Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Math
1ière Année LMD-MI
Durée : 01 h 30mn

Année Universitaire 2022/2023
Jeudi 01/12/2022

Contrôle Continu de Mécanique

Exercice 1: (06 pts)

A. Vérifier l'homogénéité de cette formule :

$$p = \rho g h_1 + h_2 F$$

Tels que : P une pression, ρ la masse volumique, g une accélération de la pesanteur, h_1 et h_2 sont des hauteurs et F une force.

B. La période **T** d'oscillation d'un pendule de longueur **l** dans un champ de pesanteur (accélération de pesanteur) **g** est proposée sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{T = k.\, l^{\alpha}.\, g^{\beta}}$$

1. Trouver α et β telle que k est une constante qui n'a pas de dimension. Ecrire la loi e la période T.
2. Calculer l'incertitude relative sur T en fonction de Δl et Δg.

Exercice 2: (07 pts)

A. Soient les points M_1 (+1,+1,+1), M_2 (+2,+2,+1) et M_3 (+2,+1,0) ;

1. Trouver l'angle $\mathbf{M_1\widehat{M_2}M_3}$.
2. Calculer l'aire (la surface) du triangle $M_1M_2M_3$

B. Un point matériel M est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z).

1. Ecrire la relation entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées cylindriques (à l'aide d'un schéma).
2. Ecrire le vecteur position en coordonnées cylindriques et déduire le vecteur vitesse dans le même système de coordonnées.
3. Si la position du point est repérée en coordonnées cylindriques par $\begin{cases} \rho = 4t^2 \\ \theta = \omega t \\ z = \sqrt{t} \end{cases}$

Retrouver l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$ en coordonnées cylindriques.

Exercice 3: (06 pts)

Les coordonnées x et y d'un point mobile M dans le plan (oxy) varient avec le temps t selon les relations suivantes : **x = 2t** , **y = 2t²**

Trouver :

1. L'équation de la trajectoire.
2. Les composantes de la vitesse et son module **v**.
3. Les composantes de l'accélération et son module **a**.
4. La nature du mouvement.
5. Les accélérations tangentielle $\mathbf{a_T}$ et normale $\mathbf{a_N}$, en déduire le rayon de courbure.

Bon courage

Corrigé du contrôle continu

Exercice 1(06 pts)

A. Vérifier l'homogénéité de cette formule : $p = \rho g h_1 + h_2 F$

Tels que : P une pression, g une accélération de la pesanteur, h_1 et h_2 sont des hauteurs et F une force. On a $\begin{cases} [P] = ML^{-1}T^{-2} \\ [g] = LT^{-2} \\ [h_1] = [h_2] = L \text{ 4*(0.25pts)} \\ [F] = MLT^{-2} \\ [\rho] = ML^{-3} \end{cases}$

cette équation est homogène si $[p] = [\rho g h_1] = [h_2 F]$ **(0.25pts)**

$$[\rho g h_1] = ML^{-3}.L.LT^{-2} = ML^{-1}T^{-2} = [P] \textbf{(0.25pts)}$$

$$et\ [h_2 F] = ML^2T^{-2} \neq ML^{-1}T^{-2} \textbf{(0.25pts)}$$

Donc l'équation est hétérogène (non homogène). **(0.25pts)**

B. 1. On a $\boldsymbol{T = k.l^{\alpha}.g^{\beta}}$ on supposant que cette équation est homogène,

$[T] = k.[l]^{\alpha}.[g]^{\beta}$**(0.25pts)**

Avec $[l] = L$**(0.25pts)** , $[T] = T$**(0.25pts)**, $[k] = 1$ et $[g] = LT^{-2}$**(0.25pts)**

donc $L^0T^1 = L^{\alpha}(LT^{-1})^{\beta} = L^{\alpha+\beta}T^{-2\beta}$**(0.25pts)**

$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \textbf{(0.25pts)} \\ \beta = \frac{-1}{2} \textbf{(0.25pts)} \end{cases}$ d'où $\boldsymbol{T = k.\sqrt{\frac{l}{g}}}$**(0.25pts)**

2. Calcul de l'incertitude relative sur T par la méthode logarithmique.

$$\Rightarrow \boldsymbol{T = k.\sqrt{\frac{l}{g}}} \Rightarrow \log(\boldsymbol{T}) = \log\left(\boldsymbol{k}.\sqrt{\frac{l}{g}}\right) \textbf{(0.25pts)}$$

$$\Rightarrow \log T = \log K + \frac{1}{2}\log(l) - \frac{1}{2}\log(g) \textbf{ (0.25pts)}$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{T} = \frac{1}{2}.\frac{dl}{l} + \frac{1}{2}.\frac{dg}{g} \textbf{ (0.25pts)}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2}.\frac{\Delta l}{l} + \frac{1}{2}.\frac{\Delta g}{g} \textbf{ (0.25pts)}$$

Exercice 2(8pts)

A.Soient les points $M_1(+1,+1,+1)$, $M_2(+2,+2,+1)$ et $M_3(+2,+1,0)$;

1. Trouver l'angle $\mathbf{M_1\widehat{M_2}M_3}$.

On a $\overrightarrow{M_2M_1} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 1-2 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **(0.25pts)** $et\ \overrightarrow{M_2M_3} = \begin{pmatrix} 2-2 \\ 1-2 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ **(0.25pts)**

avec $\|\overrightarrow{M_2M_3}\| = \sqrt{2}$ **(0.25pts)** $et\ \|\overrightarrow{M_2M_1}\| = \sqrt{2}$ **(0.25pts)**

alors $cos\alpha = \frac{\overrightarrow{M_2M_1}.\overrightarrow{M_2M_3}}{\|\overrightarrow{M_2M_3}\|.\|\overrightarrow{M_2M_1}\|}$ **(0.5pts)** $= \frac{0+1+0}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ **(0.5pts)** donc $\alpha = \pi/3$**(0.5pts)**

