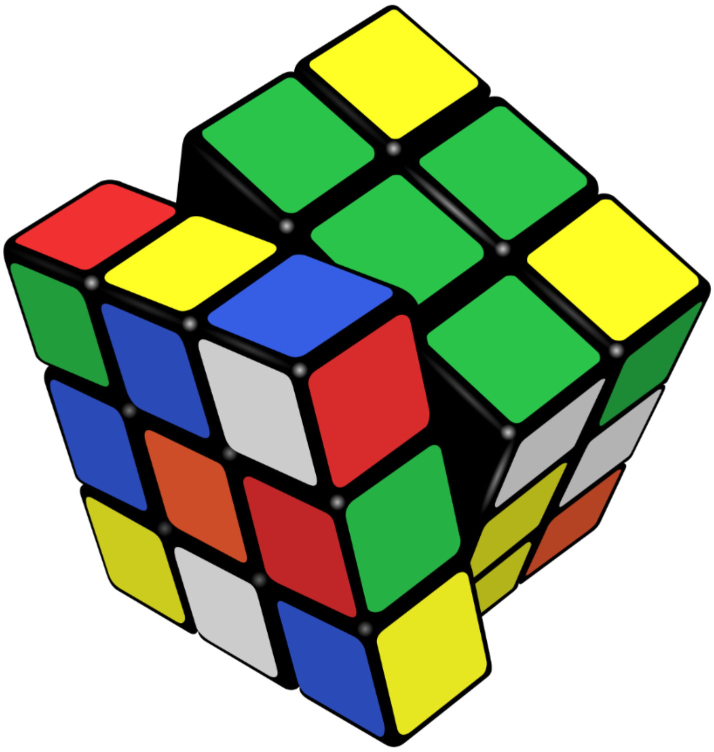


نظرية المجموعات

تمهيد

إن نظرية المجموعات تعد من الفروع الأساسية لعلم الرياضيات، و عادة ما يستخدم علماء الرياضيات الحروف لتمييز المجموعات وعناصرها.

تعد نظرية المجموعات المدخل الأول أو المبدأ الأساسي في نظرية الاحتمال .

I. تعريف نظرية المجموعات:

نظرية المجموعات (Set Theory) هو فرع من علم المنطق الرياضي. تهتم تلك النظرية بدراسة المجموعات والتي هي تجميع لكائنات رياضية مجردة والعمليات المطبقة عليها، وتشكل إحدى أهم ركائز الرياضيات الحديثة.

تعرف المجموعة على أنها تجمع بين الأشياء التي تشترك في صفة معينة وقد تكون هذه الأشياء كميات أو أعداد أو أي شيء آخر معرفا تعريفا واضحا وعادة ما يرمز للمجموعات بأحرف إنكليزية كبيرة بينما نرمز للعناصر التي توجد ضمن تلك المجموعات بأحرف إنكليزية صغيرة.

و قد عرفها العالم الرياضي جورج كانتور(J.Cantor)* على أنها" هي إجتماع من كل لعدد من الأشياء التي نحسبها بحواسنا أو نتصورها بأذهاننا، و هي كائنات معينة تمام التعيين و مختلف بعضها عن بعض"

كانت بداية الإهتمام بهذا العلم والعمل على دراسته بالقرن التاسع عشر عندما بدأه جورج كانتور وريتشارد ديدكايند. وعلى اثر اكتشاف تناقضات عديدة في نظرية المجموعات الأساسية، اقتُرحت العديد من الانظمة البديهية لتجاوز هذه التناقضات ، ومن هذه كان نظام زيرملو-فرانكلن مع بديهية الإختيار افضلها على الإطلاق.

II. أنواع المجموعات: نميز ما بين

II .1المجموعة الشاملة أو الكاملة universal set:

في أي مجالٍ من المجالات ، فإن جميع العناصر التي يختص ذلك المجال بالتعامل معها تنتمي إلى مجموعةٍ كبرى تدعى بالمجموعة الشاملة . أي بعبارة أخرى ، هي تشمل كل عناصر الموضوع أو الظاهرة محل الدراسة.

