Université Aboubekr BELKAID, Tlemcen
Faculté des sciences
Département d'informatique

Cours Physique (2) : Electricité Générale

Chapitre I : Rappels mathématiques/Electrostatique

Pour les étudiants de 1ère année LMD Informatique

Par : Dr. BENHABIB Loubna

Année universitaire : 2023/2024

Contenu du chapitre 1

I. Rappels mathématiques

II. Electrostatique

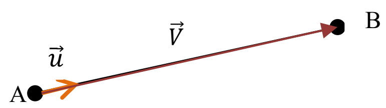
RAPPELS MATHEMATIQUES

1. Grandeurs physiques

En physique, deux types de grandeurs sont utilisées :

- ***Grandeurs scalaires*** : Une grandeur scalaire est caractérisée par un **nombre réel**, telles que : une masse, une longueur, un temps….
- ***Grandeurs vectorielles*** : Une grandeur vectorielle est attachée en plus du **nombre** appelé **module ou intensité**, à une **direction**, un **sens** et un **point d'application** telles que : une vitesse, champ électrique… Cette grandeur est citée soit par le segment de droite (exemple ;$\overrightarrow{AB}$) ou par une seule lettre comme $\vec{V}$

Cependant le **vecteur unitaire** $\vec{u}$ est porté par le vecteur $\vec{V}$ et qui partage avec lui le même sens, ainsi son module est de 1. Il est exprimé par $\vec{u} = \frac{\vec{V}}{V}$



2. Système de coordonnées cartésiennes

Le système à coordonnées cartésiennes peut être composé de

- ***Repère linéaire*** d'un seul axe (exemple OX) de vecteur unitaire $\vec{\imath}$. Dans ce cas la coordonnée x d'un point M quelconque est défini par un vecteur de position ; $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath}$
- ***Repère orthogonal plan*** composé de deux axes OX et OY, dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Le vecteur de position du point M est défini comme ; $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$
- ***Repère orthonormé dans l'espace***, qui est composé de trois axes OX, OY et OZ, dans la base$(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Le vecteur de position est ainsi ; $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$

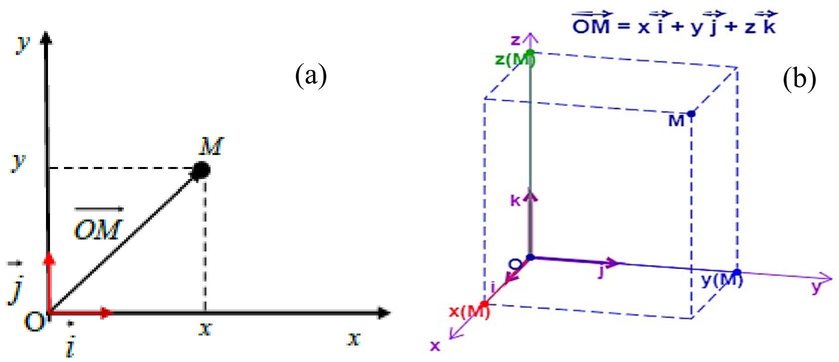


Figure I.1 (a) Repère orthogonal plan ; (b) Repère orthonormé dans l'espace

Remarque : le module du vecteur $\overrightarrow{OM}$ est $\|\overrightarrow{OM}\| = OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

3. Eléments de longueur, de surface et de volume dans le système à coordonnées cartésiennes

- ***Elément de longueur*** : appelé aussi déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$
- ***Elément de surface*** :

Dans l'espace (OX, OY) $\overrightarrow{dS} = dxdy\vec{k}$;

Dans l'espace (OX, OZ) $\overrightarrow{dS} = dxdz\vec{\jmath}$;

Dans l'espace (OY, OZ) $\overrightarrow{dS} = dydz\vec{\imath}$

- ***Elément de volume*** : $dV = dx.dy.dz$

4. Intégrales linéiques, surfaciques et volumiques

4.1. Intégrales linéiques

Physiquement, l'intégrale ci-dessus est l'aire comprise entre l'axe des abscisses et la fonction f entre $x = a$ et $x = b$. On peut aussi réécrire

$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{f(x_i)}$$

Où dx est infiniment petit.