2. Calculer l'aire (la surface) du triangle $M_1M_2M_3$.

On a $\overrightarrow{M_2M_1} \wedge \overrightarrow{M_2M_3} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (1-0)\vec{\imath} - (1-0)\vec{\jmath} + (1-0)\vec{k} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$**(0.5pts)**

Et $\|\overrightarrow{M_2M_1} \wedge \overrightarrow{M_2M_3}\| = \sqrt{3}$ **(0.5pts)**

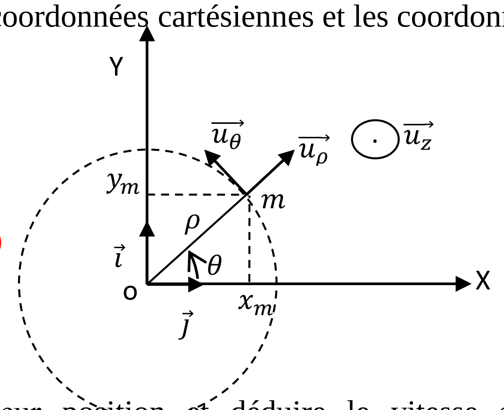
Alors l'aire du triangle $M_1M_2M_3$ sera $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\ m^2$**(0.5pts)**.

B.Un point matériel M est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z).

1. Ecrire la relation entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires.

$$\begin{cases} x = \rho cos\theta \\ y = \rho sin\theta \\ z = z_M \end{cases}$$ **(0.75pts)**

(0.25pts)



2. Trouver l'expression du vecteur position et déduire le vitesse $\vec{v}$ du point M en coordonnées cylindriques.

$$\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{U_\rho} + z\overrightarrow{U_z} \ \textbf{(0.5pts)}$$

$$\Longrightarrow \vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \textbf{(0.25pts)} = \frac{d\rho}{dt}\overrightarrow{U_\rho} + \rho\frac{d\overrightarrow{U_\rho}}{dt} + \frac{dz}{dt}\overrightarrow{U_z} + z\frac{d\overrightarrow{U_z}}{dt}$$

$$on\ a\ \frac{d\overrightarrow{U_z}}{dt} = 0 \Longrightarrow \vec{v} = \dot{\rho}\overrightarrow{U_\rho} + \rho\frac{d\theta}{dt}\frac{d\overrightarrow{U_\rho}}{d\theta} + \dot{z}\overrightarrow{U_z}\textbf{(0.25pts)}$$

$$\Longrightarrow \vec{v} = \dot{\rho}\overrightarrow{U_\rho} + \rho\dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{U_z}\textbf{(0.5pts)}$$

3. Le vecteur vitesse $\vec{v}$ du point M en coordonnées cylindriques :

On a $\begin{cases} \rho = 4t^2 \\ \theta = \omega t \\ z = \sqrt{t} \end{cases}$ alors a $\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = 8t \\ \frac{d\theta}{dt} = \omega \\ \frac{dz}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \end{cases}$ **(0.75pts)**

$$\Longrightarrow \vec{v} = \dot{\rho}\overrightarrow{U_\rho} + \rho\dot{\theta}\frac{d\overrightarrow{U_\rho}}{d\theta} + \dot{z}\overrightarrow{U_z} = 8t\overrightarrow{U_\rho} + 4t^2.\omega.\overrightarrow{U_\theta} + \frac{1}{2\sqrt{t}}\overrightarrow{U_z}\textbf{(0.75pts)}$$

Exercice 3: (06pts)

Les coordonnées x et y d'un point mobile M dans le plan (oxy) varient avec le temps t selon les relations suivantes : $x = 2t$, $y = 2t^2$

Trouver :

1. L'équation de la trajectoire est : on a t=x/2 alors Y(x)= $x^2/2$ **(0.5pts)**
2. Les composantes de la vitesse et son module v :

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = 2\textbf{(0.5pts)} \\ v_y = \frac{dy}{dt} = 4t\textbf{(0.5pts)} \end{cases} \quad \text{et } v = \sqrt{(16t^2 + 4)}\textbf{(0.5pts)}$$

3. Les composantes de l'accélération et son module.

$$\begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0\textbf{(0.5pts)} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = 4\textbf{(0.5pts)} \end{cases} \quad \text{et a=4}\textbf{(0.5pts)}$$

4. La nature du mouvement. On a $\vec{a}.\vec{v} = 16t>1$ donc un mouvement uniformément accéléré. **(0.5pts)**
5. Les accélérations tangentielle et normale. $a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{32t}{2\sqrt{(16t^2+4)}} = \frac{16t}{v}$ **(0,75pts)**

Et $a_n = \sqrt{a^2 - a_T{}^2} = \sqrt{16 - \left(\frac{16t}{\sqrt{(16t^2+4)}}\right)^2} = \sqrt{\frac{256t^2+64-256t^2}{(16t^2+4)}} = \sqrt{\frac{64}{(16t^2+4)}} = \frac{8}{v}$**(0.75ts)**

6. Le rayon de courbure R. R=$\frac{v^2}{a_N} = \frac{v^3}{8}$ **(0.5pts)**