{ \cos[3.p.\theta] + \cos[3.p.(\theta - \beta)] + \dots + \cos[3.p.(\theta - (m-1).\beta)] \} \cdot i$$

$$+ \dots + \frac{A_h'}{m} \cdot \{ \cos[h.p.\theta] + \cos[h.p.(\theta - \beta)] + \dots + \cos[h.p.(\theta - (m-1).\beta)] \} \cdot i + \dots$$

En posant : $\zeta = \frac{(m-1).\beta}{2}$, on obtient :

$$\xi = \{ A_1 \cdot \cos[p.(\theta - \zeta)] + A_3 \cdot \cos[3.p.(\theta - \zeta)] + \dots + A_h \cdot \cos[h.p.(\theta - \zeta)] + \dots \} \cdot i$$

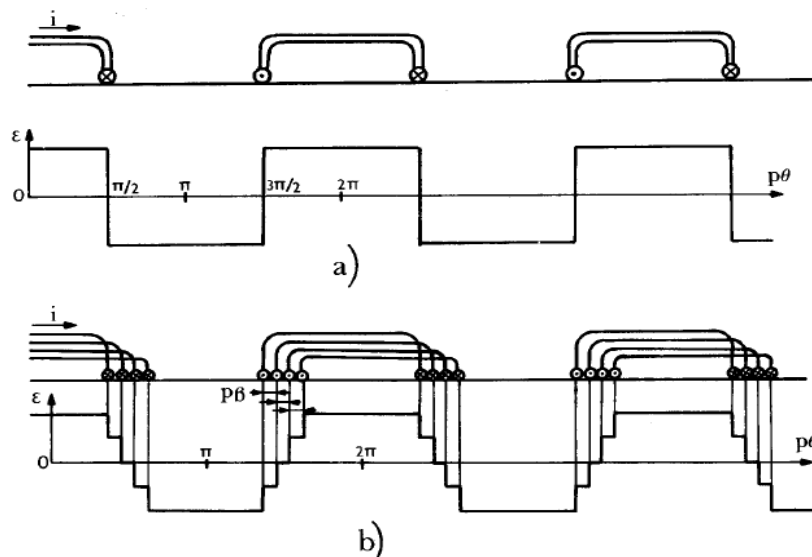


Figure 34

En prenant comme origine des angles le milieu d'une alternance positive :

$$\xi = \{A_1 \cdot \cos(p \cdot \theta) + A_3 \cdot \cos(3 \cdot p \cdot \theta) + \dots + A_h \cdot \cos(h \cdot p \cdot \theta) + \dots\} \cdot i$$

On appelle coefficient de bobinage :

- pour le fondamental, le rapport : $k_1 = \frac{A_1}{A_1}$

- pour les harmoniques 3, 5, ..., h, ..., les rapports : $k_3 = \frac{A_3}{A_3}, k_5 = \frac{A_5}{A_5}, \dots, k_h = \frac{A_h}{A_h}, \dots$

Donc pour le fondamental, puis pour les divers harmoniques, le coefficient de bobinage est le rapport entre ce que donne le bobinage réel et ce qu'on obtiendrait si tous les conducteurs d'une paire de pôles étaient regroupés dans deux encoches.

- Propriétés

Pour un enroulement ayant un nombre donné q de phases et un encochage régulier, les divers coefficients de bobinage ne dépendent que de la valeur de m .

En effet :

- Quel que soit le nombre de paire de pôle p : la valeur de $(p \cdot \beta)$ découle de m . Il y a $(2 \cdot q \cdot m)$ encoches par paire de pôles, donc le décalage entre 2 encoches $p \cdot \beta$ vaut :

$$p \cdot \beta = \frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot q \cdot m} = \frac{\pi}{q \cdot m} \quad \text{ou en triphasé : } p \cdot \beta = \frac{\pi}{3 \cdot m}$$

Quel que soit le mode de bobinage, le même courant passe dans le même sens dans les conducteurs situés dans les mêmes encoches et crée la même f.m.m. Il est commode de raisonner sur un enroulement en sections par pôles consécutifs car les éléments du bobinage sont identiques et ont la même ouverture que la bobine unique qui sert de base de comparaison.

- Si la répartition de la f.m.m. n'est pas rectangulaire, cela ne change rien. Le coefficient k_1 , par exemple, est le rapport de m sinusoïdes décalées de $p \cdot \beta$ et d'une sinusoïde d'amplitude m fois plus grande. Dans ce rapport la valeur des amplitudes n'intervient pas.

