ملخص الدرس: المتغيرات العشوائية

I-المتغير العشوائي:

كلمة "متغير" تعني أن المتغير العشوائي يأخذ قيم عددية مختلفة في كل حالة، و كلمة "عشوائي" تعني أن قيم المتغير تعتمد على الصدفة.

للتعرف على قيم المتغير العشوائي، نستعين بالمثال التالي:

صندوق يحتوي على 7 مصابيح، منها 3 فاسدة و 4 صالحة.نسحب بالصدفة 3 مصابيح في آن واحد. نعرف المتغير العشوائي الذي يمثل عدد المصابيح الفاسدة المسحوبة.

نرمز لهذا المتغير العشوائي بالرمز X.

قيم المتغير العشوائي X ممكنة الظهور في هذا المثال هي:

$$X = 0, 1, 2, 3$$

II- جدول التوزيع الإحتمالي:

من خلال المثال السابق، نقوم بحساب إحتمال كل قيمة من قيم المتغير العشوائي.

- هنا لدينا توفيقة (في آن واحد): $C_n^k = \frac{n!}{k!\ (n-k)!}$
- عدد الحالات الكلية : $Card\ (\Omega) = C_7^3 = 35$
- $P(A) = \frac{Card\ (A)}{Card\ (\Omega)}$

- $P\ (X = 0) = \frac{C_3^0 \times C_4^3}{C_7^3} = 0.11$
- $P\ (X = 1) = \frac{C_3^1 \times C_4^2}{C_7^3} = 0.51$
- $P\ (X = 2) = \frac{C_3^2 \times C_4^1}{C_7^3} = 0.34$
- $P\ (X = 3) = \frac{C_3^3 \times C_4^0}{C_7^3} = 0.028$

نلاحظ من خلال هذه النتائج أن مجموع الإحتمالات يساوي 1 أي:

$$\sum P\ (X = x_i) = 1$$

و بالتالي نستنتج جدول التوزيع الإحتمالي التالي:

TRIAL MODE - Click here for more information

X_i	$P(X = x_i)$
0	0.11
1	0.51
2	0.34
3	0.028
Σ	**1**

III- دالة التوزيع الإحتمالي المتجمع:

ليكن X متغيرا عشوائيا قيمه x_1، x_2، x_3، ...، x_n

دالة التوزيع الإحتمالي يرمز لها بالرمز $P(X \leq x_i)$، و بالتالي إذا كان i = n فإن:

$$P(X \leq x_i) = P(X \leq x_1) + P(X \leq x_2) + \ldots + P(X \leq x_n)$$

➢ مثال: من خلال المثال السابق نقوم بإيجاد دالة التوزيع المتجمع كما يلي:

X_i	$P(X = x_i)$	$P(X \leq x_i)$
0	0.11	$P(X \leq 0) = P(X = 0) = 0.11$
1	0.51	$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.62$
2	0.34	$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0.96$
3	0.028	$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1$
Σ	**1**	ــــ

IV- التوقع الرياضي و التباين:

1- التوقع الرياضي E(X):

$$E(X) = \sum x_i P(X)$$

2- التباين V(X):

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$
$$= \sum X^2 P(X) - [E(X)]^2$$

TRIAL MODE - Click here for more information

3-خواص التوقع الرياضي و التباين:

- $E(a\,x + b) = E(a\,x) + E(b)$
  $= a\,E(x) + b$
- $E(x^2) = \sum X^2\,P(X)$
- $V(a\,x + b) = V(a\,x) + V(b)$
  $= a^2\,V(x) + 0$
  $= a^2\,V(x)$

TRIAL MODE - Click here for more information

سلسة التمارين رقم 03 (المتغيرات العشوائية)

التمرين 01:

صندوق يحتوي على 5 قطع معابة و 8 قطع صالحة. نسحب منه بالصدفة 3 قطع في آن واحد. نعرف المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد القطع المسحوبة المعابة

المطلوب:

1) أوجد قيم المتغير العشوائي X.
2) أحسب إحتمالات قيم المتغير العشوائي X، و آستنتج جدول التوزيع الإحتمالي لهذا المتغير.
3) أكتب دالة التوزيع الإحتمالي المتجمع.
4) أحسب إحتمال الحصول على قطعتين معابتين على الأكثر.

التمرين 02:

تعرض وكالة تجارية للسيارات 3 أنواع من السيارات للبيع كل يوم من النوع a، b، c، بحيث إحتمال بيع السيارة من النوع a هو 0.6، و بيع السيارة من النوع b هو 0.8، و إحتمال بيع السيارة من النوع c هو 0.5. نعرف المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد السيارات المباعة في اليوم.

