Chapitre 3

5.0

14/06/2023

Table des matières

I Les fonctions réelles d'une variable réel

1. Objectifs

L'objectif principal de ce chapitre est de :

- Comprendre les concepts de base des fonctions (domaine de définition, composition de fonctions, fonctions périodiques, fonctions paires, fonctions impaires, fonctions bornées, sens de variation des fonctions).
- Maîtriser la notion de limites de fonctions (définition de la limite, limite à droite, limite à gauche, limites infinies et limites à l'infini, formes indéterminées, opérations algébriques sur les limites, limite d'une fonction composée).
- Explorer la notion de continuité et de prolongement par continuité.

2. Généralité sur les fonctions

Définition

On appelle une fonction réelle d'une variable réelle, toute fonction de $\mathbb{R}$ ou d'une partie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$,

$$f : \quad \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$$

Définition : Fonction paires-impaires

- Une fonction f définie sur un intervalle I symétrique par rapport à 0 est dite paire si $\forall x \in I, \quad f(-x) = f(x)$
- Une fonction f définie sur un intervalle I symétrique par rapport à 0 est dite impaire si $\forall x \in I, \quad f(-x) = -f(x)$

Définition : Fonctions périodiques

Une fonction f est dite p\ériodique, s'il existe un $T > 0$, tel que

$$f(x + T) = f(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R} \qquad (1).$$

Si de plus T est le plus petit réel positif vérifiant la définition, alors T est appelé période de la fonction f.

Définition : Fonctions bornées

1. Une fonction f définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ sera dite majorée si et seulement si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in E \ \ f(x) \leq M$.

2. Une fonction f définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ sera dite minorée si et seulement si $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in E \ m \le f(x)$
3. Une fonction f définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ sera dite bornée si et seulement si elle est à la fois minorée et majorée
   ou de manière équivalente
   $\exists A > 0, \ \forall x \in E \quad |f(x)| \le A$

Définition : Fonctions monotones

1. Une fonction f définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ sera dite croissante si et seulement si $\forall x, y \in E; \ x \le y \Rightarrow f(x) \le f(y)$.
2. Une fonction f définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ sera dite strictement croissante si et seulement si $\forall x, y \in E; \ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
3. Une fonction f définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ sera dite décroissante si et seulement si $\forall x, y \in E; \ x \le y \Rightarrow f(x) \ge f(y)$.
4. Une fonction f définie sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ sera dite strictement décroissante si et seulement si $\forall x, y \in E; \ x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.
5. f est monotone si elle est croissante ou bien décroissante.
6. f est strictement monotone si elle est strictement croissante ou bien strictement décroissante.

3. Opérations algébriques sur les fonctions

Définition

Soit $E \subset \mathbb{R}$ et soient $f \quad : \quad E \rightarrow \mathbb{R}$ et .

1. ***Somme :***
   On appelle somme de deux fonctions f et g et on note $f + g$, la fonction
2. ***Produit par un scalaire :***
   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda.f$ est définie par
3. ***Produit de deux fonctions :***
   On appelle produit de deux fonctions f et g et on note $f.g$, la fonction
4. ***Quotient :***
   Si $\forall x \in E : g(x) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est définie par :

4. Limite et continuité d'une fonction

4.1. Limite d'une fonction en un point

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et soit $x_0 \in I$, on dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha_\varepsilon > 0;\ \forall x \in I, (\ |x - x_0| < \alpha_\varepsilon \Rightarrow\ |f(x) - l| < \varepsilon)$$

et notera dans ce cas

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Fondamental

Si la limite d'une fonction en un point existe alors elle est unique, et $\left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l\right) \Longleftrightarrow \left(\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l\right)$

Propriétés :

Soit f et g deux fonctions données alors,

1. Si $\left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1 \text{ et } \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_2\right)$ alors $\left(\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = l_1 + l_2\right)$.
2. Si $\left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1 \text{ et } \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_2\right)$ alors $\left(\lim\limits_{x \to x_0} (f(x).g(x)) = l_1.l_2\right)$.
3. Si $\left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1 \text{ et } \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_2 \neq 0\right)$ alors $\left(\lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{l_1}{l_2}\right)$.
4. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ et g est une fonction bornée alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0$.

