ملخص الدرس: المبدأ الأساسي للعد

I- تعاريف:

إن نظرية الإحتمال تكون فرعا مهما من فروع الرياضيات، و هي تستعمل سلسلة من المبادئ الأساسية التالية:

1- التجربة العشوائية: هي التجربة التي لا يمكن معرفة نتائجها، مثل: رمي قطعة نقود.

2- فضاء العينة: هو مجموعة النقاط التي تمثل جميع النتائج ممكنة الوقوع لتجربة ما.

مثال 1: عند رمي قطعة نقود مرة واحدة، فإن فضاء العينة سيكون مكون من نتيجتين ممكنتين: إما F الصورة أو P الكتابة. $\Omega = \{P, F\}$

مثال 2: عند رمي قطعتين من النقود مرة واحدة، فإن فضاء العينة سيكون مكون من

$$\Omega = \{PP, FF, FP, PF\}$$

3- الإحتمال: هو وقوع الحادث، فأحتمال وقوع الحادث A يرمز له بـ P(A).

الإحتمال يكون محصورا بين 0 و 1.

إحتمال عدم وقوع الحادث A هو $P(\overline{A})$، إذن $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

- القانون العام للإحتمال: $P(A) = \frac{Card\,(A)}{Card\,(\Omega)} = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة (المواتية)}}{\text{عدد الممكنة (الكلية)}}$

II- المبدأ الأساسي للعد:

طريقة العد تمكن من تحديد عدد النواتج الممكنة لتجربة معينة، و هي تنقسم إلى: التوفيقة، الترتيبة و التبديلة.

1- التوفيقات: نرمز لها بـ C_n^k، و هي تعبر على عدد المجموعات الجزئية ذات k عنصر مأخوذة من مجموعة كلية ذات n عنصر.

- مثال: مع A = {محمد، علي، فاطمة}. نريد تكوين لجنة تحتوي على شخصين.

الحالات الملائمة = {(محمد، علي)، (محمد، فاطمة)، (علي، فاطمة)}

= 3 حالات.

- إذن نقول: لدينا 3 توفيقات ذات شخصين، مأخوذة من مجموعة كلية ذات ثلاث أشخاص.
- في التوفيقة: الترتيب غير مهم و التكرار غير ممكن.

- القانون العام للتوفيقة : $C_n^k = \frac{n!}{k!\ (n-k)!}$

نطبق القانون على المثال السابق:

$$C_n^k = \frac{3!}{2!\ (3-2)!} = \frac{3\ x\ 2\ x\ 1}{2!\ x\ 1!} = 3$$

- الكلمات المفتاحية للتوفيقة: في آن واحد، دفعة واحدة، بالصدفة، عشوائي.

2- الترتيبات: يرمز لها بـ A و هي تنقسم إلى نوعين: الترتيبة بدون تكرار (بدون إرجاع)، و الترتيبة بالتكرار (بالإرجاع).

أ- الترتيبة بدون تكرار (بدون إرجاع): نرمز لها بـ A_n^k و هي كل ترتيب k عنصر مختار من بين n عنصر، بحيث لا يمكن لكل عنصر الظهور أكثر من مرة.

- في الترتيبة بدون التكرار: الترتيب مهم و التكرار غير ممكن.
- مثال: $A = \{1, 2, 3\}$

نريد تكوين أعداد من رقمين مختلفين.

عدد الحالات الملائمة = {21، 31، 32، 12، 13، 23}

= 6 حالات

رقمين مختلفين: إذن لا يمكن كتابة الأرقام التالية: 11، 22، 33.

- القانون العام للترتيبة بدون تكرار : $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
- نطبق القانون على المثال السابق:

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3\ x\ 2\ x\ 1}{1!} = 6$$

- الكلمات المفتاحية للترتيبة بدون تكرار: الواحدة تلوى الأخرى، على التوالي، مختلفة، مرة واحدة، بدون تكرار (أو بدون إرجاع).

