**Université de Tlemcen**
**Faculté des Sciences**
**Département de Math**
**1ière Année LMD-MI**
**Durée : 01 h 30mn**

**Année Universitaire : 2022/2023**
**Lundi 05/06/2023**

# Épreuve de remplacement d'électricité

**Questions de cours: (5pts)**

1. Démontrer l'expression du champ électrique au voisinage immédiat d'un conducteur en équilibre électrostatique (Théorème de Coulomb).
2. Donner avec démonstration la loi d'Ohm à l'échelle microscopique.
3. Soit $\vec{A} = 2xyz\vec{\imath} + (2x^2 - y)\vec{\jmath} - yz^2\vec{k}$ et $\phi = x^2y + 2y^2z^3$

Calculer : $\overrightarrow{grad}\,\phi$ $et$ $div\vec{A}$.

**Exercice 1: (10pts)**

**A-** Une charge linéaire ($\lambda>0$) est répartie uniformément sur un demi-cercle de centre O et de rayon R (Figure 1).

**1)** Calculer le champ électrostatique au point M situé sur l'axe (ox) à une distance **x** du centre O.

**2)** Déduire le potentiel électrostatique au point M.

On donne : $\int U'U^n = \frac{U^{n+1}}{n+1}$

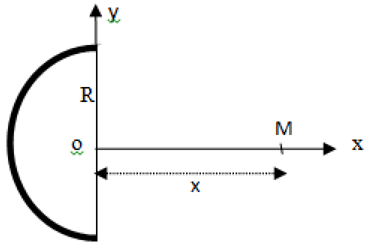


**Figure 1**

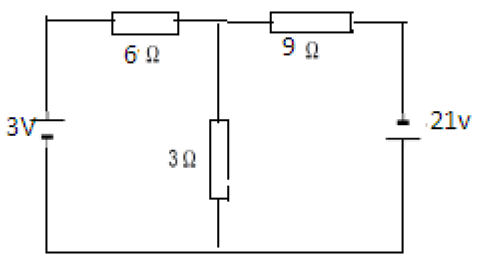
**B-** Une sphère de centre O et de rayon R chargée en volume avec une densité de charge volumique **variable** $\rho=\frac{A}{r}$ positive.

**1)** En appliquant le théorème de GAUSS calculer le champ électrique en tout point de l'espace.

**2)** En déduire le potentiel électrique à l'extérieur de la sphère.

**Exercice 2: (5pts)**

Soit le circuit électrique suivant :




1. Représenter les courants de chaque branche dans le circuit.
2. Calculer l'intensité du courant électrique dans chaque branche.

**Bon courage**

**Université de Tlemcen**
**Faculté des Sciences**
**Département de Math**
**1ière Année LMD-MI**
**Durée : 01 h 30mn**

**Année Universitaire : 2022/2023**

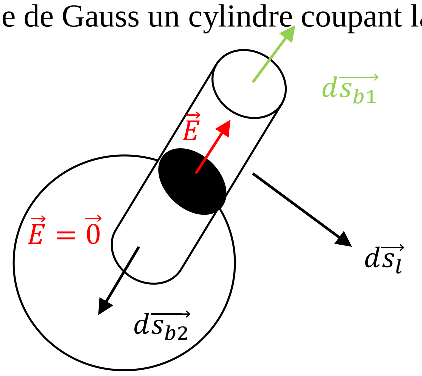
# Corrigé de l'examen de remplacement d'électricité

**<u>Question de cours</u>: (5pts)**

**1-** Champ électrique au voisinage immédiat d'un conducteur en équilibre électrostatique (Théorème de Coulomb)

Soit un conducteur de forme quelconque; on calcule le champ au voisinage de la surface externe du conducteur. On applique le Théorème de Gauss.
On choisit comme surface de Gauss un cylindre coupant la surface du conducteur.

