

## TD. n°5: Couples aléatoires

**Exercice 1:** La loi jointe du couple  $(X, Y)$  est donnée par le tableau suivant :

| Y | 0    | 1        | 2    | 3    |
|---|------|----------|------|------|
| X | 0.22 | 0.20     | 0.00 | 0.02 |
| 0 | 0.22 | 0.20     | 0.00 | 0.02 |
| 1 | 0.05 | $\alpha$ | 0.04 | 0.01 |
| 2 | 0.04 | 0.07     | 0.02 | 0.22 |

- 1) Déterminer la constante  $\alpha$ .
- 2) Déterminer les lois marginales de  $X$  et  $Y$ .
- 3) Calculer  $E(X)$  et  $E(Y)$ .
- 4) Déterminer la loi conditionnelle de  $X$  sachant que  $Y=2$ .
- 5) Calculer  $E(X/Y=2)$  et  $\text{Var}(X/Y=2)$ .
- 6) Calculer  $\text{Cov}(X, Y)$ , puis le coefficient de corrélation.
- 7) Étudier l'indépendance de  $X$  et  $Y$ .

**Exercice 2:** Soit un couple de variable aléatoire de densité conjointe

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \alpha e^{-x-2y} & \text{si } x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

- 1) Déterminer  $\alpha$  pour que  $f$  soit la densité jointe de  $X$  et  $Y$ .
- Déterminer les lois marginales de  $X$  et de  $Y$ .
- 3) Déterminer les densités conditionnelles.
- 4) Calculer  $E(X|Y=y)$  et  $E(Y|X=x)$ .
- 5) Calculer les fonctions de répartition marginales  $F_X$  et  $F_Y$ .

2)

**Exercice 3:** Soit un couple de variables aléatoires de densité conjointe

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{si } 0 < x < y \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

- 1) Déterminer les lois marginales de  $X$  et de  $Y$ .
- 2) Déterminer les densités conditionnelles.
- 3) En déduire  $E(Y|X=x)$ , puis l'espérance conditionnelle  $E(Y/X)$ .
- 4) Déterminer la loi conjointe du couple  $(Z, T)$  défini par

$$\begin{cases} Z = X + Y \\ T = Y - X \end{cases}$$

- 5) En déduire les densités marginales de  $Z$  et  $T$ .

**Devoir à rendre obligatoirement le lundi 08 mai 2023 pendant la séance du cours**

**ça fera une partie de la note du contrôle**

**Exercice 1:** Soit  $X$  une variable aléatoire discrète dont la loi est donnée par:

|        |     |     |     |     |     |
|--------|-----|-----|-----|-----|-----|
| k      | -2  | -1  | 0   | 1   | 2   |
| P(X=k) | 4/9 | 2/9 | 1/9 | 1/9 | 1/9 |

- 1) Déterminer la loi de la variable aléatoire  $Y=X^2$ .
- 2) Déterminer la loi conjointe de  $(X,Y)$ .
- 3) Les variables  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes?
- 4) Calculer  $\text{Cov}(X,Y)$ .

**Exercice 2:** Soit un couple de variable aléatoire de densité conjointe

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} K & \text{si } (x,y) \in D(x,y) \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

$$\text{Avec } D(x,y) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1, x+y \leq 1\}$$

- 1) Déterminer  $K$  pour que  $f$  soit la densité jointe de  $X$  et  $Y$ .
- 2) Déterminer les lois marginales de  $X$  et de  $Y$  et dites si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes?
  - 1) Calculer la covariance de  $X$  et  $Y$  ainsi que la corrélation entre  $X$  et  $Y$
  - 2) Déterminer les densités conditionnelles .
- 3) On pose  $U=X+Y$  et  $V=2Y$ . Déterminer la densité du couple  $(U,V)$ .