- Valeur de k_1

La figure 35 représente les m vecteurs $\overrightarrow{OD_1}, \overrightarrow{D_1D_2}, \dots, \overrightarrow{D_{m-1}D_m}$, d'amplitude A_1/m , décalés deux à deux d'un angle $p \cdot \beta$.

Le vecteur $\overrightarrow{OD_m}$ représente leur somme d'amplitude A_1 , donc :

$$k_1 = \frac{A_1}{A_1} = \frac{OD_m}{m \cdot OD_1}$$

Le contour $OD_1D_2 \dots D_{m-1}D_m$, est inscriptible dans un cercle de centre C et l'égalité des valeurs du rayon déduites des deux triangles isocèles OCD_1 et OCD_m donne :

$$\frac{OD_1/2}{\sin\left(\frac{p \cdot \beta}{2}\right)} = \frac{OD_m/2}{\sin\left(\frac{m \cdot p \cdot \beta}{2}\right)} \quad \text{ou :} \quad \frac{OD_m}{OD_1} = \frac{\sin\left(\frac{m \cdot p \cdot \beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{p \cdot \beta}{2}\right)}$$

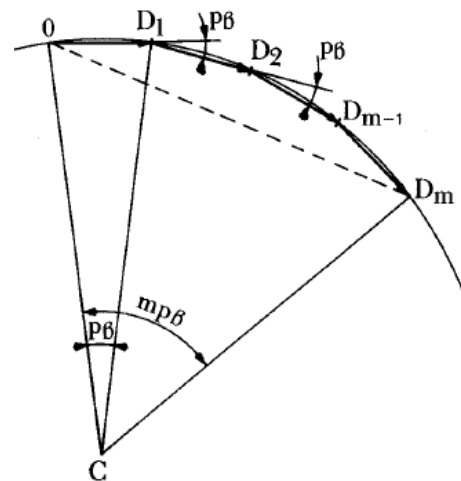


Figure 35

Le coefficients k_1 est alors exprimé par :

$$k_1 = \frac{\sin\left(\frac{m.p.\beta}{2}\right)}{m.\sin\left(\frac{p.\beta}{2}\right)} \quad \text{ou en triphasé :} \quad k_1 = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{m.\sin\left(\frac{\pi}{6.m}\right)}$$

- Valeur de k_h

Pour l'harmonique d'espace de rang h , les m sinusoïdes à additionner sont décalées de $h.p.\beta$ les unes par rapport aux autres. En remplaçant $p.\beta$ par $h.p.\beta$ dans l'expression de k_1 on obtient la valeur k_h :

$$k_h = \frac{\sin\left(\frac{m.h.p.\beta}{2}\right)}{m.\sin\left(\frac{h.p.\beta}{2}\right)} \quad \text{ou en triphasé :} \quad k_h = \frac{\sin\left(\frac{h.\pi}{6}\right)}{m.\sin\left(\frac{h.\pi}{6.m}\right)}$$

Le tableau 1 donne pour le fondamental et les premiers harmoniques le coefficient de bobinage pour les premières valeurs de m et pour m tendant vers l'infini.

Tableau 1

m	1	2	3	4	5	6	$\rightarrow \infty$
k_1	1,000	0,966	0,960	0,958	0,957	0,956	$\rightarrow 0,955$
k_3	1,000	0,707	0,666	0,653	0,648	0,643	$\rightarrow 0,636$
k_5	1,000	0,258	0,217	0,205	0,200	0,197	$\rightarrow 0,191$

L'examen de ce tableau montre que, dès que m est supérieur à 1 :

- tous les coefficients sont inférieurs à 1 : la F.m.m. a une valeur efficace inférieure à celle que donnerait $m = 1$;
- tous les coefficients relatifs aux harmoniques sont inférieurs à k_1 et cela d'autant plus que m est plus grand.

5.2.Enroulements triphasés à deux couches

L'enroulement à deux faisceaux (ou barres) par encoche n'est utilisé qu'avec des sections.

On trouve donc 2 côtés de sections par encoche.

- Le premier avantage est que les têtes des sections forment un ensemble très régulier, il est plus facile :
 - ✓ à fretter s'il s'agit d'une armature tournante (cas des moteurs asynchrones à rotor bobiné),
 - ✓ à brider (cas du stator de toutes les machines de forte ou très forte puissance où des efforts considérables peuvent s'exercer sur les développantes, en cas de court-circuit notamment).
- Le second avantage est la possibilité de former des sections à pas raccourci et de réduire ainsi certains harmoniques.