ب- الترتيبة بالتكرار (بالإرجاع): نرمز لها بـ $\hat{A}_n^k$ و هي كل ترتيب k عنصر مختار من بين n عنصر، بحيث يمكن لكل عنصر الظهور أكثر من مرة.

- في الترتيبة بالتكرار: الترتيب مهم و التكرار ممكن.
- مثال 1: $A = \{1, 2, 3\}$

نريد تكوين أعداد من رقمين.

عدد الحالات الملائمة = {21، 31، 32، 12، 13، 23، 11، 22، 33}

= 9 حالات

- القانون العام للترتيبة بالتكرار : $\hat{A}_n^k = n^k$
- نطبق القانون على المثال السابق:

$$\hat{A}_3^2 = 3^2 = 9$$

- الكلمات المفتاحية للترتيبة بالتكرار: الواحدة تلوى الأخرى، على التوالي، أكثر من مرة ، بالتكرار (بالإرجاع).
- مثال 2: يحتوي كيس على 8 كريات خضراء و 9 بيضاء. نسحب من هذا الكيس 4 كريات على التوالي، حيث نعيد الكرة المسحوبة إلي الكيس قبل كل سحب موالي.

1- ماهو عدد الحالات الملائمة للحصول على 4 كريات خضراء؟

$$\hat{A}_8^4 = 8^4 = 4096$$

2- ماهو عدد الحالات الملائمة للحصول على 4 كريات بيضاء؟

$$\hat{A}_9^4 = 9^4 = 6561$$

3- ماهو عدد الحالات الملائمة للحصول على 4 كرياتين الأولى خضراء و الأخيرتين بيضاء؟

$$\hat{A}_8^2 x \hat{A}_9^2 = 8^2 \text{ x } 9^2 = 5184$$

3- التبديلات: هناك حالة خاصة من الترتيبة لما n تتوزع علة k، أو لما k = n، تسمى التبديلة، يرمز لها بـ P.

أ- التبديلة بدون تكرار: و تحسب كما يلي:

$$P_n = n!$$

- مثال: بكم كيفية يمكن لـ 10 طلبة الحثول على 10 كراسي؟

$$N = k = 10$$

$$\rightarrow P_{10} = 10!$$

ب- الترتيبة بالتكرار : تحسب بالقانون التالي:

$$\tilde{P}_n = \frac{n!}{n1!\ n2!\ \dots\ nk!}$$

- مثال:

صندوق يحتوي على 15 كرية، بكم كيفية يكمن سحب 5 كريات حمراء، 7 بيضاء، و 3 صفراء بدون إرجاع؟

$$\tilde{P}_{15} = \frac{15!}{5!\ 7!\ 3!} = 360360$$ كيفية

سلسلة التمارين رقم 01 (طرق العد و الإحتمال)

التمرين 01:

يتكون فوج في الأعمال التطبيقية في مادة الإحصاء من 40 طالب. نختار بطريقة عشوائية فرقة تتكون من 4 طلبة للقيام ببحث معين.

إذا كان لدينا 25 طالبة و 15 طالب. ماهو عدد الحوادث للحصول على:

1) طالبة و ثلاث طلاب.
2) طالبتين.
3) ثلاث طلاب على الأقل.

التمرين 02:

يحتوي صندوق على 40 مصباح منها 10 فاسدة. نسحب بالصدفة 5 مصابيح. بكم طريقة يمكن الحصول على:

1) 3 مصابيح فاسدة.
2) 5 مصابيح صالحة.
3) مصباحين صالحين على الأقل.
4) مصباح صالح على الأكثر.
5) 4 مصابيح فاسدة على الأقل.
6) 3 مصابيح فاسدة على الأكثر.

التمرين 03:

يحتوي صندوق على 20 كرية بيضاء، 15 صفراء و 10 خضراء. نسحب 3 كريات من هذا الصندوق: أ- واحدة تلوى الأخرى و بدون إرجاع.

ب-واحدة تلوى الأخرى و بالإرجاع.