**(0.25pts)**




On a $\emptyset = \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$ **(0.25pts)**

$\emptyset = \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds_{\ base\ 1}} + \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds_{lat}} + \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds_{\ base\ 2}}$ **(0.25pts)**

$\vec{E}.\overrightarrow{ds_{\ base\ 1}} = 0\ car\ \overrightarrow{E_{int}} = \vec{0}$ **(0.25pts)**

$\vec{E} \perp \overrightarrow{ds_{\ lat}} \Longrightarrow \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds_{lat}} = 0$ **(0.25pts)**

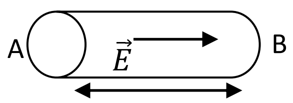
$\vec{E} \parallel \overrightarrow{ds_{base\ 2}}$ Donc : $\emptyset = \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds_{base}} = \iint E.ds_{base} = E.\int ds_{base} = E.S_{base}$ **(0.25pts)**

$\emptyset = E.S_{base} = \frac{\sum Q_{int}}{\varepsilon_0}$

$dq = \sigma ds$ **(0.25pts)** $\Rightarrow Q_{int} = \sigma \iint ds = \sigma S_{base} \Rightarrow E.S_{base} = \frac{\sigma S_{base}}{\varepsilon_0}$

donc $\boldsymbol{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$ **(0.25pts)**

**2-** Soit un fil conducteur de longueur l et de section S parcouru par un courant d'intensité I.
La tension au bornes de ce conducteur s'écrit par :




$U = \Delta v = v_A - v_B = RI$ **(0.25pts)**

Le champ s'écrit par :

$E = -\frac{dv}{dl} \Rightarrow \int_{v_A}^{v_B} dv = -\int Edl$ **(0.25pts)**

donc $v_B - v_A = -\int Edl \Rightarrow U = v_A - v_B = \int Edl$ **(0.25pts)**

$I = \iint \vec{j}\vec{ds} = js$ **(0.25pts)** avec $j = \sigma E$ **(0.5pts)**

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\int Edl}{js} = \frac{E\int_A^B dl}{\sigma Es} = \frac{El}{\sigma Es} \; donc \; R = \frac{l}{\sigma s} \; (\mathbf{0.5pts})$$

**3-** $\overrightarrow{grad}\,\phi(x,y,z) = 2xy\,\vec{\imath} + (x^2 + 4yz^3)\,\vec{\jmath} + 6y^2z^2\,\vec{k}$ **(0.5pts)**
et $div\,\vec{A} = 2yz - 1 - 2yz$ **(0.5pts)**

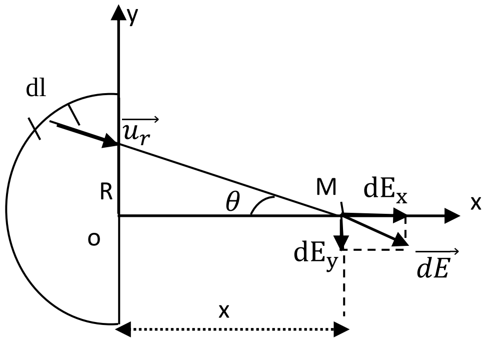
**<u>Exercice 1</u>: (10pts)**

**A-** 1-Le champ électrique E en M. **(05pts)**

$\overrightarrow{dE} = k\frac{dq}{r^2}\overrightarrow{u_r}$ **(0.5)** avec $\overrightarrow{u_r} = \cos\theta\,\vec{\imath} - \sin\theta\,\vec{\jmath}$ **(0.25)**

$r^2 = x^2 + R^2$ **(0.25)**

$dq = \lambda dl$ **(0.25)**




**(0.25)**

Donc

$\overrightarrow{dE} = k\frac{\lambda dl}{x^2+R^2}\left(\cos\theta\,\vec{\imath} - \sin\theta\,\vec{\jmath}\right)$ **(0.25)**

Par raison de symétrie $\mathbf{dE_y = 0}$ **(0.5)**

$dE_x = \frac{k\lambda dl}{x^2+R^2}\cos\theta$ **(0.5)**

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{(x^2+R^2)^{1/2}}$ **(0.25)**

Donc $$dE_x = \frac{k\lambda x dl}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

