Chapitre 5: Lois de probabilité usuelles

I. Lois de probabilités discrètes

*La loi uniforme

C'est la loi de l'équiprobabilité. On peut la présenter sous forme de tableau.
Soit n le nombre d'événements possibles. On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur l'univer $\{1,2,\dots,n\}$ si X prend toutes ses valeurs avec une même probabilité de $\frac{1}{n}$ i.e.

$$\forall i \in \{1,\dots n\} \quad P(X=x_i)=\frac{1}{n}$$

On écrit $X \rightarrow (U\{1,\dots,n\})$.

Dans ce cas $E(X)=\frac{n+1}{2}$ et $V(X)=\frac{n^2-1}{12}$

Exemples:

1) Si on prend un dé à 6 faces équilibrées, alors le score obtenu en lançant le dé suit une loi uniforme sur $\{1,\dots,6\}$:

$X=x_i$	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2) On dispose d'une urne dans laquelle sont disposées 100 boules numérotées de 1 à 100. On tire une boule au hasard et on note le résultat obtenu. Ce résultat suit une loi uniforme sur $\{1,\dots,100\}$

*La loi de Bernouilli

Soit une épreuve aléatoire dans laquelle il n'existe que deux résultats possibles, l'un étant qualifié de favorable et l'autre de défavorable (échec et succès). Soit p la proportion du cas favorable $q=1-p$ celle du cas défavorable. La variable aléatoire X qui s'intéresse au sucés suit une loi de Bernouilli de paramètre p notée sur l'univers $\{0,1\}$;

$$P(X=1)=p, P(X=0)=q$$

On écrit $X \rightarrow \mathscr{B}(p)$.
Dans ce cas $E(X)=p$ et $V(X)=pq$

Exemple: On lance un dé. On gagne si l'on obtient 5 ou 6. Sinon on a perdu.
Le dé a certes six faces mais le jeu n'a que deux issues (gagné ou perdu). Par conséquent, c'est la loi de Bernoulli avec $p=\frac{1}{3}$.

*La loi Binomiale

Soit une épreuve aléatoire dans laquelle il n'existe que deux résultats possibles, l'un étant qualifié de favorable et l'autre de défavorable (échec et succès). On réalise n épreuves identiques et indépendantes. Soit p la proportion du cas favorable $q=1-p$ celle du cas défavorable. La variable aléatoire X qui compte le nombre de résultats favorables suit une loi Binomiale de paramètres n et p . La probabilité que cette variable prenne une valeur particulière k est :

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k} \quad k \in \{0,1,\dots,n\}$$

On écrit $X \rightarrow \mathscr{B}(n,p)$.
Dans ce cas $E(X)=np$ et $V(X)=npq$

Exemples: On jette dix fois une pièce de monnaie et on considère X la variable aléatoire qui compte le nombre de faces obtenues. On aura alors $X \rightarrow \mathscr{B}(10,\frac{1}{2})$

*La loi hypergéométrique

La loi hypergéométrique est considérée comme semblable à la loi binomiale. Elle correspond à un tirage sans remise n objets d'un ensemble de N objets dont K possèdent une caractéristique particulière. Son univers est $\Omega = max(0;n-qN),\dots,min(pN;n)$ où $p=\frac{K}{N}$ et $q=1-p$.

La probabilité que cette variable prenne une valeur particulière k est :

$$P(X=k)=\frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}$$

On écrit $X \rightarrow \mathcal{H}(N, n, p)$.

Dans ce cas $E(X)=np$ et $V(X)=npq\dfrac{N-n}{N-1}$

Exemple: Une caisse contient 12 cartes graphiques parmi lesquelles 3 sont défectueuses. 4 cartes graphiques sont prises au hasard et sans remise de la caisse. Soit X le nombre de cartes graphiques dans l'échantillon, alors $X \rightarrow \mathcal{H}(12, 4, \frac{3}{12})$

Approximation d'une loi hypergéométrique par une binomiale:

- Soit X ~ $H(n,a,b)$, alors $P(X=k)=\dfrac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}$

Si $N=a+b \rightarrow \infty$, alors $H(n,a,b) \rightarrow B\left(n, \dfrac{a}{N}\right)$

- $X \sim B(n,p) \Longrightarrow P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$
- *En pratique, cette approximation est vraie dès que* $\boxed{\dfrac{n}{N} < 0{,}1}$

***La loi de Pascal**

Soit $r \geq 1$ et $p \in]0;1[$. On note $Pa(r, p)$ la loi de Pascal de paramètres r et p ayant pour univers $\{n \geq r, n \in \mathbb{N}\}$. et vérifiant

$$\forall k \geq r, P(X=k)=C_{r-1}^{(k-1)} p^r (1-p)^{k-r}$$

Concrètement, cette loi correspond à la probabilité pour avoir r succès d'un événement qui a une probabilité p.