أحسب في كلتا الحالتين بكم طريقة يمكن الحصول على:

1) كرية صفراء ثم بيضاء ثم صفراء.
2) 3 كريات خضراء.
3) كرية صفراء و كريتين.

التمرين 04:

لكتابة كلمة سر، نختار 7 أحرف مختلفة من بين 26 حرف. أحسب إحتمالات الحوادث التالية:

1) كلمة السر تحتوي على الحرف a.
2) كلمة السر لا تحتوي على الحرفين a و b.
3) الأحرف a، b، c هي الأحرف الأولى في كلمة السر و تأتي متتابعة بهذا الشكل.
4) الأحرف a، b، c متتالية في كلمة السر.
5) الحرف b يظهر مرتين على الأقل في كلمة السر.

التمرين 05:

يختار مخرج حصة معينة 8 إعلانات من بين 20 إعلان مرقمة من 1 إلى 20، ليوزعها على 8 فترات مخصصة للإشهار خلال الحصة، بحيث يمكن لكل إعلان الظهور في أكثر من فترة واحدة. أحسب إحتمالات الحوادث التالية:

1) الإعلان 2 يظهر مرتين متتاليتين و ذلك في الفترة الأولى و الثانية.
2) الإعلان 4 يظهر مرتين على الأقل.
3) الإعلان 1 يظهر مرتين، و الإعلان 3 يظهر ثلاث مرات، و الإعلان 17 ثلاث مرات.

حل سلسلة التمارين رقم 01

حل التمرين 01:

40 طالب → 25 طالبة ، 15 طالب

نختار بطريقة عشوائية 4 طلاب ← توفيقة

$C_n^k = \frac{n!}{k!\ (n-k)!}$ ←

➢ عدد الحالات الممكنة: C_{40}^4

1) طالبة و ثلاث طلاب:

Card (A) = $C_{25}^1 \times C_{15}^3$

2) طالبتين:

Card (B) = $C_{25}^2 \times C_{15}^2$

3) ثلاث طلاب على الأقل:

Card (C) = $[C_{15}^3 \times C_{25}^1] + [C_{15}^4 \times C_{25}^0]$

حل التمرين02:

40 مصباح → 10 فاسدة ، 30 صالحة

نسحب بالصدفة 5 مصابيح ← توفيقة

$C_n^k = \frac{n!}{k!\ (n-k)!}$ ←

➢ عدد الحالات الممكنة: C_{40}^5

1) 3 مصابيح فاسدة:

Card (A) = $C_{10}^3 \times C_{30}^2$

2) 5 مصابيح صالحة:

Card (B) = $C_{30}^5 \times C_{10}^0$

3) مصباحين صالحين على الأقل:

Card (C) $=(C_{30}^{2} \times C_{10}^{3})+(C_{30}^{3} \times C_{10}^{2})+(C_{30}^{4} \times C_{10}^{1})+(C_{30}^{4} \times C_{10}^{0})$

4) مصباح صالح على الأكثر:

Card (D) $=(C_{30}^{1} \times C_{10}^{4})+(C_{30}^{0} \times C_{10}^{5})$

5) 4 مصابيح فاسدة على الأقل:

Card (E) $=(C_{10}^{4} \times C_{30}^{1})+(C_{10}^{5} \times C_{30}^{0})$

6) 3 مصابيح فاسدة على الأكثر:

Card (F) $=(C_{10}^{3} \times C_{30}^{2})+(C_{10}^{2} \times C_{30}^{3})+(C_{10}^{1} \times C_{30}^{4})+(C_{10}^{0} \times C_{30}^{5})$

حل التمرين 03:

الحالة الأولى : ترتيبة بدون إرجاع

$$A_{n}^{k}=\frac{n!}{(n-k)!}$$

➢ عدد الحالات الممكنة: Cardi $(\Omega)=A_{45}^{3}$

1) كرية صفراء ثم بيضاء ثم صفراء:

Cardi (A) $=A_{15}^{1} \times A_{20}^{1} \times A_{14}^{1}=4200$

2) 3 كريات خضراء:

Cardi (B) $=A_{10}^{1} \times A_{9}^{1} \times A_{8}^{1}=720$

3) كرية صفراء و كريتين:

صفراء	X	X

$A_{15}^{1} \times A_{30}^{2}$

(أو)+

X	صفراء	X

$A_{30}^{1} \times A_{15}^{1} \times A_{29}^{1}$

(أو)+

X	X	صفراء

$A_{30}^{2} \times A_{15}^{1}$

$\longrightarrow$ Cardi (C) = $2(A_{30}^{2} \times A_{15}^{1}) + (A_{30}^{1} \times A_{15}^{1} \times A_{29}^{1})$

الحالة الثانية : ترتيبة بالإرجاع

$\hat{A}_{n}^{k} = n^{k}$

➢ عدد الحالات الممكنة: Cardi (Ω) = $\hat{A}_{45}^{3}$

1) كرية صفراء ثم بيضاء ثم صفراء:

Cardi (A) = $\hat{A}_{15}^{1} \times \hat{A}_{20}^{1} \times \hat{A}_{15}^{1} = 4500$

2) 3 كريات خضراء:

Cardi (B) = $\hat{A}_{10}^{1} \times \hat{A}_{10}^{1} \times \hat{A}_{10}^{1} = \hat{A}_{10}^{3} = 1000$

3) كرية صفراء و كريتين:

صفراء	X	X

$\hat{A}_{15}^{1} \times \hat{A}_{30}^{2}$

+(أو)

X	صفراء	X

$\hat{A}_{30}^{1} \times \hat{A}_{15}^{1} \times \hat{A}_{30}^{1} = \hat{A}_{15}^{1} \times \hat{A}_{30}^{2}$

+(أو)

X	X	صفراء

$\hat{A}_{30}^{2} \times \hat{A}_{15}^{1}$

$\longrightarrow$ Cardi $(C) = 3(\hat{A}_{15}^{1} \times \hat{A}_{30}^{2})$

حل التمرين04:

7 مختلفة من بين 26 حرف $\longleftarrow$ ترتيبة بدون تكرار

$\longleftarrow$ $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

➢ عدد الحالات الممكنة: $\text{Card}(\Omega) = A_{26}^{7}$

$$P(A) = \frac{Card\ (A)}{Card\ (\Omega)} = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة (المواتية)}}{\text{عدد الممكنة (الكلية)}}$$

1) كلمة السر تحتوي على الحرف a:

عدد الحالات الملائمة:

a	x	x	x	X	x	x

$= A_1^1 \times A_{25}^{6} = A_{25}^{6}$

+

x	a	x	x	X	x	x

$= A_{25}^{6}$

+

.

.

.

x	x	x	x	X	x	a

$= A_{25}^{6}$

➢ و بالتالي عدد الحالات الملائمة = $\text{Card (A)} = 7 \times A_{25}^{6}$

$\longrightarrow \ P(A) = \dfrac{7 \times A_{25}^{6}}{A_{26}^{7}}$

2) كلمة السر لا تحتوي على الحرفين a و b:

← ينقص حرفان من المجموعة

← مج = 24 حرف

و بالتالي: $P(B) = \dfrac{A_{24}^{7}}{A_{26}^{7}}$

3) الأحرف a، b، c هي الأحرف الأولى في كلمة السر و تأتي متتابعة بهذا الشكل:

a	b	c	x	x	x	x

$\text{Card (C)} = A_{1}^{1} \times A_{1}^{1} \times A_{1}^{1} = A_{23}^{4}$

$P(C) = \dfrac{A_{23}^{4}}{A_{26}^{7}}$

4) الأحرف a، b، c متتالية في كلمة السر:

a	**b**	**c**	x	X	x	x

$= A_1^1 \times A_1^1 \times A_1^1 \times A_{23}^4 = A_{23}^4$

+

x	**a**	**b**	**c**	X	x	x

$= A_{23}^4$

+

x	x	**a**	**b**	**C**	x	x

$= A_{23}^4$

+

x	x	x	**a**	**B**	**c**	x

$= A_{23}^4$

+

x	x	x	x	**A**	**b**	**c**

$= A_{23}^4$

- و بالتالي عدد الحالات الملائمة = $\text{Card}(A) = 5 \times A_{23}^4$

$\longrightarrow P(A) = \dfrac{5 \times A_{23}^4}{A_{26}^7}$

5) الحرف b يظهر مرتين على الأقل في كلمة السر:

بما أن كلمة السر تحتوي على 7 أحرف مختلفة، فإذا ظهر حرف في كلمة السر فسيظهر مرة واحدة فقط، و بالتالي:

عدد الحالات الملائمة : $\text{Card}(E) = \varnothing$

و بالتالي : $P(E) = 0$

حل التمرين05:

ترتيبة بالتكرار ⟵ $\hat{A}_n^k = n^k$

$$P(A) = \frac{Card\,(A)}{Card\,(\Omega)} = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة (المواتية)}}{\text{عدد الممكنة (الكلية)}}$$

➢ عدد الحالات الممكنة: $Card(\Omega) = \hat{A}_{20}^{8}$

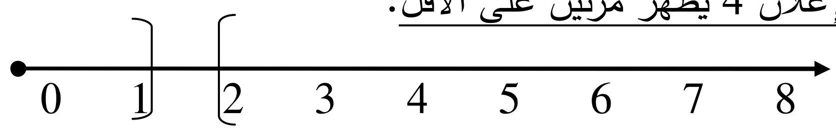
1) <u>الإعلان 2 يظهر مرتين متتاليتين و ذلك في الفترة الأولى و الثانية:</u>

2	**2**	x	x	X	x	x	x

$$Card\,(A) = \hat{A}_1^1 \times \hat{A}_1^1 \times \hat{A}_{19}^{6} = \hat{A}_{19}^{6}$$

$$P(A) = \frac{\hat{A}_{19}^{6}}{\hat{A}_{20}^{8}}$$

2) <u>الإعلان 4 يظهر مرتين على الأقل:</u>



مرة على الأكثر ⟵ ⟶ مرتين على الأقل

الحادث العكسي الحادث الأصلي

$P(\overline{B})$ $P(B)$

$$Card\,(\overline{B}) = \underbrace{C_8^1\,(\hat{A}_1^1 \times \hat{A}_{19}^{7})}_{\text{يظهر مرة واحدة}} + \underbrace{\hat{A}_{19}^{8}}_{\text{لا يظهر}}$$

➢ $P(\overline{B}) = \dfrac{8(\hat{A}_1^1 \times \hat{A}_{19}^{7}) + \hat{A}_{19}^{8}}{\hat{A}_{20}^{8}} = \dfrac{8\,\hat{A}_{19}^{7} + \hat{A}_{19}^{8}}{\hat{A}_{20}^{8}}$

➢ $P(B) = 1 - P(\overline{B})$

$$= 1 - \frac{8\,\hat{A}_{19}^{7} + \hat{A}_{19}^{8}}{\hat{A}_{20}^{8}}$$

3) الإعلان 1 يظهر مرتين، و الإعلان 3 يظهر ثلاث مرات، و الإعلان 17 ثلاث مرات:

الطريقة 01: بآستعمال الترتيبة

- Card(C) = $C_8^3\ (\hat{A}_1^1 x \hat{A}_1^1 x \hat{A}_1^1)\ x C_5^2\ (\hat{A}_1^1 x \hat{A}_1^1)\ x C_3^3\ (\hat{A}_1^1 x \hat{A}_1^1 x \hat{A}_1^1)$

الطريقة 02:بآستعمال التبديلة

k تتوزع على n: k = n = 8 ⟵ تبديلة بالتكرار

- Card (C) = $\tilde{P}_n = \frac{n!}{n1!\ n2!\ \dots\ nk!}$

  $= \frac{8!}{2!\ 3!\ 2!}$

- P(C) = $\frac{\text{Card (c)}}{\hat{A}_{20}^8}$