$E_x = \int dE_x = \frac{k\lambda x}{(x^2+R^2)^{3/2}}\int_0^{\pi R} dl$ **(0. 5)** $\Rightarrow$ $\mathbf{E_x} = \frac{\boldsymbol{k\lambda x\pi R}}{(\boldsymbol{x^2+R^2})^{3/2}}$ **(0. 5)**

<u>2ieme méthode</u>

$$dl = Rd\theta$$

Donc $E_x = \int dE_x = \frac{k\lambda xR}{(x^2+R^2)^{3/2}}\int_0^{\pi} d\theta$ $\Rightarrow$ $\mathbf{E_x} = \frac{\boldsymbol{k\lambda x\pi R}}{(\boldsymbol{x^2+R^2})^{3/2}}$

2-<u> Déduire V : </u>**(1pts)**

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,v$ **(0.25)** avec $\vec{E} = E(x)$

Donc $E(x) = -\frac{dv}{dx} \Rightarrow dv = -E\,dx \Rightarrow v = \int dv = -\int Edx$ **(0.25)**

$\Rightarrow v = -k\lambda\pi R\int\frac{x\,dx}{(x^2+R^2)^{3/2}}$ **(0.25)** $\Rightarrow \boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{k\lambda\pi R}}{(\boldsymbol{x^2+R^2})^{1/2}}$ **(0.25)**

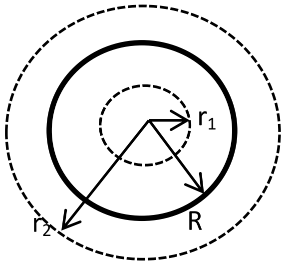
On donne

$$\int\frac{x\,dx}{(x^2+R^2)^{3/2}} = -(\boldsymbol{x^2+R^2})^{-1/2}$$

**B**-La surface de Gauss est une sphère de centre O et de rayon r. **(0. 25)**

A cause e la symétrie, le champ est radial et constant en tout point de la surface de gauss. **(0.25)**

Le flux à travers la surface Gauss. $\emptyset = \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \sum \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$ **(0.5)**




### 1- Le champ électrique

La densité volumique des charges $\rho = \frac{A}{r}$

$$\begin{cases} \iint \vec{E}.\overrightarrow{ds} = \sum \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \\ \vec{E} \parallel \overrightarrow{ds} \; et \; E = cst \end{cases} (\mathbf{0.25}) \Rightarrow \iint E.ds = E.4\pi r^2 = \sum \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \quad \textbf{(0.25)}$$

Nous avons deux cas :

**1^er cas : r<R**

$$\textbf{(0.5)} \begin{cases} dq = \rho dv \\ \rho = \frac{A}{r} \\ dv = 4\pi r^2 dr \end{cases} \Rightarrow \int dq = 4\pi \int_0^{r_1} \frac{A}{r} r^2 dr$$

Donc $Q_{int} = 2\pi A r_1^2$ **(0.25)** d'où $E_1 4\pi r_1^2 = \frac{2\pi A}{\varepsilon_0} r_1^2 \Rightarrow \boldsymbol{E_1} = \frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{2\varepsilon_0}}$ **(0.5)**

**2^eme cas : r≥R**

$\int dq = 4\pi \int_0^R \frac{A}{r} r^2 dr \Rightarrow Q_{int} = 2\pi A R^2$ **(0. 25)** d'où $E_2 4\pi r_2^2 = \frac{2\pi A}{\varepsilon_0} R^2 \Rightarrow \boldsymbol{E_2} = \frac{\boldsymbol{AR^2}}{\boldsymbol{2r_2^2\varepsilon_0}}$ **(0.5)**

### 2- Le potentiel (1.5pts)

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}v \Rightarrow E = -\frac{dv}{dr}$ **(0.25)** donc $v = -\int E dr$ **(0.25)**

**2^eme cas : r≥R**

$E_2 = \frac{AR^2}{2r_2^2\varepsilon_0} \Rightarrow v_2 = -\frac{AR^2}{2\varepsilon_0}\int \frac{dr}{r_2^2}$ Donc $v_2 = \frac{AR^2}{2r\varepsilon_0} + c_2$ **(0.5)**

