ملخص الدرس: التوزيع البواسوني

I- تعريف:

يكون التوزيع بواسوني لما يحدث المتغير في جزء من فترة أو زمن محدود أو في منطقة صغيرة.

يتصف التوزيع البواسوني بما يلي:

- معدل (متوسط) عدد ظهور النجاحات معروف و يرمز له بـ λ.

II- قانون التوزيع ذي الحدين:

$$P(x=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

مثال: تصل السيارة في المرآب في وسط المدينة بمعدل 50 سيارة في الأسبوع كل ساعتين.

ماهو إحتمال أن تصل إلى المرآب 10 سيارات كل ساعتين؟

$$P(x=10) = e^{-50} \frac{50^{10}}{10!}$$

III- التوقع الرياضي و التباين:

$$E(X) = V(X) = \lambda$$

من خلال المثال السابق، نقوم بحساب التوقع الرياضي و التباين:

$$E(X) = V(X) = 50$$

سلسلة التمارين رقم 05 (التوزيع البواسوني)

التمرين 01:

تصل السيارات إلى مرآب في وسط المدينة بمعدل 50 سيارة في الأسبوع كل ساعتين.

نعرف المتغير العشوائي الذي يمثل عدد السيارات التي تصل إلى المرآب خلال ساعتين.

المطلوب:

1) ماهو التوزيع الإحتمالي للمتغير العشوائي X؟
2) أحسب التوقع الرياضي و التباين لهذا المتغير و آنحرافه المعياري.
3) أحسب إحتمال أن تصل إلى المرآب خلال ساعتين 70 سيارة.
4) أحسب إحتمال أن تصل إلى المرآب خلال ساعتين 04 سيارات على الأقل.

التمرين 02:

يتوافد الأشخاص على مصلحة إدارية بمعدل شخص كل دقيقتين. نعرف المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الأشخاص المتوافدين على المصلحة كل ساعة.

المطلوب:

1) ماهو التوزيع الإحتمالي للمتغير X؟
2) أحسب إحتمال أن يتوافد على المصلحة خلال ساعة معينة:
   أ- شخصان على الأقل.
   ب- ثلاثة أشخاص على الأكثر.
3) أحسب إحتمال أن يتوافد على المصلحة خلال يوم عمل من 7 ساعات 300 شخص.

حل سلسلة التمارين رقم 05 (التوزيع البواسوني)

حل التمرين 01:

1) التوزيع الإحتمالي للمتغير X:

X يمثل عدد السيارات التي تصل إلى المرآب خلال ساعتين ← x يخضع للتوزيع البواسوني معدله $\lambda = 50$، دالته الإحتمالية كالآتي:

$X \Rightarrow P(\lambda)$

$X \Rightarrow P(50)$

2) حساب التوقع الرياضي، التباين و الإنحراف المعياري:

- $E(X) = \lambda$
 $= 50$

- $V(X) = \lambda$
 $= 50$

- $\delta(x) = \sqrt{V(x)}$
 $= \sqrt{50}$
 $= 7.07$

3) حساب إحتمال أن تصل إلى المرآب خلال ساعتين 70 سيارة:

$$P(x=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$k = 70 \Rightarrow P(x=70) = e^{-50}\frac{50^{70}}{70!}$$
$$= 0.001$$

4) حساب إحتمال أن تصل إلى المرآب خلال ساعتين 04 سيارات على الأقل:

$$P(x\geq 4) = 1 - p(x<4)$$
$$= 1 - [P(x=0) + P(x=1) + (P(x=2) + P(x=3)]$$
$$= 1 - [e^{-50}\frac{50^0}{0!} + e^{-50}\frac{50^1}{1!} + e^{-50}\frac{50^2}{2!} + e^{-50}\frac{50^3}{3!}]$$

$= 1 - e^{-50}\,[1 + 50 + (2500/2) + (125000/6)]$

$= 1 - 22\,134.33\, e^{-50}$

$= 1$

حل التمرين 02:

1 شخص ← 2 د

30شخص ← 60 د ← $\lambda = 30$

1) <u>التوزيع الإحتمالي للمتغير X</u>:

x يخضع للتوزيع البواسوني معدله $\lambda = 30$، دالته الإحتمالية كالآتي:

$$\begin{cases} X \Rightarrow P(\lambda) \\ X \Rightarrow P(30) \end{cases}$$

2) <u>حساب إحتمال أن يتوافد على المصلحة خلال ساعة معينة</u>:

أ- شخصان على الأقل:

$$P(x = k) = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}$$

$P(x \geq 2) = 1 - p(x<2)$

$= 1 - [P(x=0) + P(x=1)]$

$= 1 - [e^{-30}\,\frac{30^0}{0!} + e^{-30}\,\frac{30^1}{1!}]$

$= 1 - e^{-30}\,[1 + 30]$

$= 1 - 31\, e^{-30}$

$= 1$

ب- ثلاثة أشخاص على الأكثر:

$P(x \leq 3) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) + P(x=3)$

$= e^{-30}\,\frac{30^0}{0!} + e^{-30}\,\frac{30^1}{1!} + e^{-30}\,\frac{30^2}{2!} + e^{-30}\,\frac{30^3}{3!}$

$= e^{-30}\,[1 + 30 + 450 + 4500]$

$= 4981\, e^{-30}$

3) <u>حساب إحتمال أن يتوافد على المصلحة خلال يوم عمل من 7 ساعات 300 شخص:</u>

لدينا معدل توافد الأشخاص كل ساعة و ليس كل 7 ساعات ← نحسب المعدل الجديد:

$$\begin{cases} 30 \text{ شخص} \leftarrow 1 \text{ سا} \\ \lambda \leftarrow 7 \text{ سا} \end{cases} \longrightarrow \lambda = \frac{30\, x\, 7}{1} = 210$$

$$\begin{cases} X \Rightarrow P(\lambda) \\ X \Rightarrow P(210) \end{cases}$$

- $k = 300 \Rightarrow P(x=300) = e^{-210}\ \frac{210^{300}}{300!}$

ملخص الدرس: التوزيع ذي الحدين

I- تعريف:

يتميز التوزيع ذي الحدين (La loi binomiale) بالخصائص التالية:

- نجاح الحادث بآحتمال قدره P.
- فشل الحادث بآحتمال قدره $P - 1$.
- إعادة التجربة n مرة.

II- قانون التوزيع ذي الحدين:

$$P(x=k) = C_n^k \, P^k \, (1-P)^{n-k}$$

مثال: صندوق يحتوي على 7 من الكريات. نسحب 3 كريات، إحتمال سحب كرية خضراء هو 0.2

- ➢ نجاح الحادث: $P = 0.2$
- ➢ فشل الحادث: $1-P = 1 - 0.2 = 0.8$

$$P(X=3) = C_7^3 \; 0.2^3 \; 0.8^4$$

III- التوقع الرياضي و التباين:

$$E(X) = n\,p$$

$$V(X) = n\,p\,(1-p)$$

من خلال المثال السابق، نقوم بحساب التوقع الرياضي و التباين:

$$E(X) = n\,p = 0.2 \times 0.8 = 0.16$$

$$V(X) = n\,p\,(1-p) = 7 \times 0.2 \times 0.8 = 1.02$$

سلسلة التمارين رقم 04 (التوزيع ذي الحدين)

التمرين 01:

تضمن إمتحان في مقياس ما 10 أسئلة، بحيث أن إحتمال الحصول على الأجوبة الصحيحة هو 0.2. نفترض أن طالب أجاب بصفة عشوائية في هذا الإمتحان.

نعرف المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الأجوبة الصحيحة لهذا الطالب.

المطلوب:

1) ماهو التوزيع الإحتمالي للمتغير X؟
2) أحسب التوقع الرياضي و التباين لهذا المتغير.
3) أحسب إحتمال حصول الطالب على 6 إجابات صحيحة.
4) أحسب إحتمال حصول الطالب على الأقل على إجابتين صحيحتين.

التمرين 02:

إحتمال نجاح عملية جراحية للقلب هو 0.7. برمجت لجنة العمليات الجراحية للقلب 10 عمليات في الأسبوع. نعرف المتغير العشوائي الذي يمثل عدد العمليات الجراحية للقلب الناجحة.

المطلوب:

1) ماهو التوزيع الإحتمالي للمتغير X؟
2) أحسب إحتمال نجاح 03 عمليات جراحية على الأكثر.
3) أحسب إحتمال نجاح 04 عمليات جراحية.
4) أحسب متوسط التوزيع و تباينه، ثم إنحرافه المعياري.