Si les deux côtés de sections trouvés dans chaque encoche appartiennent à la même phase, il n'y a pas de différence au point de vue électrique avec ce qu'on avait pour une couche : les conducteurs d'une encoche sont parcourus par le même courant, ils sont simplement répartis en deux groupes.

Les coefficients de bobinage, fonctions seulement de m , sont ceux établis précédemment.

La figure 36 donne le schéma d'un enroulement avec $m = 2$ et $2.p = 4$, à une voie par phase.

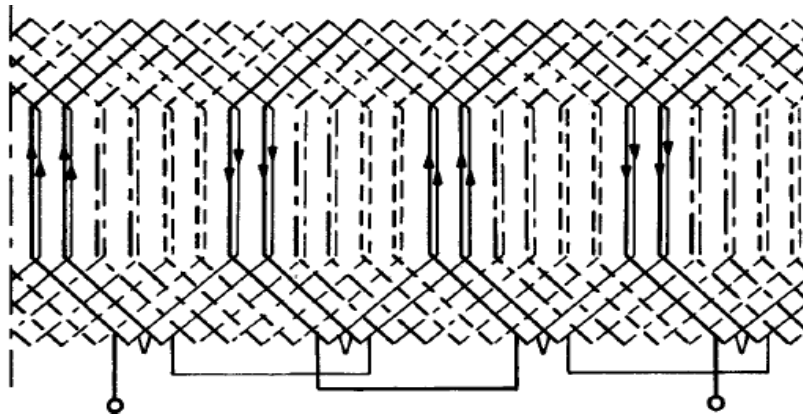


Figure 36

- Enroulement à pas raccourci

Le type d'enroulement précédent est dit à pas diamétral, l'ouverture d'une section est de 180° électriques (ou de $3.m$ pas dentaires).

Si on raccourcit l'ouverture des sections (5 pas dentaires au lieu de 6 pour $m = 2$ par exemple), la figure 37 montre que dans certaines encoches les deux côtés de sections appartiennent à deux phases différentes. C'est un inconvénient car cela oblige à renforcer l'isolement entre les côtés de sections dans les encoches.

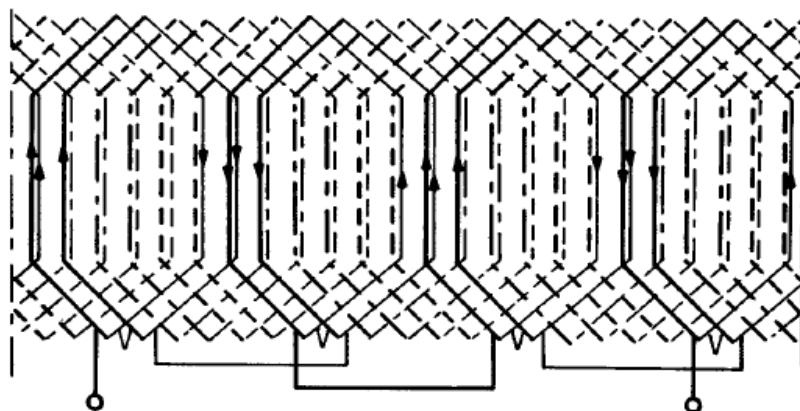


Figure 37

La réduction du pas rend plus courte la longueur à donner aux développantes, mais diminue la F.m.m. créée par chaque section. Toutefois cette diminution est plus forte pour les harmoniques que pour le fondamental :

Le raccourcissement du pas rend, à m donné, la F.m.m. plus sinusoïdale.

Ainsi pour une double distance polaire, les 4 sections d'une phase du bobinage de la figure 35 peuvent être réparties en deux groupes (Figure 37). Les sections 1 et 3 créent une F.m.m. \mathcal{E}' formée de deux créneaux de largeur $\delta.\pi$ (δ inférieur à 1, est appelé facteur de raccourcissement).

Les sections 2 et 4 créent une F.m.m. semblable, mais décalée de $\pi/6$. La f.m.m. totale \mathcal{E} est plus voisine de la sinusoïde que celle que donnerait le bobinage de la figure 34. Le coefficient de bobinage est celui qu'on aurait pour $m = 2$ multiplié par un coefficient inférieur à l'unité.

Egal à : $\sin(\delta.\pi/2)$ pour le fondamental, ce coefficient vaut : $\sin(h.\delta.\pi/2)$ pour l'harmonique h .

La plupart des harmoniques sont plus atténués que le fondamental.

