

ملخص الدرس: نظرية المجموعات

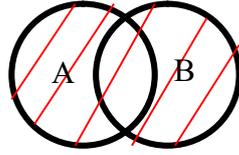
1- تعاريف:

1- تعريف الإتحاد و التقاطع:

نفترض أن A و B مجموعتان.

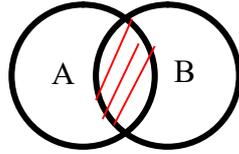
- يعرف إتحاد A و B بأنه مجموعة العناصر التي تنتمي إلى A أو إلى B

$$\{A \cup B = x \in A \text{ أو } x \in B\}$$



- يعرف تقاطع A و B بأنه مجموعة العناصر التي تنتمي إلى كل من A و B

- $\{A \cap B = x \in A \text{ و } x \in B\}$



➤ مثال: نفترض أن:

$$A = \{1, 2, 3, 4\} ; B = \{2, 4, 6, 8\}$$

➤ $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

➤ $A \cap B = \{2, 4\}$

2- الحوادث المتنافية:

يقال عن حادثين عشوائيين A و B أنهما متنافيين إذا استحال حدوثهما معا.

- مثال: عند سحب قطعة غيار من عينة تحتوي على على قطع غيار عادية و أخرى معابة. فمن المستحيل الحصول على قطعة معابة و تكون عادية في نفس الوقت.

3- الحوادث غير المتنافية:

يقال عن الحادثين A و B أنهما غير متنافيين إذا كان وقوعهما في نفس الوقت ممكن.

- مثال: عند رمي "زهرة نرد" مرة واحدة، فمن الممكن الحصول على الرقم 4 و على عدد زوجي في نفس الوقت.

4- الحوادث المستقلة:

- تكون الحوادث العشوائية مستقلة إذا كان وقوع أحدهما لا يؤثر على وقوع الحادث الأخرى.
- مثال: عند رمي زهري نرد، فالحصول على وجه ما في الزهر الأول لا يؤثر على نتيجة الزهر الثاني.

5- الحوادث غير المستقلة:

- و هي الحوادث التي وقوع أحدها يؤثر على وقوع الحادث الأخرى.
- مثال: صندوق به كرات ذات ألوان مختلفة، فعند سحب كرتين على التوالي بحيث لا تعاد الكرة الأولى، فإن نتيجة السحب الثاني تتأثر بنتيجة السحب الأول، لذى فالحدثين غير مستقلين.

II- قوانين الإحتمال (نظرية المجموعات):

1- قانون الجمع (الإتحاد):

$$\text{➤ حدثان متنافيان: } P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$\text{➤ حدثان غير متنافيان: } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

2- الإحتمال الشرطي (قانون الضرب):

$$\text{➤ حدثان مستقلان: } (A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$\text{➤ حدثان غير مستقلان: } (A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$$



الإحتمال الشرطي

إذا كان A و B حادثان غير مستقلان، فأحتمال وقوع الحادث A علماً أن الحادث B

قد وقع يسمى بالإحتمال الشرطي و يحسب بموجب القانون التالي:

$$P(A/B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B/A) = P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

➤ الكلمات المفتاحية للإحتمال الشرطي: علماً أن، من بين أن، شرط أن.

3- الحوادث العكسية:

- $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - (A \cap B)$
- $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - (A \cap B)$
- $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - (A \cup B)$
- $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - (A \cap B)$

سلسلة التمارين رقم 02 (نظرية المجموعات)

التمرين 01:

قامت شركة مقاولات بالمشاركة في مناقستين مختلفتين، بحيث أن نسبة فوزها بالمناقصة الأولى تقدر بـ 55%، و نسبة فوزها بالمناقصة الثانية تقدر بـ 40%، في حين تقدر إمكانية فوزها بالمناقستين معا بـ 25%.

- (1) أحسب احتمال الفوز بالمناقصة الأولى فقط.
- (2) أحسب احتمال الفوز بمناقصة واحدة.
- (3) أحسب احتمال عدم الفوز بأي مناقصة.

التمرين 02:

تبين من خلال دراسة إحصائية لمجموعة من طلبة اللغات الأجنبية النتائج التالية:

- 60% يدرسون اللغة الإنجليزية.
- 15% يدرسون اللغة الألمانية.
- من بين الذين يدرسون اللغة الإنجليزية، هناك 20% يدرسون اللغة الألمانية.