حل سلسلة التمارين رقم 04 (التوزيع ذي الحدين)

حل التمرين 01:

1) التوزيع الإحتمالي للمتغير X:

X يمثل عدد الأجوبة الصحيحة ← x يتبع توزيع ذي الحدين، دالته الإحتمالية كالآتي:

$X \Rightarrow B\ (n\ ,\ p)$

$X \Rightarrow B\ (10\ ,\ 0.2)$

$$P(x=k) = C_n^k\ P^k\ (1-P)^{n-k}$$

2) أحسب التوقع الرياضي و التباين:

- $E(X) = n\,p$
  $= 10 \times 0.2$
  $= 2$

- $V(X) = n\,p\,(1-p)$
  $= 10 \times 0.2 \times 0.8$
  $= 0.16$

3) أحسب إحتمال حصول الطالب على 6 إجابات صحيحة:

$P(x=k) = C_n^k\ P^k\ (1-P)^{n-k}$

$P\ (x=6) = C_{10}^6\ 0.2^6\ (1-0.2)^{10-6}$

$= C_{10}^6\ 0.2^6\ 0.8^4$

$= 0.0055$

4) أحسب إحتمال حصول الطالب على الأقل على إجابتين صحيحتين:

$P(x\geq 2) = 1 - P(x<2)$

$= 1 - [P(x=0) + P(x=1)]$

$= 1 - [C_{10}^0\ 0.2^0\ 0.8^{10} + C_{10}^1\ 0.2^1\ 0.8^9]$

$= 0.624$

حل التمرين 02:

1) التوزيع الإحتمالي للمتغير X:

X يمثل عدد العمليات الجراحية للقلب الناجحة ⟵ x يتبع توزيع ذي الحدين، دالته الإحتمالية كما يلي:

$X \Rightarrow B(n, p)$

$X \Rightarrow B(10, 0.7)$

$$P(x=k) = C_n^k P^k (1-P)^{n-k}$$

2) حساب إحتمال نجاح 03 عمليات جراحية على الأكثر:

$$P(x\leq 3) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) + P(x=3)$$

$$= C_{10}^0\ 0.7^0\ 0.3^{10} + C_{10}^1\ 0.7^1\ 0.3^9 + C_{10}^2\ 0.7^2\ 0.3^8 + C_{10}^3\ 0.7^3\ 0.3^7$$

$$= 0.01$$

3) حساب إحتمال نجاح 04 عمليات جراحية:

$$P(x=4) = C_{10}^4\ 0.7^4\ 0.3^6$$

$$= 0.036$$

4) أحسب متوسط التوزيع و تباينه، ثم إنحرافه المعياري:

- $E(x) = n.p = 10 \times 0.7$

  $= 7$

- $V(x) = n.p.(1-p)$

  $= 10 \times 0.7 \times 0.3$

  $= 2.1$

- $\delta(x) = \sqrt{V(x)}$

  $= \sqrt{2.1}$

  $= 1.449$

المراجع:

- بو عبد الله صالح، "محاضرات الإحصاء الرياضي"، مطبوعة موجهة لطلبة العلوم الإقتصادية، جامعة المسيلة، الجزائر، 2006.
- بوسماحة حورية، "الإحصاء و الإحتمالات"، مطبوعة موجهة للطلبة المتكونين بالمعهد الخاص بوزارة التربية الوطنية، المدرسة العليا للأساتذة، الجزائر، 2008.
- جبار عبد مضحي، "مقدمة في نظرية الإحتمالات"، دار المسيرة للنشر و التوزيع، عمان، 2010.
- جلاطو جيلالي، "الإحصاء مع تمارين و مسائل محلولة"، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2022.
- خالد زهدي خواجة "أساسيات الإحتمالات"، المعهد العربي للتدريب و البحوث الإحصائية.
- رجال السعدي، "نظرية الإحتمالات: مبادئ الحساب الإحتمالي (دروس و تمارين)"، الجزء الأول، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2008.
- عزوز عبد الرزاق، "الكامل في الإحصاء: دروس مفصلة، تمارين و مسائل مع الحلول"، المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2010.
- ليبسشتز سيمور. ترجمة: عبد العظيم أنيس، "ملخصات شوم: نظريات و مسائل في الإحتمالات"، دار الرشد العربي، بيروت، لبنان.