Chapitre 6: Les couples aléatoires

I. Généralités

Définition. Un couple aléatoire est un couple (X, Y) où X et Y sont des variables aléatoires. De même on parle de triplet aléatoire (X, Y, Z) si on considère trois variables $X, Y, Z,$ et plus généralement de vecteur aléatoire, ou n-uplet aléatoire $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, en considérant n variables $X_1, X_2, \ldots, X_{n.}$

Définition. Le support d'un couple aléatoire (X, Y) est l'ensemble des valeurs prises par (X, Y) , c'est-à-dire l'ensemble des couples de valeurs prises par X et Y . On le note $S(X, Y)$, et il est donc égal à $S(X) \times S(Y)$.

Exemples :

- Si X et Y correspondent à des lancers de dés, on a $S(X) = S(Y) = \{1,2,3,4,5,6\}$ et $S(X, Y) = \{(x, y), x, y \in \{1,2,3,4,5,6\}\} = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$.
  Le cardinal de $S(X, Y)$ est donc 6 2 = 36.
- Avec 10 lancers de dé, on obtient 10 variables $X_1, \ldots, X_{10}$, et donc un vecteur aléatoire $(X_1, \ldots, X_{10})$. Le support de ce vecteur est l'ensemble $S((X_1, \ldots, X_{10})) = \{1,2,3,4,5,6\}^{10}$, et donc $Card(S((X_1, \ldots, X_{10}))) = 610$, soit environ 60 millions de valeurs possibles.

II. Couple de variables discrètes

Définition. La loi d'un couple (X, Y) de variables discrètes est l'ensemble des probabilités $P((X, Y) = (x, y)) = P(X = x \text{ et } Y = y)$ souvent notée $P(X = x, Y = y)$ pour tous les couples $(x, y) \in S(X, Y),$. On peut présenter cette loi sous forme d'un tableau :

$x \backslash y$	y_1	$\cdots$	y_k	$\cdots$	Total (loi de X)
x_1	$P(X = x_1, Y = y_1)$	$\cdots$	$P(X = x_1, Y = y_k)$	$\cdots$	$P(X = x_1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$		$\vdots$
x_n	$P(X = x_n, Y = y_1)$	$\cdots$	$P(X = x_n, Y = y_k)$	$\cdots$	$P(X = x_n)$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
Total (loi de Y)	$P(Y = y_1)$	$\cdots$	$P(Y = y_k)$	$\cdots$	

En faisant les additions de chaque ligne et de chaque colonne, on obtient les lois de X et de Y . On a en fait les formules : pour tout x dans $S(X)$,

$$P(X = x) = \sum_{y \in S(Y)} P(X = x, Y = y),$$

De même pour tout y dans $S(Y)$,

$$P(Y = y) = \sum_{x \in S(X)} P(X = x, Y = y).$$

Définition: On appelle les lois de X et de Y les lois marginales du couple (X, Y) . Souvent on les appelle aussi lois marginales de X et de Y .

Propriété: Si X et Y sont des variables indépendantes, alors on déduit la loi du couple à partir des lois marginales : $P(X = x, Y = y) = P(X = x) P(Y = y)$.

Exemple: On lance 2 fois successivement la pièce de monnaie ; à chaque fois, si la pièce tombe sur face, on met une bille dans le sac A, sinon on ne fait rien. Puis on relance 2 fois la pièce et à chaque fois, si la pièce tombe sur face, on met une bille dans le sac B, sinon on ne fait rien.
Notons X le nombre de billes contenues dans le sac A à la fin de l'expérience, Y le nombre de billes dans le sac B. Alors Il est facile de voir que X et Y suivent toutes les deux la loi binomiale de paramètres $n = 2$ et $p = 0.5$.