المطلوب:

- (1) من بين الذين يدرسون اللغة الألمانية، ماهي نسبة الذين يدرسون اللغة الإنجليزية؟
- (2) ماهي نسبة الذين يدرسون لغة واحدة على الأقل؟
- (3) ماهي نسبة الذين لا يدرسون لا اللغة الإنجليزية و لا اللغة الألمانية؟

التمرين 03:

تستورد إحدى شركات بيع السيارات إحتياجاتها من قطع الغيار من ثلاث موردين A، B و C. حيث يمونها المورد A بنسبة 60% من إحتياجاتها من قطع الغيار، منها 10% فاسدة. أما المورد B يمونها بنسبة 30% من الإحتياجات، منها 4% فاسدة. أما الباقي من الإحتياجات فيمونها من طرف المورد C بحيث 5% منها فاسدة.

- (1) أحسب نسبة قطع الغيار الفاسدة المستوردة من طرف هذه الشركة.
- (2) ذات يوم إشتريت الشركة قطعة غيار و تبينت أنها فاسدة، أحسب احتمال أنها أشتريت من عند المورد B.

التمرين 04:

أجريت دراسة إحصائية على عينة من نوع خاص من الساعات عددها 10.000 ساعة، حيث تبين أن هناك عيبين A و B ظهرا في المنتوجات (الساعات). أعطت الدراسات النتائج التالية:

- 10% من الساعات من هذه العينة ظهر بها العيب A.
- من بين الساعات التي ظهر بها العيب A، هناك 12% ظهر بها العيب B.
- من بين الساعات التي لم يظهر بها العيب A، هناك 5% ظهر بها العيب B.

المطلوب:

- 1) أرسم جدول الحوادث المتعلقة بـ A و B.
- 2) نختار بالصدفة ساعة واحدة من هذه العينة. أحسب احتمال الحوادث التالية:
 - أ- ظهور العيب A بالساعة.
 - ب- ظهور العيب B بالساعة.
 - ج- عدم ظهور أي عيب من A و B بالساعة.
- 3) بين جميع الحوادث على شجرة الاحتمال.

حل سلسلة التمارين رقم 02

حل التمرين 01:

$$P(A) = 0.55$$

$$P(B) = 0.4$$

$$P(A \cap B) = 0.25$$

(1) إحتمال الفوز بالمناقصة الأولى فقط:

$$\begin{aligned} P(A \cap \bar{B}) &= P(A) - (A \cap B) \\ &= 0.55 - 0.25 \\ &= 0.3 \end{aligned}$$

(2) إحتمال الفوز بمناقصة واحدة:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) &= 0.3 + [P(B) - (A \cap B)] \\ &= 0.3 + (0.4 - 0.25) \\ &= 0.45 \end{aligned}$$

(3) إحتمال عدم الفوز بأي مناقصة:

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap \bar{B}) &= P(\overline{A \cup B}) = 1 - (A \cup B) \\ &= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] \\ &= 1 - (0.55 + 0.4 - 0.25) \\ &= 0.3 \end{aligned}$$

حل التمرين 02:

$$P(A) = 0.6$$

$$P(B) = 0.15$$

$$P(B/A) = 0.2$$

(1) من بين الذين يدرسون اللغة الألمانية، حساب نسبة الذين يدرسون اللغة الإنجليزية

: $P(A/B)$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \text{➤ } P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} &\rightarrow (A \cap B) = P(A) \times P(B/A) \\ &= 0.6 \times 0.2 \\ &= 0.12 \end{aligned}$$

$$\text{➤ } \textcircled{1} \rightarrow P(A/B) = \frac{0.12}{0.15} = 0.8$$

(2) ماهي نسبة الذين يدرسون لغة واحدة على الأقل $(A \cup B)$:

$$\begin{aligned} (A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0.6 + 0.15 - 0.12 \\ &= 0.63 \end{aligned}$$

(3) ماهي نسبة الذين لا يدرسون لا اللغة الإنجليزية و لا اللغة الألمانية $P(\bar{A} \cap \bar{B})$:

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap \bar{B}) &= P(\overline{A \cup B}) = 1 - (A \cup B) \\ &= 1 - 0.63 \\ &= 0.37 \end{aligned}$$