المطلوب:

1) أوجد قيم المتغير العشوائي X.
2) أوجد جدول التوزيع الإحتمالي لهذا المتغير العشوائي X.
3) ماهو إحتمال بيع سيارة واحدة على الأقل؟
4) ماهو إحتمال بيع سيارتين على الأكثر؟

التمرين 03:

ظهر عيبان A و B بمنتوج، حيث قدرت نسبة المنتوجات التي ظهر بها العيب A بـ 25%، و نسبة 10% من المنتوجات ظهر بها العيب B. و نسبة 68% من المنتوجات كانت خالية من العيبين A و B. نختار بالصدفة منتوج. نعرف المتغير العشوائي X المتمثل في عدد العيوب الظاهرة في المنتوج.

TRIAL MODE - Click here for more information

المطلوب:

1) أوجد قيم المتغير العشوائي X.
2) أحسب إحتمالات قيم المتغير العشوائي X.
3) أنشئ جدول التوزيع الإحتمالي لهذا المتغير العشوائي X.
4) أوجد دالة التوزيع الإحتمالي المتجمع للمتغير X.
5) أحسب الإحتمالات التالية:

$P(x<1)$, $P(x>1)$, $P(0<x<2)$, $P_A(B)$, $P_B(A)$, $P_{\bar{A}}(B)$

6) أحسب التوقع الرياضي ثم التباين.
7) هل الحادثان A و B مستقلان؟

التمرين 04:

ليكن X متغير عشوائي يمثل عدد الوحدات المباعة من منتوج معين خلال يوم ما، توزيعه الإحتمالي معطى في الجدول التالي:

$X = x_i$	0	1	2	3	4	5	6
$P(X= x_i)$	K	0.16	0.25	0.30	0.13	K/2	0.01

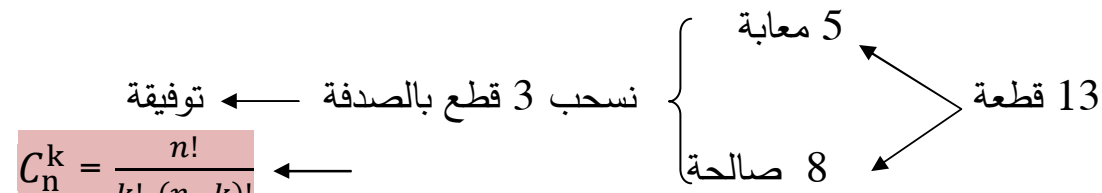
المطلوب:

1) عين قيمة الثابت K.
2) أحسب العدد المتوسط للوحدات المباعة ثم التباين.
3) إذا قدر الربح للوحدة الواحدة بـ 1000 دج، فآحسب التوقع الرياضي و التباين لهذا الربح.
4) أحسب إحتمال:
   أ) أن يتم بيع 4 وحدات على الأكثر في اليوم.
   ب)أن يتم بيع ما بين 3 وحدات و 5 وحدات في اليوم.

TRIAL MODE - Click here for more information

حل سلسلة التمارين رقم 03

حل التمرين 01:



$$C_n^k = \frac{n!}{k!\ (n-k)!}$$

$$P(A) = \frac{Card\ (A)}{Card\ (\Omega)}$$

➢ عدد الحالات الممكنة: $Card(\Omega) = C_{13}^3$

1) إيجاد قيم المتغير العشوائي X:

X: عدد القطع المسحوبة المعابة ⟵ X = 0, 1, 2, 3

2) حساب إحتمالات قيم المتغير العشوائي X:

- $P(x=0) = \frac{C_5^0 \times C_8^3}{C_{13}^3} = 0.1958$
- $P(x=1) = \frac{C_5^1 \times C_8^2}{C_{13}^3} = 0.4895$
- $P(x=2) = \frac{C_5^2 \times C_8^1}{C_{13}^3} = 0.2797$
- $P(x=3) = \frac{C_5^3 \times C_8^0}{C_{13}^3} = 0.035$

TRIAL MODE - Click here for more information

➢ إستنتاج جدول التوزيع الإحتمالي:

X	$P(X=x_i)$	$P(X\leq x_i)$
0	0.1958	0.1958
1	0.4895	0.6853
2	0.2797	0.965
3	0.035	1
$\sum$	**1**	-

3) دالة التوزيع الإحتمالي المتجمع:

$$F(X) = P(X\leq x_i)$$

$$\begin{cases} 0.1958 \ldots \text{Si } P(x\leq 0) = P(x=0) \\ 0.6853\ldots. \text{Si } P(x\leq 0) = P(x=0)+P(x=1) \\ 0.965\ldots.. \text{Si } P(x\leq 0) = P(x=0)+P(x=1)+P(x=2) \\ 1\ldots\ldots\ldots\ldots \text{Si } P(x\leq 0) = P(x=0)+P(x=1)+P(x=2)+P(x=3) \end{cases}$$