4.2. Limites infinies

Définition

1. On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 et on écrit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, si
   $$\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty\right) \Leftrightarrow (\forall A > 0,\ \exists \alpha > 0;\ (\forall x \in I,\quad |x - x_0| < \alpha\ \Rightarrow f(x) > A))$$
   .
2. On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers x_0 et on écrit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, si
   $$\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty\right) \Leftrightarrow (\forall B < 0,\ \exists \alpha > 0;\ (\forall x \in I,\quad |x - x_0| < \alpha\ \Rightarrow f(x) < B))$$
   .
3. On dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers $+\infty$ et on écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$, si
   $$\left(\lim_{x \to +\infty} f(x) = l\right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0;\ (\forall x \in I,\ \ x > A\ \Rightarrow\ |f(x) - l| < \varepsilon))$$
   .
4. On dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers $-\infty$ et on écrit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = l$, si
   $$\left(\lim_{x \to -\infty} f(x) = l\right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0,\ \exists B < 0;\ (\forall x \in I,\ \ x < B\ \Rightarrow\ |f(x) - l| < \varepsilon))$$

Fondamental : Théorème d'encadrement ou des gendarmes

Soit $a \in \mathbb{R}$ ou $a = +\infty$ ou $a = -\infty$.

Si $\lim\limits_{a} f(x) = l$, $\lim\limits_{a} g(x) = l$ et $f \leq h \leq g$ alors $\lim\limits_{a} h(x) = l$

Fondamental : Théorème de comparaison

- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $g \geq f$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et $g \leq f$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

II Continuité et propriétés

1. Continuité

Définition

Soit f une fonction dé finie en un point x_0.

1. On dit qu'une fonction f est continue en un point x_0 si et seulement si
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
il est donc nécessaire que f soit définie en x_0 , en d'autres
termes, avant de parler de continuité en un point il faut d'abord s'assurer que f y est définie.
2. On dit qu'une fonction f est continue en un ensemble$I \subset \mathbb{R}$ si et seulement si f est continue en tout point de I.
3. On dit qu'une fonction f est continue à droite du point x_0 si et seulement si
$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = f(x_0)$.
4. On dit qu'une fonction f est continue à gauche du point x_0
si et seulement si
$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = f(x_0)$

Propriétés :

1. (f est continue en un point x_0) $\Longleftrightarrow$ $(\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = f(x_0))$.
2. Si f et g sont continues en un point x_0 alors$(f + g)$ et $(f.g)$ sont continues en x_0, et si de plus $g(x_0) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est aussi continue en x_0.
3. Si $f : A \to B$ est continue en x_0 et si $g : B \to C$
est continue en $f(x_0)$ alors $(g \circ f)$ est continue enx_0.

Opérations sur les fonctions continues :

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I ; soit un réel $a \in \mathbb{R}$. Si les fonctions f et g sont continues en a, alors :

1. $\lambda.f$ est continue en a ($\lambda \in \mathbb{R}$).
2. $f + g$ est continue en a (idem pour "-").
3. $f.g$ est continue en a.
4. $\frac{f}{g}$ est continue en a si $g(a) \neq 0$ et non définie en a si $g(a) = 0$.
5. Si une fonction g est continue au point a et une fonction f est continue au point $g(a)$, alors$f \circ g$ est continue en a.

2. Prolongement par continuité

Définition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction donnée, telle

que f n'est pas définie en x_0 mais admettant une limite $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers x_0, $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

On définit alors la fonction $\tilde{f}$ appelée prolongement par continuité de f au point x_0 par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \neq x_0 \\ l & \text{si} \quad x = x_0 \end{cases}$$

Remarque

1. Il faut observer que contrairement à f sont prolongement par continuité $\tilde{f}$ est définie en x_0 et de plus $\tilde{f}$ y est continue.
2. Le prolongement par continuité peut ne pas exister, par exemple $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ n'admet pas de prolongement par continuité en $x_0 = 0$ car $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

3. Fonction continue sur un intervalle fermé borné

Définition

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ alors l'intervalle fermé borné $[a, b]$ est aussi appelé compact de $\mathbb{R}$.

Définition

$$\forall x \in E, f(x) \leq M$$

Soit f une fonction majorée sur l'ensemble E.

alors

alors M est appelé majorant (clairement il n'est pas unique).

On appelle borne supérieure de f sur E le plus petit des majorants, on le note $\underset{x \in E}{Sup}\ f(x)$.

Soit f une fonction minorée sur l'ensemble E est appelé majorant (clairement il n'est pas unique).

On appelle borne supérieure de f sur E le plus petit des majorants, on le note $\underset{x \in E}{Sup}\ f(x)$.

Soit f une fonction minorée sur l'ensemble E

$\forall x \in E, m \leq f(x)$

alors m est appelé minorant (clairement il n'est pas unique).

On appelle borne inférieure de f sur E le plus grand des minorants, on le note $\underset{x \in E}{Inf}\ f(x)$.

Proposition :

L'image d'un compact $[a,b]$ par une fonction continue f est aussi un compact i.e. $f([a,b]) = [\alpha,\beta]$ avec $\alpha = \underset{x\in[a,b]}{Inf}\ f(x)$ et $\beta = \underset{x\in[a,b]}{Sup}\ f(x)$.

Théorème des valeurs intermédiaires :

Soit f une fonction continue sur un compact $[a,b]$; alors f atteint toutes les valeurs comprises entre α et β \$ où $f([a,b]) = [\alpha,\beta]$, en d'autres termes

$$\forall y \in [\alpha,\beta],\ \exists x \in [a,b]\ ;\ y = f(x)$$

En particulier

$$\alpha\beta \leq 0 \Longrightarrow \exists x_0 \in [a,b]\ ;\ f(x_0) = 0$$

Remarque

Pour appliquer le théorème des valeurs intermédiaires on a pris l'habitude d'observer si $f(a).f(b) \leq 0$, auquel cas on en déduit l'existence de $x_0 \in [a,b]$; tel que $f(x_0) = 0$, ceci n'est pas faux, mais il faut faire attention! par exemple $[a,b] = [-2,2]$

$$f(x) = x^2$$

alors bien que

$$f(-2).f(2) = 4 \times 4 = 16 > 0$$

on a bien

$$x_0 = 0 \in [-2,2]\ ;\ \ \text{tel que}\ f(0) = 0.$$

4. Fonction continue strictement monotone

Fondamental

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit f une fonction définie sur I, continue et strictement monotone alors on a les propriétés suivantes :

1. $f(I)$ est aussi un intervalle de $\mathbb{R}$ (fermé borné si I est aussi fermé borné).
2. f est bijective de I vers $f(I)$.
3. L'application réciproque $f^{-1} : f(I) \to I$, est continue strictement monotone de même nature que f (si f est strictement croissante alors f^{-1} l'est aussi, et si f est strictement décroissante alors f^{-1} l'est aussi).
4. Les graphes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice $y = x$.

Complément : Fonctions réciproques élémentaires

1. La fonction
$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1,1]$$
$$x \mapsto f(x) = sinx$$
est continue strictement croissante, elle est donc bijective et admet une application réciproque que l'on notera $Arcsin$, ainsi

$$Arcsin: \quad [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
$$x \mapsto f(x) = Arcsinx$$

avec

$y = Arcsinx \Leftrightarrow x = siny$

$$Arcsin\,(sinx) = x \text{ et } sin\,(Arcsinx) = x$$

.

2. La fonction

   $f: \quad [0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$

   $x \mapsto f(x) = cosx$

   La fonction

   $f: \quad [0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$

   $x \mapsto f(x) = cosx$

   avec

   $y = Arccosx \Leftrightarrow x = cosy$

   $Arccos\,(cosx) = x$ et $cos\,(Arccosx) = x$

3. La fonction

   $f: \quad \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$

   $x \mapsto f(x) = tgx$

   est continue strictement croissante, elle est donc bijective et admet une application réciproque que l'on notera $Arctg$, ainsi

   $Arctg: \quad \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

   $x \mapsto f(x) = Arctgx$

   avec

   $y = Arctgx \Leftrightarrow x = tgy$

   $Arctg\,(tgx) = x$ et $tg\,(Arctgx) = x$