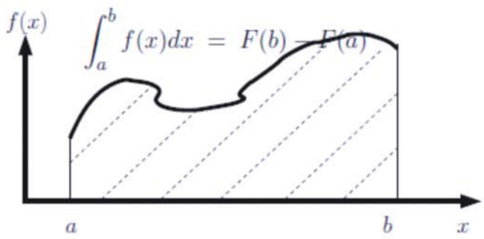


Figure I.2 Calcul de l'intégrale linéique

4.2. Intégrales de surface

On a maintenant à intégrer une surface dans un repère cartésien. On découpe alors la surface en une infinité de petits éléments de surface dx_idx_j

$$\iint_S dx_i d\,x_j = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} \boldsymbol{x_i x_j}$$

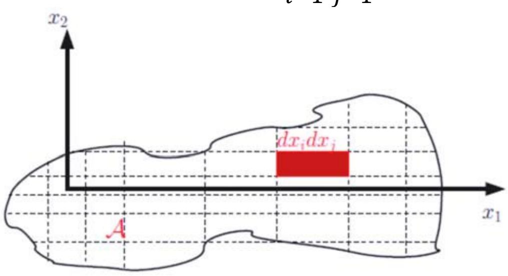


Figure I.3 Calcul de l'intégrale surfacique

4.3. Intégrales de volume

On a maintenant à intégrer un volume dans un repère cartésien. On découpe alors le volume en une infinité de petits éléments de volume *dxidxjdxk*

$$\iiint_v dx_i\, dx_j dx_k = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{L} \boldsymbol{x_i x_j\, x_k}$$

5. Opérateurs différentiels

Les opérateurs différentiels sont des combinaisons de dérivées partielles par rapport aux coordonnées d'espace. Le gradient, la divergence et le rotationnel sont les trois principaux opérateurs différentiels linéaires du premier ordre. Cela signifie qu'ils ne font intervenir que des dérivées partielles premières des champs, contrairement, par exemple, Laplacien qui comprend des dérivées partielles de second ordre.

5.1. Opérateur nabla

Nabla est un opérateur différentiel vectoriel. En coordonnées cartésiennes (x, y, z) de base$(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, il s'écrit sous la forme :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

5.2. Opérateur gradient

En physique, le gradient est un **vecteur** indiquant comment une grandeur physique varie dans l'espace, où il est aussi la résolution d'équations aux dérivées partielles.

Le gradient d'une fonction $f(x, y, z)$ noté par $\overrightarrow{grad} f(x, y, z)$ est donné par l'expression :

$$\overrightarrow{grad} f(x, y, z) = \vec{\nabla} f(x, y, z) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\vec{k}$$

5.3. Opérateur divergence

La divergence est le **scalaire**, qui prend en argument un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$.

La divergence d'un vecteur est notée par l'expression :

$$div(\vec{u}) = \vec{\nabla}.\vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

5.4. Opérateur rotationnel

Le rotationnel est un **vecteur** qui prend en argument un vecteur. En effet, le rotationnel d'un vecteur $\vec{u}$ est le produit vectoriel de nabla et vecteur $\vec{u}$

$$\overrightarrow{rot}(\vec{u}) = \vec{\nabla}\wedge\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_y & u_z \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_z \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ u_x & u_y \end{vmatrix}\vec{k}$$

D'où l'expression du rotationnel est sous la forme :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{u}) = \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

5.5. Opérateur Laplacien

Le Laplacien est la somme des dérivées secondes, exprimé comme :

$$\Delta = \vec{\nabla}.\vec{\nabla} = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