4) إحتمال الحصول على قطعتين معابتين على الأكثر:

$$P(x\leq 2) = P(x=2)+P(x=1)+P(x=0)$$
$$= 0.2797 + 0.4895 + 0.1958$$
$$= 0.965$$

الطريقة 2: إستعمال الحادث العكسي

$$P(x\leq 2) = 1 - P(x>2)$$
$$= 1 - P(x=3)$$
$$= 1 - 0.035$$
$$= 0.965$$

TRIAL MODE - Click here for more information

حل التمرين 02:

$P(a) = 0.6 \longrightarrow P(\overline{a}) = 0.4$

$P(b) = 0.8 \longrightarrow P(\overline{b}) = 0.2$

$P(c) = 0.5 \longrightarrow P(\overline{c}) = 0.5$

1) إيجاد قيم المتغير العشوائي X:

X: عدد السيارات المباعة ⟵ $X = 0,1,2,3$

2) جدول التوزيع الإحتمالي:

➢ حساب إحتمالات قيم المتغير X:

- $P(x=0) = P(\overline{a} \cap \overline{b} \cap \overline{c})$

$= P(\overline{a}) + P(\overline{b}) + P(\overline{c})$

$= 0.4 + 0.2 + 0.5$

$= 0.04$

- $P(x=1) = P(a \cap \overline{b} \cap \overline{c}) + P(\overline{a} \cap b \cap \overline{c}) + P(\overline{a} \cap \overline{b} \cap c)$

$= [P(a) \times P(\overline{b}) \times P(\overline{c})] +$

$[P(\overline{a}) \times P(b) \times P(\overline{c})] +$

$[P(\overline{a}) \times P(\overline{b}) \times P(c)]$

$= [0.6 \times 0.2 \times 0.5] +$

$[0.4 \times 0.8 \times 0.5] +$

$[0.4 \times 0.2 \times 0.5]$

$= 0.06 + 0.16 + 0.04$

$= 0.26$

TRIAL MODE - Click here for more information

- $P(x=2) = P(a \cap b \cap \overline{c}) + P(a \cap \overline{b} \cap c) + P(\overline{a} \cap b \cap c)$

  $= 0.46$

- $P(x=3) = P(a \cap b \cap c)$

  $= P(a) \times P(b) \times P(c)$

  $= 0.6 \times 0.8 \times 0.5$

  $= 0.24$

➢ إستنتاج جدول التوزيع الإحتمالي:

X	$P(X = X_i)$
0	0.04
1	0.26
2	0.46
3	0.24
$\sum$	**1**

3) إحتمال بيع سيارة واحدة على الأقل:

➢ $P(x \geq 1) = P(x=1)+P(x=2)+P(x=3)$

$= 0.26 + 0.46 + 0.24$

$= 0.96$

الطريقة 2:

➢ $P(x \geq 1) = 1 - P(x<1)$

$= 1 - P(x=0)$

$= 1 - 0.04$

$= 0.96$

TRIAL MODE - Click here for more information

4) إحتمال بيع سيارتين على الأكثر:

- $P(x\leq 2) = P(x=2)+P(x=1)+P(x=0)$
  $= 0.46 + 0.26 + 0.04$
  $= 0.76$

الطريقة 2:

- $P(x\leq 2) = 1 - P(x>2)$
  $= 1 - P(x=3)$
  $= 1 - 0.24$
  $= 0.76$

حل التمرين 03:

$P(A) = 0.25 \longrightarrow P(\bar{A}) = 0.75$

$P(B) = 0.1 \longrightarrow P(\overline{B}) = 0.9$

$P(\bar{A}\cap\overline{B}) = 0.68$

1) إجاد قيم المتغير العشوائي X:

$X = \{0, 1, 2\}$ ⟵ X: عدد العيوب الظاهرة في المنتوج

2) حساب إحتمالات قيم المتغير العشوائي X:

- $P(x=0) = P(\bar{A}\cap\overline{B}) = 0.68$

- $P(x=1) = P(A\cap\overline{B})+ P(\bar{A}\cap B)$
  $= [P(A) - P(A\cap B)] + [P(B) - P(A\cap B)]$
  $= P(A) + P(B) - 2\,P(A\cap B)$ ..... (1)

