Systèmes linéaires Continus

TP N°3 Modélisation et simulation d'un système masse ressort amortisseur

Pour effectuer l'analyse et la synthèse d'un système dynamique, il est nécessaire de connaitre les relations entre ses grandeurs d'entrée et ses grandeurs de sortie. L'ensemble de ces relations constitue le modèle mathématique du système.

La mise en équation d'un système dynamique consiste à lui appliquer les lois physiques qui le régissent. En général, il s'agit des lois de l'électricité, des lois de la mécanique et des lois de l'écoulement des fluides. Cette mise en équation conduit au modèle mathématique du système.

Rappels des principales loi de la physique

- **Système électrique**

Elément	**Résidence R**	**Inductance L**	**Capacité C**
Loi physique	Loi D'ohm	Loi d'henry	Loi de faraday
Equation	$v(t) = Ri(t)$	$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$	$v(t) = \frac{1}{C}\int i(t)$

Pour chaque élément l'intensité du courant éléctrique est notée $i(t)$ et la tension à ses bornes est notée $v(t)$

- **Système mécanique**

	Mouvement de translation	**Mouvement de rotation**
Frottement visqueux	$f_v = -bv(t)$	$\Gamma_v(t) = -b\theta(t)$
Force de rappel	$f_r = -kx(t)$	$\Gamma_r(t) = -k\theta(t)$
Lois de base	$\frac{d(\left(Mv(t)\right)}{dt}\sum Forces$	$\frac{d\left(J\theta(t)\right)}{dt}\sum couples$

Avec : b : coefficient de viscosité, k : coefficient de raideur, $x(t)$: déplacement. $v(t)$: vitesse de translation ; $\theta(t)$: position angulaire, $\Gamma(t)$: couple de rotation. L'application de la transformée de Laplace aux équations dynamiques établies, dans le cas de conditions initiales nulles. Permet d'obtenir la relation exprimant la grandeur de sortie en fonction de la grandeur d'entrée. Cette relation s'appelle **fonction de transfert**.

Systèmes fondamentaux

Il s'agit de systèmes dynamiques linéaires du 1er ou du 2éme ordre.

- **Systèmes fondamentaux du 1er ordre**

C’est un système régi par une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

$$T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kr(t)$$

Et dont la fonction de transfert s’écrit

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{1 + sT}$$

$r(t)$ Étant l’entrée du système et $y(t)$ sa sortie.

- **Système fondamental du 2ème ordre**

  C’est un système régi par une équation différentielle linéaire à coefficients constants

  $$\left(\frac{1}{\omega_n^2}\right)\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \left(\frac{2\xi}{\omega_n}\right)\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kr(t)$$

  Et dont la fonction de transfert s’écrit

  $$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

  Les pôles de ce système sont donnés par $p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$

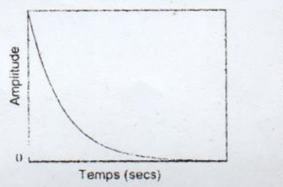
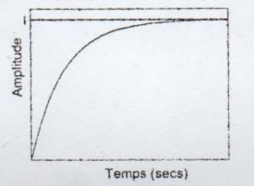
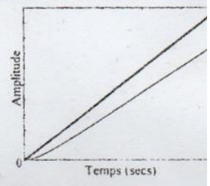
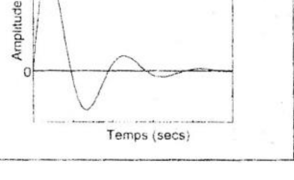
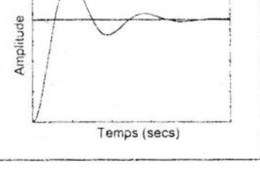
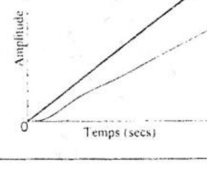
  ξ étant le taux d’amortissement ; ω_n est la pulsation propre non amortie du système.

  La valeur maximale de la réponse indicielle d’un système est appelé taux de dépassement D

  $$D = \exp(-\pi\xi/\sqrt{1 - \xi^2})$$

  Le temps mis pour atteindre ce maximum est $t_p = \frac{\pi}{\omega_{n\sqrt{1-\xi^2}}}$

  Le tableau ci-dessous illustre quelques réponses des systèmes fondamentaux

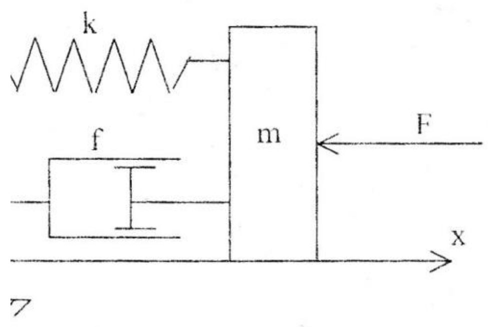
Système	Réponse impulsionnelle	Réponse indicielle	Réponse en vitess
$\frac{K}{1 + sT}$			
$\frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$			

But de la manipulation

La manipulation proposée dans ce TP consiste, en premier lieu, à modéliser le système masse ressort amortisseur. L'étudiant est ensuite amené à exécuter quelques simulations sous Matlab et établir les conclusions convenables.