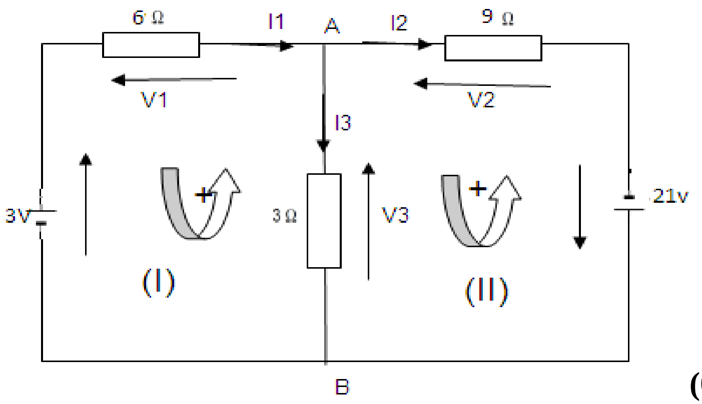
A l'infini, le potentiel est nul : $\lim_{r\to\infty} v = 0 \Rightarrow c_2 = 0$ **(0.25)** Donc $v_2 = \frac{AR^2}{2r\varepsilon_0}$ **(0.25)**

**<u>Exercice 2</u> : (5pts)**

Le choix du sens du courant est arbitraire, c'est-à-dire on peut le choisir dans n'importe quel sens, après calcul si le courant a une valeur positive on conclut qu'on a choisi le bon sens dans le cas où on aura une valeur négative on change le sens et on garde la valeur positive.

Après avoir choisi le sens du courant, la différence du potentiel (tension) à la borne du dipôle passif (Résistance) sera dans le sens inverse du courant. Le sens de la tension entre le dipôle actif (générateur du courant) sera du pole négative vers le pole positive.

Supposant que les courants $I_1$, $I_2$ et $I_3$ traverse les résistances 6Ω, 9Ω et 3Ω respectivement




**(01pts)**

$$I_1 = I_2 + I_3$$

Le courant I1 arrive au nœud A par contre les courant I2 et I3 partent du nœud A

Donc $I_1 = I_2 + I_3$ (1) **(0.5pts)**

En appliquant la loi des mailles :

Maille I $V_1 - 3 + V_3 = 0$ **(0.5pts)**

Maille II $V_2 - V_3 - 21 = 0$ **(0.5pts)**

On remplace les tensions par leurs expressions

$$6I_1 - 3 + 3I_3 = 0 \text{ alors } 6I_1 + 3I_3 = 3 \quad (2)$$

$$9I_2 - 21 - 3I_3 = 0 \text{ donc } 9I_2 - 3I_3 = 21 \quad (3)$$

Si on remplace la valeur de $I_1$ de l'équation (1) dans l'équation (2) on aura :

$$6I_2 + (3+6)_3 = 3 \Longrightarrow \quad 6I_2 + 9I_3 = 3 \ (4)$$

On multiplie l'équation (3) par 3 et on l'additionne avec l'équation (4) on aura :

$$27I_2 - 9I_3 + 6I_2 + 9I_3 = 63 + 3$$

$$66 \Longrightarrow 33I_2 = 66 \Longrightarrow \cancel{I_2} = 2\ A$$ **(0.5pts)**

On remplace la valeur de $I_2$ dans l'équation (3) on peut déterminer la valeur du courant $I_3$

$$18 - 3I_3 = 21 \Rightarrow I_3 = -\frac{21-18}{3} = -1A$$

**(0.5pts)**

Avec l'équation (1) on détermine le courant

$I_1$=1A **(0.5pts)**

On remarque que le courant $I_3$ qui vaut 1 A et le courant $I_2$ qui vaut 2 A sont positives donc le choix de leur sens dans le circuit est adéquat, par contre le courant $I_3$ est négatif donc la valeur de $I_1$ vaut 1A et on change son sens dans le circuit. Par conséquent le générateur de tension 21volt joue le rôle d'un générateur par contre celui de 3 volt joue le rôle d'un récepteur. **(01pts)**