- **Laplacien scalaire** : est un scalaire qui prend en argument un scalaire. Son expression est sous la forme :

$$\Delta f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

- **Laplacien vectoriel** : est un vecteur qui prend en argument un vecteur. Son expression est sous la forme :

$$\vec{\Delta}\vec{u} = \nabla^2\vec{u} = \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}\vec{i} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}\vec{j} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\vec{k}$$

6. Circulation d'un vecteur électrostatique

Soit un arc AB et un point M qui se déplace le long de cet arc. $\vec{V}$ étant le vecteur lié à ce point, dont les composantes dans les coordonnées cartésiennes sont $\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$. Ainsi, le vecteur élémentaire de déplacement $\vec{dl} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$

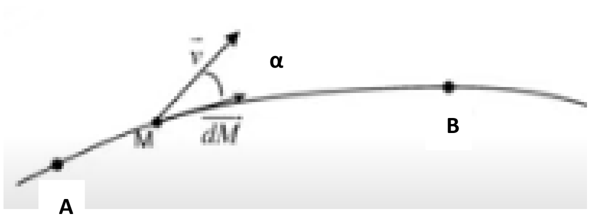


Figure I.4 Circulation d'un vecteur

On définit la circulation élémentaire du vecteur $\vec{V}$ par le produit scalaire comme :

$$dC_{\vec{V}} = \vec{V}.\overrightarrow{dl} = \|V\|.\|dl\|.\cos\alpha = V_x.dx + V_y.dy + V_z.dz$$

$$C_{\vec{V}} = \int dC_{\vec{V}} = \int_A^B \vec{V}.\overrightarrow{dl}$$

Remarque :

- Si le vecteur $\vec{V}$ est une constante, la circulation est $C_{\vec{V}} = \vec{V}.\int_A^B \overrightarrow{dl}$
- Si on veut calculer la circulation d'une force $\vec{F}$, on obtient le travail de cette force tel que : $C_{\vec{F}} = \int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{dl} = W(\vec{F})$
- Si le chemin parcouru de A à B est fermé, donc : $C_{\vec{V}} = \oint \vec{V}.\overrightarrow{dl}$

7. Théorème de Green-Ostrogradski

Considérons une surface fermée S enserrant un volume V, la formule de Green pour un champ vectoriel $\vec{E}$ permet de calculer le flux de ce vecteur à travers n'importe quelle surface de tel :

$$\phi = \oiint_S \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \iiint_V div\vec{E}\, dV$$

Avec : $\overrightarrow{dS}$ est le vecteur surface ; dV est volume élémentaire ; ϕ le flux du vecteur $\vec{E}$

8. Théorème de Stoks

Appelé aussi par théorème du rotationnel, est établi pour un champ vectoriel $\vec{E}$, et un contour C enserrant une surface S. ce théorème est considéré comme étant le cas général du théorème de Green, mais en trois dimensions. De tel, le flux est exprimé par :

$$\oint_C \vec{E}\,\overrightarrow{dl} = \iint_S \overrightarrow{rot}\vec{E}.\overrightarrow{dS}$$

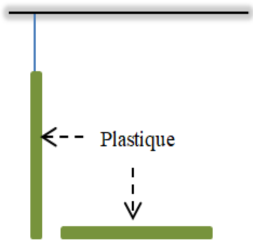
Avec : $\overrightarrow{dl}$ est le vecteur de déplacement élémentaire

II. ELECTROSTATIQUE

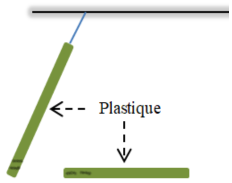
1. Introduction

L'électrostatique est la branche de la physique qui étudie les phénomènes créés par des charges électriques statiques pour l'observateur. Les lois obtenues peuvent se généraliser à des systèmes variables (quasi-électrostatique) pourvu que la distribution des charges puisse être considérée comme en équilibre à chaque instant.
Pour connaître les propriétés de la charge électrique on peut mener quelques expériences élémentaires à l'aide de tiges de plastique, de verre et de métal munies d'une poignée de bois. On a aussi besoin de morceaux de laine et de soie ainsi que de la ficelle.

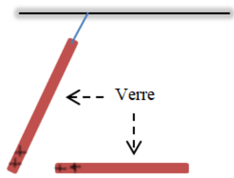
Expérience 1 : on approche une tige de plastique d'une autre tige de plastique suspendue.
Les tiges n'ont été frottées ni avec de la laine ni avec de la soie.
Les tiges restent immobiles. Il y a donc aucune force entre les deux tiges. On dit que les tiges sont neutres.



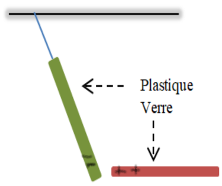
Expérience 2 : on frotte deux tiges de plastique avec de la laine.
Lorsqu'on approche la première tige de la tige suspendue, il y a une répulsion entre les tiges.



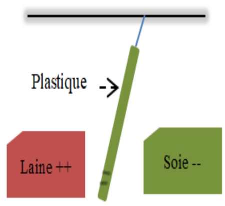
Expérience 3 : on frotte deux tiges de verre avec de la soie.
Lorsqu'on approche la première tige de la tige suspendue, il y a une répulsion entre les tiges.



Expérience 4 : on frotte une tige de verre avec de la soie et une tige de plastique avec de la laine. On suspend la tige de plastique.
Lorsqu'on approche la tige de verre, il y a une attraction entre les tiges.



Expérience 5 : on frotte une tige de verre avec de la soie et une tige de plastique avec de la laine. On suspend la tige de plastique entre les deux matières. La tige de plastique est attirée par la laine utilisée pour charger la tige. De plus la tige est repoussée par la soie ayant servi à charger la tige de verre.



Dans ces expériences le module de la force est plus grand lorsqu'on diminue la distance entre les tiges ou lorsqu'on frotte plus longtemps les tiges.

L'analyse de ces expériences nous apprend ce qui suit :
Les objets chargés exercent les uns sur les autres une force à distance appelée la **force électrique**. Cette force a les propriétés suivantes :

- La force est attractive lorsque les charges sont opposées (un objet chargé positivement et un objet chargé négativement), et elle est répulsive lorsque les charges ont le même signe.
- Le module de la force diminue lorsque la distance entre les charges augmente.

2. Forces électrostatiques

2.1. Propriétés de la charge électrique

La charge électrique, qui caractérise l'état d'électrisation d'une charge élémentaire, est toujours liée à la matière : toutes les particules élémentaires chargées ont une masse non nulle. En outre, la charge électrique possède des propriétés remarquables que nous nous proposons d'analyser.

❖ ***Quantification de la charge***

La charge électrique peut exister sous deux formes, l'une qualifiée de positive l'autre de négative. Dans le SI, la charge se mesure en Coulombs (C), de valeur :

$$e = 1.602\times10^{-19}\ C$$

Tableau I.1 : Masse et charge des constituants de l'atome

Particules	Masse (kg)	Charge
Electron	9.109×10^{-31}	-e
Proton	1.673×10^{-27}	+e
Neutron	1.675×10^{-27}	0

❖ ***Conservation de la charge***

La charge électrique ne peut pas être créée ni détruite. La charge nette d'un système fermé doit demeurer constante.

❖ ***Invariance de la charge électrique***

La charge électrique d'un système est invariante par changement de référentiel galiléen, c'est-à-dire que sa valeur ne dépend pas du référentiel galiléen dans lequel on la mesure.

2.2. Loi de Coulomb

La relation entre la quantité de charge, la distance et la force a été découverte par le physicien et ingénieur *Charles Augustin de Coulomb* (1736-1806). D'où, pour deux charges ponctuelles immobiles, le module de la force est proportionnel au produit des charges et inversement proportionnel au carré de la distance entre les charges.

En considérant deux charges q_1 et q_2 séparées par une distance r. Ainsi, $\overrightarrow{F_{1\to2}}$ est la force exercée par q_1 sur q_2 et $\overrightarrow{F_{2\to1}}$ est la force exercée par q_2 sur q_1. En recours du vecteur unitaire $\vec{u}$, la formule vectorielle de la force s'écrit :

$$\overrightarrow{F_{1\to2}} = -\overrightarrow{F_{2\to1}} = \frac{kq_1q_2}{r^2}\vec{u}$$

Avec : $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.99 \times 10^9 N.\frac{m^2}{C^2}$ et $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} C^2/(N.m^2)$

Ainsi le module de la force est tel :

$$F_{1\to2} = F_{2\to1} = \left|\frac{kq_1q_2}{r^2}\right|$$

- Lorsque les deux charges sont positives ou négatives, $q_1q_2 > 0$, il y aura une **répulsion** , donc $\overrightarrow{F_{2\to1}}$ aura le sens opposé du vecteur unitaire $\vec{u}$ et $\overrightarrow{F_{1\to2}}$ aura le même sens que $\vec{u}$
- Lorsque les charges sont de signe opposé, $q_1q_2 < 0$, il y aura une **attraction** et $\overrightarrow{F_{2\to1}}$ aura le même sens que le vecteur unitaire, tandis que $\overrightarrow{F_{1\to2}}$ aura le sens opposé que $\vec{u}$

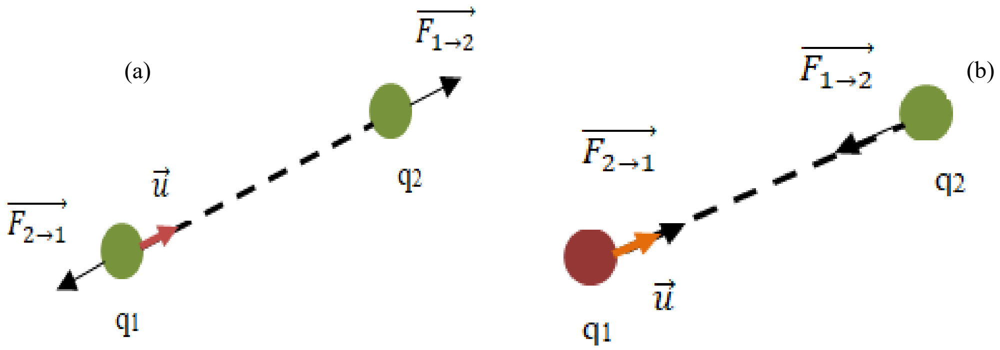


Figure I.1 Relation entre le vecteur unitaire et les forces exercées, (a) Répulsion ; (b) Attraction

- Cette force obéit au principe d'Action et de Réaction de la mécanique classique.
- La loi de Coulomb est similaire à la loi de la gravitation universelle de Newton.

3. Champ électrique

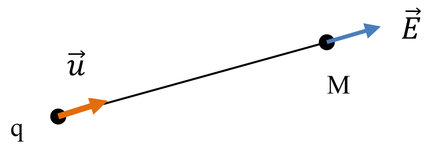
3.1. Notion du champ électrique

Le champ électrique est produit par des charges électriques dont il est médiateur de la force électrique entre les charges. Il est défini comme la force par unité de charge :

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

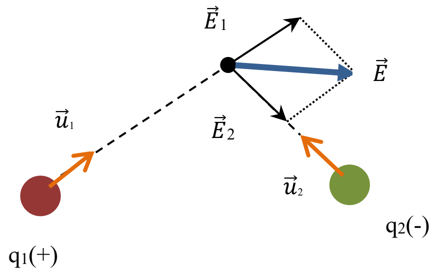
- ***Pour une charge ponctuelle*** : Le champ électrique produit par la charge q en un point M, est donné comme :

$$\vec{E} = k.\frac{q}{r^2}\vec{u} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{q}{r^2}.\vec{u}$$



- ***Pour un ensemble de charge ponctuelle*** : On utilise le principe de la superposition, d'où l'expression du champ électrique sera :

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r^2}\vec{u}$$



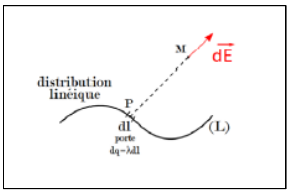
- ***Pour d'une distribution continue de charge*** : La distribution continue de charges est caractérisée par une densité moyenne de charges dq qui peut être répartie soit selon une longueur, une surface ou un volume, permettant la création d'un champ élémentaire $d\vec{E}$. Où :

$$\vec{E} = k\int\frac{dq}{r^2}.\vec{u}$$

- *Distribution linéique*

$$dq = \lambda.dl \longrightarrow \vec{E} = k\int_L \frac{\lambda.dl}{r^2}\vec{u}$$

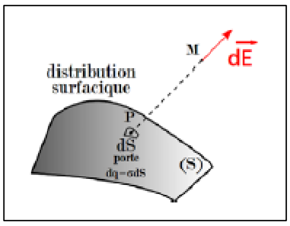
λ représente la charge linéique (unité : C/m)



- *Distribution surfacique*

$$dq = \sigma.dS \longrightarrow \vec{E} = k\iint_S \frac{\sigma.dS}{r^2}\vec{u}$$

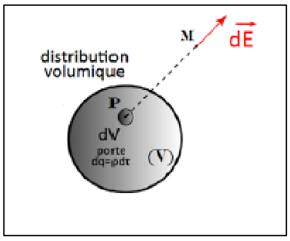
σ représente la charge surfacique (unité : C/m²)



- *Distribution volumique*

$$dq = \rho.dV \longrightarrow \vec{E} = k\iiint_V \frac{\rho.dV}{r^2}\vec{u}$$

ρ représente la charge volumique (unité : C/m³)



3.2. Lignes de champ électrique

Le champ électrostatique étant défini mathématiquement comme un champ de vecteurs, on peut donc lui attacher un vecteur bien déterminé en chaque point de l'espace. Une **ligne de champ** est une ligne orientée dans le sens du champ électrique, en chaque point de celle-ci, le champ électrique est tangent.

La valeur du champ $\vec{E}$ peut varier le long d'une ligne de champ, qui ne permet donc que de connaître la direction du champ. Cependant, dans une région vide de charge, plus les lignes de champs sont serrées, plus le champ électrique est intense.