Dans ce cas $E(X)=\dfrac{r}{p}$ et $V(X)=\dfrac{r(1-p)}{p^2}$

Exemple: On lance une pièce de monnaie (truquée) dont la probabilité d'obtenir pile est 0,2. On note par X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le10-ème pile. Alors $X \rightarrow Pa(10, 0.2)$.

***La loi de Poisson**

Lorsque le nombre n des épreuves devient très grand , et que la probabilité p devient très faible on démontre que la loi binomiale tend vers la forme limite :

$$P(X=k)=\frac{e^{np}(np)^k}{k!} \quad k \in \{0, 1, \ldots, n\}$$

La nouvelle loi ainsi définie est appelée loi de Poisson qui est qualifiée de loi des événements rares du fait que p est très faible. On note souvent . On écrit $X \rightarrow \wp(\lambda)$ .Dans ce cas $E(X)=\lambda$ et $V(X)=\lambda$

Cette loi s'applique au cas d'un nombre rare d'évènement pendant une période de temps. Si un événement surgit avec une proportion p pendant une période de temps limité t , alors la probabilité que ledit événement se produise k fois pendant dans une période plus longue T est régie par une loi de Poisson de paramètre $\lambda=np$ avec $n=[T/t]$.

Exemples: Supposons qu'un standardiste reçoit deux appels par minute, t doit correspondre à une unité de temps plus faible que la minute soit, la seconde avec une probabilité de recevoir un appel de 2/60= 1/30, le nombre d'appels reçus pendant cinq minutes suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda=np=300/30=10$.

Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson:

Si les conditions suivantes pour n et p sont réalisées:

- n est grand ($n \geq 50$),
- p est voisin de 0 ($p<0{,}1$),

C'est-à-dire dans le cas de la réalisation d'événements rares, la loi binomiale $B(n,p)$ peut-être approximée par une loi de Poisson $P(\lambda)$:

$$P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

dont le paramètre λ est défini par: $\boxed{\lambda=np.}$

II. Lois de probabilités continues

***La loi uniforme**

La loi uniforme est une loi de probabilité définie sur un segment $[a\,;b]$. Elle est notée U(a,b). On appelle parfois cette loi par la loi rectangulaire. Lorsque $a=0$ et $b=1$, on parle de loi uniforme standard.

La densité de probabilité de la loi uniforme continue est

$$f_X(t) = \frac{1}{b-a}$$

La fonction de répartition de la loi uniforme continue est la suivante :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & x \in [a,b] \\ 1 & x > b \end{cases}$$

Dans ce cas $E(X)=\dfrac{a+b}{2}$ et $V(X)=\dfrac{(b-1)^2}{12}$

Exemple:

Ahmed et Amine ont rendez-vous à la gare entre 14 h et 15 h. Ils arrivent indépendamment et au hasard entre 14h et 15h. Quelle est la probabilité que tous les deux arrivent entre 14 h 25 et 14 h 35 ?

Réponse:notons X la minute d'arrivée, X suit une loi uniforme U(1,60):

$P(25 \leq X \leq 35)=\dfrac{35-25}{60}=\dfrac{1}{6}$.

***La loi normale**

La loi normale (ou loi de Gauss- Laplace) est une loi de probabilité continue dont la densité de probabilité est donnée par l'expression :

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}}\exp^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})^2}$$

m et σ sont les paramètres de la loi, respectivement sa moyenne et son écart type. Pour noter qu'une variable aléatoire X suit une loi normale de moyenne m et d'écart type σ on écrit : $X \rightarrow \aleph(m,\sigma)$

Dans ce cas $E(X)=m$ et $V(X)=\sigma^2$

Remarque: Si on définit la variable aléatoire $Z\dfrac{X-m}{\sigma}$, alors $Z \rightarrow \aleph(0,1)$ c'est la loi normale centrée réduite.

L'intérêt de ce changement de variable est qu'il permet de ramener n'importe quelle distribution normale à une même loi de probabilité qui est la loi normale centrée réduite pour laquelle on dispose de tables de probabilité.

Puisque cette loi est symétrique alors on a

$P(Z<-a)=1-P(Z<a),\ a \geq 0,$ $P(a<Z<b)=P(Z<b)-P(Z<a)$ *et* $P(-a<Z<a)=2\mathrm{P}(Z<2)-1$

Exemple:

Soit $X \rightarrow \aleph(100{,}10)$. Calculer les probabilités: $P(X<110)$, $P(X>105)$ = et $P(110<X<120)$