حل التمرين 03:

$$P(A) = 0.6$$

$$P(D/A) = 0.1$$

$$P(B) = 0.3$$

$$P(D/B) = 0.04$$

$$P(C) = 0.1$$

$$P(D/C) = 0.05$$

(1) نسبة قطع الغيار الفاسدة $P(D)$:

نطبق نظرية الإحتمالات الكلية:

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C) \\ &= P(D/A) \times P(A) + P(D/B) \times P(B) + P(D/C) \times P(C) \\ &= (0.1 \times 0.6) + (0.04 \times 0.3) + (0.05 \times 0.1) \\ &= 0.06 + 0.012 + 0.005 \\ &= 0.077 \\ &= 7.7\% \end{aligned}$$

(2) $\text{؟} = P(B/D)$

$$\begin{aligned} P(B/D) &= \frac{P(D \cap B)}{P(D)} \\ &= \frac{0.012}{0.077} \\ &= 0.1558 \\ &= 15.58\% \end{aligned}$$

حل التمرين 04:

$$P(A) = 0.1 \longrightarrow P(\bar{A}) = 0.9$$

$$P(B/A) = 0.12$$

$$P(B/\bar{A}) = 0.05$$

(1) جدول الحوادث المتعلقة بـ A و B:

	B	\bar{B}	Σ
A	Card($A \cap B$) ساعة 120=	Card($A \cap \bar{B}$) ساعة 880=	Card(A) ساعة 1000=
\bar{A}	Card($\bar{A} \cap B$) ساعة 450=	Card($\bar{A} \cap \bar{B}$) ساعة 8550=	Card(\bar{A}) ساعة 9000=
Σ	Card(B) ساعة 750=	Card(\bar{B}) ساعة 9430=	Card(Ω) ساعة 10.000=

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} \longrightarrow \text{Card}(A) = P(A) \times \text{Card}(\Omega) \triangleright$$

$$= 0.1 \times 10.000$$

$$= 1000$$

$\triangleright P(A \cap B) = ?$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$\longrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$$

$$= 0.1 \times 0.12$$

$$= 0.012$$

$$\longrightarrow \text{Card}(A \cap B) = 0.012 \times 10.000$$

$$= 120$$

$$\text{➤ } \underline{P(A \cap \bar{B}) = ?}$$

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$$

$$\rightarrow P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$= 0.1 - 0.012$$

$$= 0.088$$

$$\rightarrow \text{Card}(A \cap \bar{B}) = 0.088 \times 10.000$$

$$= 880$$

$$\text{➤ } \underline{P(\bar{A} \cap B) = ?}$$

$$P(B/\bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})} \rightarrow P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \times P(B/\bar{A})$$

$$= 0.9 \times 0.05$$

$$= 0.045$$

$$\rightarrow \text{Card}(\bar{A} \cap B) = 0.045 \times 10.000$$

$$= 450$$

$$\text{➤ } \underline{P(\bar{A} \cap \bar{B}) = ?}$$

$$P(\bar{A}) = P(\bar{A} \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$\rightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) - P(\bar{A} \cap B)$$

$$= 0.9 - 0.045$$

$$= 0.855$$

$$\rightarrow \text{Card}(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.855 \times 10.000$$

$$= 8550$$

$$\text{➤ } \underline{P(B) = ?}$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$$

$$= 0.012 + 0.045$$

$$= 0.057$$

$$\rightarrow \text{Card (B)} = 0.057 \times 10.000$$

$$= 570$$

$$\rightarrow P(\bar{B}) = ?$$

$$P(\bar{B}) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$= 0.088 + 0.855$$

$$= 0.943$$

$$\rightarrow \text{Card}(\bar{B}) = 0.943 \times 10.000$$

$$= 9430$$

(2) نختار بالصدفة ساعة واحدة من هذه العينة:

بالصدفة ← توفيقاً

$$C_n^k = \frac{n!}{k! (n-k)!}$$

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

أ- إحتمال ظهور العيب A بالساعة:

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

$$= \frac{1000}{10.000}$$

$$= 0.1$$

ب- إحتمال ظهور العيب B بالساعة:

$$P(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)}$$

$$= \frac{570}{10.000}$$

$$= 0.057$$

ج- إحتمال عدم ظهور أي عيب من A و B بالساعة:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{\text{Card}(\bar{A} \cap \bar{B})}{\text{Card}(\Omega)}$$

$$= \frac{8850}{10.000}$$

$$= 0.885$$

(3) تلخيص جميع الحوادث على شجرة الإحتمال:

