Chapitre 2

Les Champs Electromagnétiques

2.1 Introduction

On présentera dans ce chapitre les notions théoriques de bases nécessaires pour l'étude de la propagation et les antennes. On rappellera principalement les équations de maxwell

2.2 L'onde électromagnétique

2.2.1 Equations de Maxwell

Ce sont des relations de types vectoriels liants le champ électrique au champ magnétique avec des paramètres traduisant la matière (Perméabilité μ, Permittivité ε, Conductivité σ) dans la quelle se propage l'onde électromagnétique.
Les équations de Maxwell seront données par :

$$Rot\bar{E} = -\mu \frac{d\bar{H}}{dt} \qquad (I.1)$$

L'équation de Maxwell-Faraday : C'est la forme différentielle de la loi de Faraday du britannique Michael Faraday.

$$\mathrm{Div}\bar{\mathrm{E}} = \rho/\varepsilon \qquad (I.2)$$

L'équation de Maxwell-Gauss : C'est la forme différentielle de la loi de Gauss de l'allemand Carl Friedrich Gauss connue aussi par la loi de Gauss électrique.

$$Rot\bar{H} = \bar{J} + \frac{d\bar{D}}{dt} \qquad (I.3)$$

L'équation de Maxwell-Ampère : C'est la forme différentielle de la loi d'Ampère du Physicien français André-Marie Ampère.

$$Div\bar{B} = 0 \qquad (I.4)$$

L'équation de Maxwell-Flux magnétique : Le champ magnétique est à flux constant, c'est la loi de Gauss magnétique.

Où
$\bar{\mathrm{E}}$: Champ électrique (V/m)
$\bar{\mathrm{H}}$: Champ magnétique (A/m)
$\bar{\mathrm{D}}$: Induction électrique (coulomb/m²) : $\vec{\mathrm{D}} = \varepsilon.\bar{\mathrm{E}}$ (ε : Permittivité diélectrique (F/m))
$\bar{\mathrm{B}}$: Induction magnétique (Tesla) : $\vec{\mathrm{B}} = \mu.\bar{\mathrm{H}}$ (μ : Perméabilité magnétique (H/m))
$\vec{\mathrm{J}}$: Courant de conduction (A/m) : $\vec{\mathrm{J}} = \sigma.\bar{\mathrm{E}}$ (σ : Conductivité électrique (Ω^{-1}/m))
ρ : Densité de charge (Coulomb/m³)

Michael Faraday
(1791-1867)

Johann Carl Friedrich Gauss
(1777-1855)

André-Marie Ampère
(1775-1836)

2.2.2 Signification physique des équations de Maxwell

- La première équation, dite de Maxwell-Faraday, donne la relation entre la circulation du champ électrique sur un contour fermé et la variation Temporelle du flux du champ magnétique à travers une surface qui s'appuie Sur ce contour. C'est le phénomène d'induction.
- La deuxième équation, dite équation de Maxwell-Gauss exprime le fait que le flux de champ électrique à travers une surface fermée est relié à la charge électrique contenue à l'intérieur de cette surface.
- La troisième équation, dite de Maxwell-Ampère, exprime la relation entre la circulation du champ magnétique sur un contour fermé et le flux de courant à travers une surface s'appuyant sur ce contour.
- Enfin, La quatrième équation exprime que le flux du champ magnétique à travers n'importe quelle surface fermée est nul. Il n'existe pas de monopoles magnétiques.
- L'équation locale de conservation de la charge

$$0 = \mathrm{div}\,(\mathbf{rot}\,\mathbf{B}) = \mu_0 \mathrm{div}\,\mathbf{j} + \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial\,(\mathrm{div}\,\mathbf{E})}{\partial t}$$

$$0 = \mu_0 \left(\mathrm{div}\,\mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{E} = -\,\mathbf{grad}\, V - \partial \mathbf{A}/\partial t \\ \mathbf{B} = \mathbf{rot}\,\mathbf{A} \\ \text{et la condition de jauge de Coulomb, div } \mathbf{A} = 0 \end{array}}$$

$$\left\{\begin{array}{l} V \text{ est le potentiel scalaire (unité: V) - } \textit{champ scalaire} \\ \mathbf{A} \text{ est le potentiel vecteur (unité: T m) - } \textit{champ vectoriel} \\ \partial \mathbf{A}/\partial t \text{ est le champ électromoteur (unité: V m}^{-1}\text{) - } \textit{champ vectoriel} \end{array}\right.$$

Remarques:
-l'équation de Maxwell Faraday $\mathbf{rot}\,\mathbf{E} = -\,\partial \mathbf{B}/\partial t$
découle de $\mathbf{E} = -\,\mathbf{grad}\, V - \partial \mathbf{A}/\partial t$ en prenant son rotationnel

-l'équation de Maxwell flux div $\mathbf{B} = 0$
découle de $\mathbf{B} = \mathbf{rot}\,\mathbf{A}$ en prenant sa divergence

-la divergence de l'équation de Maxwell Ampère $\mathbf{rot}\,\mathbf{B} = \mu_0\,\mathbf{j} + \mu_0\,\varepsilon_0\,\partial \mathbf{E}/\partial t$
combinée avec l'équation de Maxwell Gauss div $\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$,
donne l'équation de conservation de la charge:

$$\boxed{\partial \rho/\partial t + \mathrm{div}\,\mathbf{j} = 0}$$

Avec :

- ρ : densité volumique de charge
- ε : permittivité électrique (F/m). A noter ε0 : permittivité diélectrique dans le vide (= 8.85e-12) et εr : permittivité électrique relative telle que ε = ε0× εr
- μ : perméabilité magnétique (H/m). A noter μ0 : permittivité diélectrique dans le vide (= $4\pi.10^{-7}$) et μr : permittivité magnétique relative telle que μ = μ0× μr

et σ : conductivité électrique du milieu (S/m)

I.4.2 Régime harmonique

Les équations (I.7) sont des relations *temporelles* entre les champs et les inductions. En utilisant la notation en champ complexe $\vec{E} = \vec{E}_o.\exp(i\omega t)$, les relations précédentes deviennent:

$$\begin{cases} rot\vec{H} = \vec{J} - i\omega.\vec{D} \\ rot\vec{E} = i\omega.\vec{B} \\ div(\vec{D}) = \rho \\ div(\vec{B}) = 0 \end{cases}$$

Dans les développements qui suivent, nous nous intéressons uniquement à des milieux dont la perméabilité est scalaire et égale à celle du vide : μ_o.

I.4.3 Conditions aux limites

Les *relations de continuité* sur une interface plane séparant deux milieux '1' et '2' sont:

$\vec{n}.(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$ continuité des composantes normales de $\vec{B}$

$\vec{n} \wedge (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$ continuité des composantes tangentielles de $\vec{E}$

$\vec{n}.(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma_s$

$\vec{n} \wedge (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_s$

où σ_s et $\vec{J}_s$ sont les densités superficielles de charge et de courant à l'interface.

Version intégrale des équations de Maxwell

- $\nabla\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \rightarrow \iint E.dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}$
- $\nabla\vec{B} = 0 \rightarrow \iint B.dS = 0$
- $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \rightarrow \int E.dl = -\frac{d}{dt}(\iint B.dS) \rightarrow \int E.dl = -\frac{d\phi}{dt}$
- $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) \rightarrow \int B.dl = \mu_0 I_{(S)} + \mu_0\varepsilon_0 \iint \frac{\partial E}{\partial t} dS$