Travail demandé

Soit le système mécanique ci-dessous :



Applications numériques

m=3 Kg ; k=3.10^{5} N.m^{-1}

f sera un paramètre : f = $150\ N.(m.s^{-1})^{-1}$ puis $f = 750\ N(m.s^{-1})^{-1}$ puis $f = 2250\ N.(m.s^{-1})^{-1}$

Partie A : calculs théoriques

I : Analyse temporelle du système, lors de l'application d'une force F

1.1. Ecrire l'équation différentielle qui régit l'évolution temporelle de ce système, lors de l'application d'un effort F
En déduit la fonction de transfert $H(s)$ du système d'entrée $F(t)$ et de sortie $x(t)$.

1.2. On suppose que le système est équilibre, au repos. A l'instant $t = 0$, on applique une force constante $F = 5000\ N$, (par l'intermédiaire du générateur d'effort) sur le système.

Quelle est la valeur de la position x en régime permanent après application de la fore F ?

Exprimer le résultat en fonction de k, f et m.

Pour quelles valeurs de f la position x présente elle un dépassement durant le régime transitoire ?

II. Analyse du système en boucle fermée

On suppose maintenant que la fore F est la sortie d'un régulateur de fonction de transfert R(s) destiné à piloter la position de la masse m. L'entrée du régulateur est l'écart entre la consigne et la mesure de la position de la masse m. on désire que cette position suive une consigne échelon, et qu'elle atteigne cette consigne à 5% près en moins de 0.5 secondes.

II.1. Donner le schéma fonctionnel du système asservi.

II.2. Donner l'expression de la fonction de transfert du système en boucle fermée si le régulateur est proportionnel de gain G. Elle sera exprimée en fonction de k, g, m, et G Quelle est le gain statique de la fonction de transfert en boucle fermée ?
II.3. Donner l'expression de la fonction de transfert du système en boucle fermée si le régulateur est proportionnel intégral de fonction de transfert $R(s) = \frac{G(1+T_i s)}{T_i s}$
Quel est le gain statique de la fonction de transfert en boucle fermée ?

<u>Partie B : Analyse sous MATLAB</u>
Comparez les résultats trouvés lors de l'étude théorique avec l'analyse faite sous MATLAB

I. Analyse temporelle du système, lors de l'application d'une force F.
I.1. Analyse sous Matlab.
A- Analyser les pôles et les zéros de la fonction de transfert H(s). Utiliser la fonction *PZMAP*.
B- Utiliser la fonction *step* pour simuler la réponse temporelle du système lorsqu'on applique brusquement une force F sur la masse m, visualiser et analyser les résultat (valeur finale. Dépassement…).
Les résultats seront présentés sur une seule figure, constant 3 graphes représentant chacun l'évolution de x(t) pour les valeurs numériques de f.
Vous pouvez utiliser les fonctions *subplot*, *hold*, *figure*, *xlabel*, *ylabel*, *title*, *zoom*.

II. Analyse du système en boucle fermée
II.1. Analyse sous Matlab.
a- Utiliser la fonction *feedback* pour calculer la fonction de transfert en boucle fermée avec le régulateur proportionnel. Vérifier les résultats obtenus par le calcul.
Prendre $f = 250\ N(m.s^{-1})^{-1}$ et choisir G tel que la spécification de précision soit respectée.
b- Simuler le comportement en boucle fermée en réponse à une consigne échelon unitaire. Analyser les résultats et l'influence de G.

c- Utiliser les fonctions *conv* ou *series*, et *feedback* pour calculer la fonction de transfert en boucle fermée avec le régulateur proportionnel intégral. Prendre $f = 250\ N(m.s^{-1})^{-1}$. $G = 0{,}1$. Analyser l'influence de T_i sur le comportement en boucle fermée en réponse à une consigne échelon.

Choisir T_i tel que les spécifications de précision et dynamique soient respectées.

d- Analyser les résultats. Comparer avec l'étude théorique. Et spécifier les changements par rapport au système évoluant en boucle ouverte.