ملخص الدرس: التوزيع ذي الحدين

I- تعريف:

يتميز التوزيع ذي الحدين (La loi binomiale) بالخصائص التالية:

- نجاح الحادث بآحتمال قدره P.
- فشل الحادث بآحتمال قدره P − 1.
- إعادة التجربة n مرة.

II-قانون التوزيع ذي الحدين:

$$P(x= k) = C_n^k\, P^k\, (1-P)^{n-k}$$

مثال: صندوق يحتوي على 7 من الكريات. نسحب 3 كريات، إحتمال سحب كرية خضراء هو 0.2

- نجاح الحادث: $P = 0.2$
- فشل الحادث: $1-P = 1 - 0.2 = 0.8$

$$P(X = 3) = C_7^3\; 0.2^3\; 0.8^4$$

III- التوقع الرياضي و التباين:

$$E(X) = n\, p$$

$$V(X) = n\, p\, (1-p)$$

من خلال المثال السابق، نقوم بحساب التوقع الرياضي و التباين:

$$E(X) = n\, p = 0.2 \times 0.8 = 0.16$$

$$V(X) = n\, p\, (1-p) = 7 \times 0.2 \times 0.8 = 1.02$$

سلسلة التمارين رقم 04 (التوزيع ذي الحدين)

التمرين 01:

تضمن إمتحان في مقياس ما 10 أسئلة، بحيث أن إحتمال الحصول على الأجوبة الصحيحة هو 0.2. نفترض أن طالب أجاب بصفة عشوائية في هذا الإمتحان.

نعرف المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الأجوبة الصحيحة لهذا الطالب.

المطلوب:

1) ماهو التوزيع الإحتمالي للمتغير X؟
2) أحسب التوقع الرياضي و التباين لهذا المتغير.
3) أحسب إحتمال حصول الطالب على 6 إجابات صحيحة.
4) أحسب إحتمال حصول الطالب على الأقل على إجابتين صحيحتين.

التمرين 02:

إحتمال نجاح عملية جراحية للقلب هو 0.7. برمجت لجنة العمليات الجراحية للقلب 10 عمليات في الأسبوع. نعرف المتغير العشوائي الذي يمثل عدد العمليات الجراحية للقلب الناجحة.

المطلوب:

1) ماهو التوزيع الإحتمالي للمتغير X؟
2) أحسب إحتمال نجاح 03 عمليات جراحية على الأكثر.
3) أحسب إحتمال نجاح 04 عمليات جراحية.
4) أحسب متوسط التوزيع و تباينه، ثم إنحرافه المعياري.

حل سلسلة التمارين رقم 04 (التوزيع ذي الحدين)

حل التمرين 01:

1) التوزيع الإحتمالي للمتغير X:

X يمثل عدد الأجوبة الصحيحة ⟵ x يتبع توزيع ذي الحدين، دالته الإحتمالية كالآتي:

$X \Rightarrow B\ (n\ ,\ p)$

$X \Rightarrow B\ (10\ ,\ 0.2)$

$$P(x=k) = C_n^k\ P^k\ (1-P)^{n-k}$$

2) أحسب التوقع الرياضي و التباين:

- $E(X) = n\ p$

  $= 10 \times 0.2$

  $= 2$

- $V(X) = n\ p\ (1-p)$

  $= 10 \times 0.2 \times 0.8$

  $= 0.16$

3) أحسب إحتمال حصول الطالب على 6 إجابات صحيحة:

$$P(x=k) = C_n^k\ P^k\ (1-P)^{n-k}$$

$$P\ (x=6) = C_{10}^6\ 0.2^6\ (1-0.2)^{10-6}$$

$$= C_{10}^6\ 0.2^6\ 0.8^4$$

$$= 0.0055$$

4) أحسب إحتمال حصول الطالب على الأقل على إجابتين صحيحتين:

$$P(x\geq 2) = 1 - P(x<2)$$

$$= 1 - [P(x=0) + P(x=1)]$$

$$= 1 - [C_{10}^0\ 0.2^0\ 0.8^{10} + C_{10}^1\ 0.2^1\ 0.8^9]$$

$$= 0.624$$

حل التمرين 02:

1) التوزيع الإحتمالي للمتغير X:

X يمثل عدد العمليات الجراحية للقلب الناجحة ← x يتبع توزيع ذي الحدين، دالته الإحتمالية كما يلي:

$X \Rightarrow B(n, p)$

$X \Rightarrow B(10, 0.7)$

$$P(x=k) = C_n^k P^k (1-P)^{n-k}$$

2) حساب إحتمال نجاح 03 عمليات جراحية على الأكثر:

$P(x \leq 3) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) + P(x=3)$

$= C_{10}^0\ 0.7^0\ 0.3^{10} + C_{10}^1\ 0.7^1\ 0.3^9 + C_{10}^2\ 0.7^2\ 0.3^8 + C_{10}^3\ 0.7^3\ 0.3^7$

$= 0.01$

3) حساب إحتمال نجاح 04 عمليات جراحية:

$P(x=4) = C_{10}^4\ 0.7^4\ 0.3^6$

$= 0.036$

4) أحسب متوسط التوزيع و تباينه، ثم إنحرافه المعياري:

- $E(x) = n.p = 10 \times 0.7$

  $= 7$

- $V(x) = n.p.(1-p)$

  $= 10 \times 0.7 \times 0.3$

  $= 2.1$

- $\delta(x) = \sqrt{V(x)}$

  $= \sqrt{2.1}$

  $= 1.449$