✓ $P(A\cap B) = ?$

$P(\bar{A}\cap\overline{B}) = 0.68 \longrightarrow P(\overline{A\cup B}) = 0.68$

$\longrightarrow 1 - P(A\cup B) = 0.68$

$\longrightarrow P(A\cup B) = 0.32$

TRIAL MODE - Click here for more information

$\longrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.32$

$\longrightarrow 0.25 + 0.1 - P(A \cap B) = 0.32$

$\longrightarrow P(A \cap B) = 0.03$

(1) $\longrightarrow P(x=1) = 0.25 + 0.1 - 2(0.03)$

$= 0.29$

- $P(x=2) = P(A \cap B) = 0.03$

3) إنشاء جدول التوزيع الإحتمالي للمتغير X:

X	P(X)	F(X)	X P(X)	X^2	X^2 P(X)
0	0.68	0.68	0	0	0
1	0.29	0.97	0.29	1	0.29
2	0.03	1	0.06	4	0.12
$\sum$	**1**	-	**0.35**	-	**0.41**

4) إيجاد دالة التوزيع الإحتمالي المتجمع:

$$F(X) = P(X \leq x_i)$$

$$F(X) = \begin{cases} 0.68 \ldots \text{Si} \quad P(x \leq 0) \\ 0.97 \ldots\ldots \text{Si} \quad P(x \leq 1) \\ 1 \ldots\ldots \text{Si} \quad P(x \leq 2) \end{cases}$$

5) حساب الإحتمالات التالية:

- $P(x \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$

$= 0.68 + 0.29$

$= 0.97$

- $P(x \geq 1) = P(X = 1) + P(X = 2)$

$= 0.29 + 0.03$

$= 0.32$

TRIAL MODE - Click here for more information

- $P(0 \leq x \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1)$
  $= 0.68 + 0.29$
  $= 0.97$
- $P_A(B) = P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
  $= \frac{0.03}{0.1}$
  $= 0.3$
- $P_B(A) = P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$
  $= \frac{0.03}{0.25}$
  $= 0.12$
- $P_{\bar{A}}(B) = P(B/\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})}$
  $= \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(\bar{A})}$
  $= \frac{0.1 - 0.03}{0.75}$
  $= 0.09$

6) حساب التوقع الرياضي E(x) ثم التباين V(x):

✓ $E(x) = \sum x\, P(x) = 0.35$

✓ $V(x) = E(x^2) - [E(x)^2]$
$= \sum x^2\, P(x) - (0.35)^2$
$= 0.41 - 0.12$
$= 0.29$

7) هل الحادثان A و B مستقلان؟

لكي يكون A و B مستقلان يجب أن يكون: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$P(A \cap B) = 0.03$
$P(A) \times P(B) = 0.25 \times 0.1 = 0.025$
$\Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$

و بالتالي، الحادثان A و B غير مستقلان

TRIAL MODE - Click here for more information

حل التمرين 04:

X	P(x)	X P(x)	X^2	X^2 P(x)
0	0.1	0	0	0
1	0.16	0.16	1	0.16
2	0.25	0.5	4	1
3	0.30	0.9	9	2.7
4	0.13	0.52	16	2.08
5	0.05	0.25	25	1.25
6	0.01	0.06	32	0.32
$\sum$	**1**	**2.39**	-	**7.51**

1) قيمة الثابت K:

$\sum X P(x) = 1 \Rightarrow k + 0.16 + 0.25 + 0.3 + 0.13 + k/2 + 0.01 = 1$

$\Rightarrow 0.85 + k + k/2 = 1$

$\Rightarrow 3k/2 = 0.15$

$\Rightarrow k = 0.1$

2) حساب التوقع الرياضي:

$E(x) = x P(x) \Rightarrow E(x) = 2.39$

✓ حساب التباين:

$V(x) = E(x^2) - [E(x)^2]$

$= \sum x^2 P(x) - (2.39)^2$

$= 7.51 - 5.71$

$= 1.8$

3) حساب التوقع الرياضي E(y) و التباين للربح V(y):

$Y = 1000 X$

- $E(ay) = a E(y)$

  $\Rightarrow E(1000 X) = 1000 E(X)$

TRIAL MODE - Click here for more information

$= 1000 \times 2.39$

$= 2390$

- $V(ay) = a^2\, v(y)$

  ⇨ $V(1000\ y) = (1000)^2\ v(y)$

  $= 1\ 000\ 000 \times 1.8$

  $= 1\ 800\ 000$

4) حساب الإحتمات التالية:

أ- بيع 4 وحدات على الأكثر في اليوم:

$P(x \leq 4) = 1 - P(x>4)$

$= 1 - [P(x=5) + P(x=6)]$

$= 1 - [0.05 + 0.01]$

$= 0.94$

ب- بيع ما بين 3 وحدات و 5 وحدات في اليوم:

$P(3 \leq x \leq 5) = P(x=3) + P(x=4) + P(x=5)$

$= 0.3 + 0.13 + 0.05$

$= 0.48$

TRIAL MODE - Click here for more information