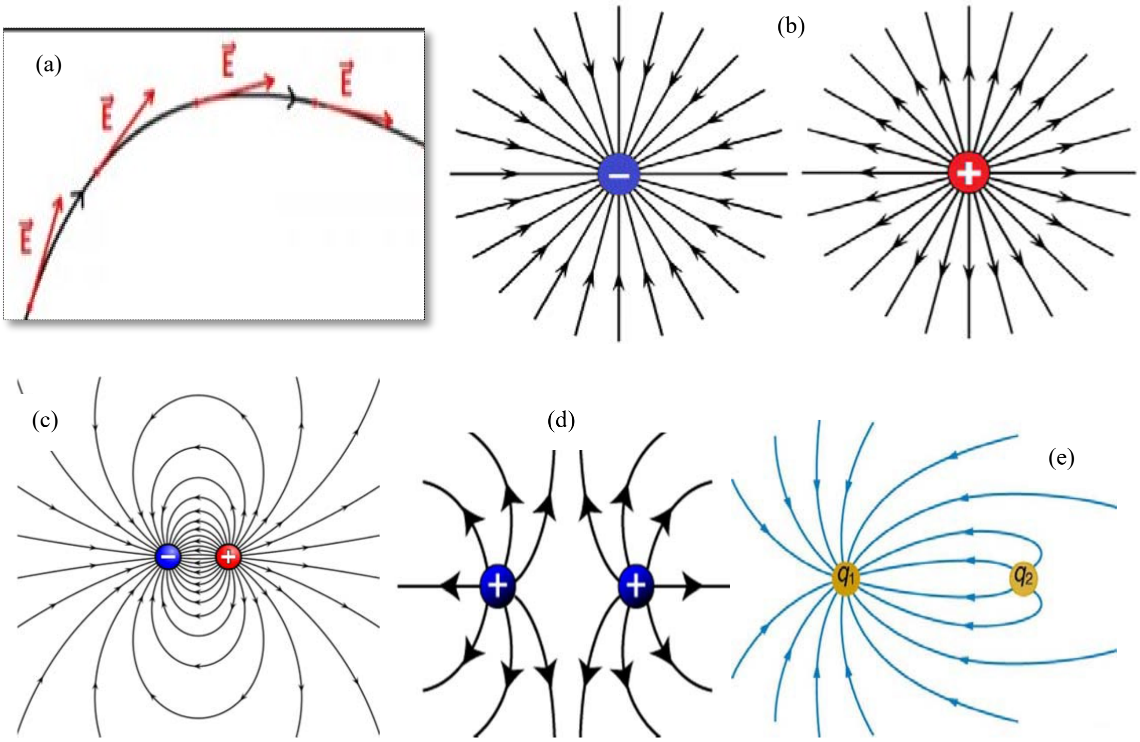


Figure I.2 Exemples des lignes de champ électrique ; (a) Vecteur du champ tangent sur la ligne, (b) Lignes de champ pour une particule ponctuelle positive et négative, (c) Lignes de champ d'un dipôle, (d) Lignes de champ pour un ensemble de deux charges positives, (e) Lignes de champ pour deux charges opposées et différentes en valeur absolue

4. Potentiel électrostatique

Le potentiel électrostatique est un scalaire exprimé en Volt (V). le potentiel électrostatique créé au point M par une charge est exprimé par la formule :

$$V = k.\frac{q}{r}$$

Dans le cas d'un ensemble de charges : $V = \sum_{i=1}^{n} V_i = k\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i}$

Cependant, le champ électrique est donné par :

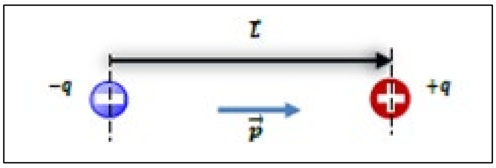
$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$$

Remarque : le travail d'une force électrique $W = q.(V_A - V_B) = q.U$

5. Dipôle électrique

On appelle dipôle électrique un système électriquement neutre formé de charges séparées par une distance $d<<r$ de sorte qu'on puisse avoir un excès de charges positives d'un côté ($+q$) (pôle positif) et un excès de charges négatives ($-q$) de l'autre côté (pôle négatif).

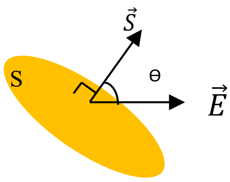
$$\vec{p} = q.\vec{d}$$



6. Théorème de Gauss

Le flux électrique à travers une surface S est proportionnel au nombre de lignes de champ électrique qui traversent cette surface. Le flux électrique est mesuré en N.m²/C et est défini :

$$\phi_E = \vec{E}.\vec{S} = E.S.cos\theta$$



Dans le cas, général, le flux électrique calculé par élément de surface $d\vec{S}$ est donné comme :

$$\phi_E = \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS}$$

Selon le théorème de Gauss, le flux à travers une surface fermée est proportionnel à la charge Q_{int} à l'intérieur de la surface.

$$\phi_E = \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Remarque : la forme de la surface n'influence pas le flux. Ainsi, le champ électrique doit avoir la même symétrie que la configuration des charges.