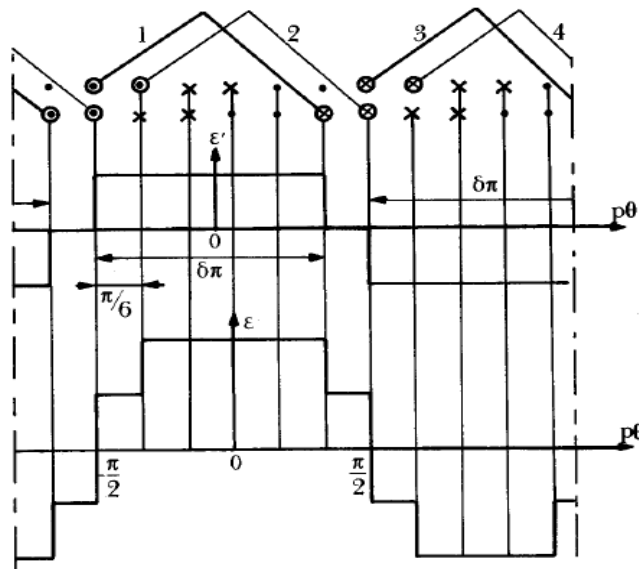


Figure 38

5.3. Enroulements monophasés

D'ordinaire on n'utilise que les deux tiers des encoches régulièrement découpées sur la surface de l'armature. Les utiliser toutes conduirait à un coefficient de bobinage faible donc à une mauvaise utilisation du cuivre. L'écart angulaire entre les encoches extrêmes du même groupe serait en effet voisin de π .

On peut utiliser des enroulements en bobines ou en sections, par pôle ou par pôles consécutifs. D'ordinaire on adopte le bobinage par pôle qui donne des têtes de sections ou de bobines plus courtes et formant des paquets moins encombrants.

La figure 39 donne deux schémas d'un enroulement monophasé tel que $2.p = 4$, $m = 4$ et la forme d'onde de la F.m.m. produite.

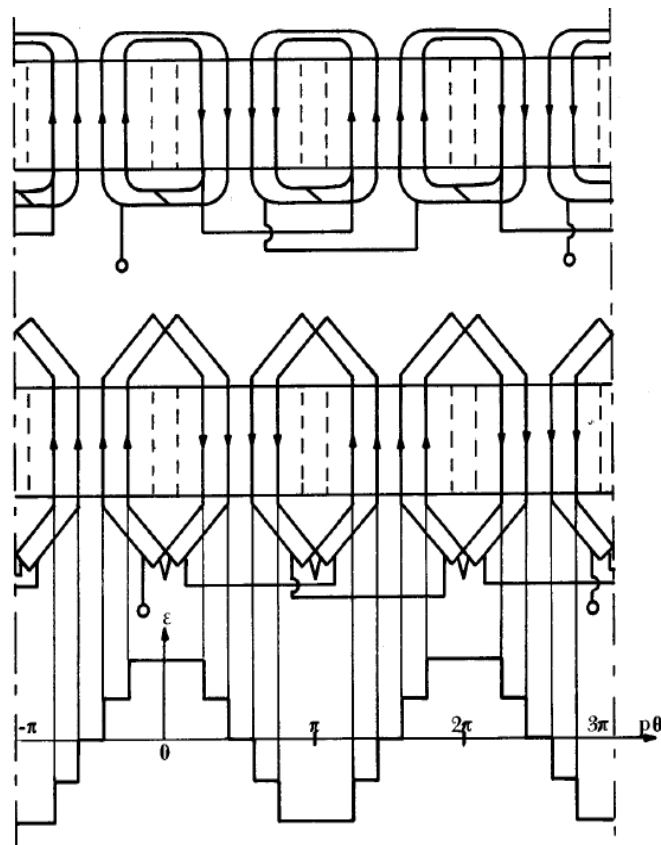


Figure 39

- Les coefficients de bobinage sont ceux donnés par les relations générales établies au § 5.1.3. ^
- Si on utilise les 2/3 des encoches, il y a $\frac{3}{2}.m$ pas dentaires par pôle, l'écart $p.\beta$ entre 2 encoches consécutives vaut $2.\pi/3.m$.

Les expressions des coefficients k_1 et k_h deviennent :

$$k_1 = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{m.\sin\left(\frac{\pi}{3.m}\right)} \quad \text{ou en triphasé :} \quad k_h = \frac{\sin\left(\frac{h.\pi}{3}\right)}{m.\sin\left(\frac{h.\pi}{3.m}\right)}$$