On a alors:

	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$	$P(X=x)$
$X=0$	0.0625	0.125	0.0625	0,25
$X=1$	0.125	0.25	0.125	0,5
$X=2$	0.0625	0.125	0.0625	0,25
$P(Y=y)$	0.25	0.5	0.25	1

*L'espérance: Lorsque l'on connaît la loi d'un couple de variables il est possible de calculer l'espérance d'une fonction réelle f de ces deux variables. La formule pour des variables discrètes est :

$$E(f(X,Y)) = \sum_{x\in\mathcal{S}(X)} \sum_{y\in\mathcal{S}(Y)} f(x,y)P(X=x,Y=y).$$

Exemple: pour l'exemple précédent on peut calculer $E(X+Y)$:

$$\begin{aligned} E(X+Y) &= (0+0)*0.0625+(0+1)*0.125+(0+2)*0.0625 \\ &+ (1+0)*0.125+(1+1)*0.25+(1+2)*0.125 \\ &+ (2+0)*0.0625+(2+1)*0.125+(2+2)*0.0625 = 2 \end{aligned}$$

Notons que $E(X+Y)=E(X)+E(Y)=2\times 0{,}5+2\times 0{,}5=2$

*Conditionnement par rapport à une autre variable: Soient X et Y deux variables discrètes. Pour tout $y\in S(Y)$ tel que $P(Y=y)\neq 0$, on peut considérer la loi de X sachant $\{Y=y\}$, donnée par les valeurs $P(X=x\backslash Y=y)$ pour tous les $x\in S(X)$.

On a $P(X=x\backslash Y=y)=\dfrac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)}$. De plus, la formule des probabilités totales donne :

$$P(X=x) = \sum_{y\in\mathcal{S}(Y)} P(X=x|Y=y)P(Y=y).$$

L'espérance conditionnelle de X sachant $\{Y=y\}$ est donc

$$E(X|Y=y) = \sum_{x\in\mathcal{S}(X)} xP(X=x|Y=y).$$

Exemple: La loi de X sachant que $Y=1$ est donnée par:

$X=x$	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{0{,}125}{0{,}5}$	$\frac{0{,}25}{0{,}5}$	$\frac{0{,}125}{0{,}5}$

Et $E(X/Y=1)=0\times\dfrac{0{,}125}{0{,}5}+1\times\dfrac{0{,}25}{0{,}5}+2\times\dfrac{0{,}125}{0{,}5}$

*Espérance Conditionnelle de X sachant Y. On a défini E(X|Y = y) pour tout y ∈S(Y). Si maintenant on note ψ(y) = E(X|Y = y), alors on peut définir E(X|Y) = ψ(Y) : c'est l'espérance conditionnelle de X sachant Y . Autrement dit, E(X|Y) est la variable aléatoire telle que pour tout y ∈S(Y), E(X|Y) = E(X|Y = y) lorsque Y = y. Il faut faire très attention ici car E(X|Y) est une variable aléatoire et non un nombre, à la différence de E(X).

III. Covariance et corrélation

Définition. Soient X et Y deux variables aléatoires dont les variances sont définies. La covariance de X et Y est $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=E((X-E(X))(Y-E(Y)))$.

La covariance est une mesure incomplète de l'indépendance de deux variables. En effet on a la résultat suivant :

Proposition. Soient X et Y deux variables indépendantes. Alors $Cov(X,Y)=0$.

Définition. La corrélation entre deux variables X et Y est définie par

$$\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Exemple: On a

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= 0*0*0.0625+0*1*0.125+0*2*0.0625 \\ &+ 1*0*0.125+1*1*0.25+1*2*0.125 \\ &+ 2*0*0.0625+2*1*0.125+2*2*0.0625=1 \end{aligned}$$

De plus

$V(X)=V(Y)=0^2\times 0{,}25+1^2\times 0{,}5+2^2\times 0{,}25=1{,}5$

D'où

$\rho(X,Y)=\dfrac{1}{\sqrt{(1{,}5)}\sqrt{(1{,}5)}}=0.6666667$

Remarques:

- On a donc toujours $-1\leq\rho(X,Y)\leq 1$.
- Lorsque $\rho(X,Y)=0$, c'est-à-dire lorsque $Cov(X,Y)=0$, on dit que X et Y sont décorrélées.

Proposition. Soient X,Y deux variables de variances finies, et a,b deux réels fixés.

$$V(aX+bY)=a2V(X)+b2V(Y)+2ab\mathrm{Cov}(X,Y).$$

En particulier on a les formules :

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y) \ ,$$
$$V(X-Y)=V(X)+V(Y)-2\mathrm{Cov}(X,Y).$$

Si X et Y sont décorrélées (donc en particulier si elles sont indépendantes), alors

$V(X+Y)=V(X-Y)=V(X)+V(Y)$.

II. Couple de variables continues

***Définition** Le couple (X, Y) est continu, s'il existe une fonction f continue, des deux variables X et Y, appelée densité de probabilité conjointe du couple (X, Y), telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy=1$$

Exemple:

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi^2(x^2+y^2+x^2y^2+1)}$$

On peut vérifier que c'est bien une densité d'un couple aléatoire. En effet

$$\{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{\pi(1+u^2)}\}^2=\frac{1}{\pi^2}\Big[Atan(u)\Big]_{-\infty}^{+\infty}=1$$

***Probabilités marginales**

Par analogie avec le cas des variables discrètes,on peut définir des variables marginales

$$f_x(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy \qquad x \text{ fixé}$$
$$f_y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx \qquad y \text{ fixé}$$

D'où

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f_x(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x,y)\,dx\,dy$$
$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} y\,f_y(y)\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y\,f(x,y)\,dx\,dy$$

*Densités Conditionnelles

$$f(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_x(x)} \quad ; \quad f(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_y(y)}$$

***Esperences Conditionnelles**

$$E(Y/X=x)=\int_{\mathbb{R}} y\, g(y/x)\,\mathrm{d}y$$

***Variables Indépendantes**

$$f(x,y)=f_x(x)\,f_y(y)$$

Exemple

On voit immédiatement que l'on peut écrire :

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}\cdot\frac{1}{\pi(1+y^2)}$$

Et en déduire que :

$$f(x,y)=f_x(x)\,f_y(x)$$

avec :

$$f_x(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}\quad ;\quad f_y(y)=\frac{1}{\pi(1+y^2)}$$

Ce qui signifie que les variables X et Y sont indépendantes.

***Fonction de répartition**

La fonction de répartition conjointe F du couple (X,Y) est l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $[0,1]$ définie par :

$$F(a,b)=P(X<a,Y<b),\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2$$

***Relation avec la densité**

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}$$

*** Changement de variables**

Soit (X,Y) un couple aléatoire de densité f. Soit ϕ une application inversible, continûment différentiable ainsi que son inverse.On définit le couple aléatoire $(U,V)=\phi(X,Y)$. Sa densité est donnée par :

$$f_{(U,V)}(u,v)=f\circ\phi^{-1}(u,v)\left|J_{\phi^{-1}}\right|$$

où $J_{\phi^{-1}}$ est le jacobien de $J_{\phi^{-1}}$

Exemple: Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi normale centrée réduite, N(0 ; 1). On considère les variables aléatoires U=X et $Z=X/Y$ et on veut définir la loi de probabilité du couple (U,V). X et Y étant deux variables indépendantes, la densité du couple $(X,\ Y)$ est :

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)$$

On a le changement de variables u = x et z = x/y. Le jacobien de la transformation est :

$$J=\begin{bmatrix}1 & 1/y\\ 0 & x/y^2\end{bmatrix}=x/y^2=\frac{z^2}{x}$$

D'où la densité du couple (X,Z) :

$$g(x,z)=\frac{1}{2\pi}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(x^2+\frac{x^2}{z^2}\right)\right]\frac{|x|}{z^2}$$

La densité de la variable Z s'obtient par intégration :

$$g(z)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(x^2+x^2/z^2\right)\right]x/z^2\,\mathrm{d}x$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(x^2+x^2/z^2\right)\right]x/z^2\,\mathrm{d}x$$

$$g(z)=\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{(1+z^2)}$$

On reconnaît la densité d'une variable aléatoire suivant une loi de Cauchy