مثال: مجموعة الطلبة هي مجموعةٌ شاملة تضم جميع طلبة العالم و مجموعة الأعداد هي مجموعةٌ شاملة تضم جميع الأعداد.

عادة ما يرمز لهذه المجموعة ب بالحرف Uأو Ω.

II .2المجموعة الخالية – المجموعة المنعدمة العناصر Empty set – null set:

*: عاالم رياضي ألماني، و هو من الأوائل الذي أشار إلى هذا المفهوم ، و يعتبر مؤسس نظرية المجموعات.

يقصد بالمجموعة الخالية ، مجموعة منعدمة العناصر أي التي لا تحوي أي عنصر و يرمز لهذه المجموعة بالرمز $\emptyset$.و توجد مجموعة خالية وحيدة فهي كلها عبارة عن مجموعات خالية من العناصر و بالتالي فهي مجموعات متساوية.

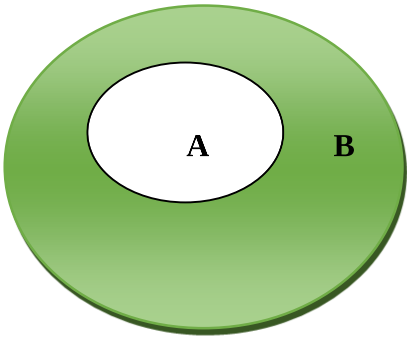
II. .3المجموعة الجزئية subset :

يقصد بالمجموعة الجزئية ، مجموعة تشكل جزءاً من مجموعة أخرى أكبر منها .أي جزء من الكل

وفقا لنظرية المجموعات، فإنه إذا كان لدينا المجموعتين A و B و كانت عناصر المجموعة Aموجودة كذلك ضمن المجموعة B فإننا ندعوا المجموعة A بأنها مجموعةً جزئية من المجموعة B أو أن A محتواة في B.

نستخدم الرمز $\subseteq$ للدلالة على ذلك، و نكتب: $A \subseteq B$

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall X: x \in A \Rightarrow x \in B$$



II. .4المجموعات المتساوية :

نقول عن مجموعتين(A) و (لB) أنهما متساوييتين إذا كا (A) و (B) يحتويان على نفس العناصر.

ملاحظة: في الوقت ذاته فإنه يمكن القول كذلك بأن كلاً من هاتين المجموعتين هي مجموعةٌ جزئيةً من المجموعة الثانية لأن عناصر كلاً منهما موجودةً في المجموعة الأخرى.

نستخدم الرمز $\supseteq$ لدلالة على أن إحدى هاتين المجموعتين هي مجموعةٌ جزئية من المجموعة الثانية و أنها تساويها في الوقت ذاته ، و نكتب:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall X: x \in A \Leftrightarrow x \in B$$

مثال: $A=\{2,4,6,8\}$، و $B=\{4,6,8,2\}$

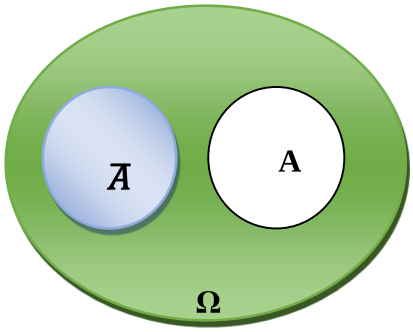
في هذه الحالة نقول $A=B$، لأن لهما نفس العناصر و العدد.

II. .5 المجموعة المتممة أو المكملة:

إذا كانت المجموعتين (A) و $(\bar{A})$ مجموعتان جزئيتان من المجموعة الكلية Ω

نقول عن $(\bar{A})$ أنها مجموهة متممة للمجموعة (A) ،إذا كانت العناصر التي تنتمي إلى $(\bar{A})$ لا تنتمي إلى (A)، أي لا يوجد أي عنصر مشترك بين المجموعتين.

إذا كان $x \in A$ فإن $x \notin \bar{A}$ ، والعكس صحيح.



مثال:

لتكن $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ ، إذا كانت A و $\bar{A}$ مجموعتان جزئيتان من Ω.

بحيث A :مجموعة الأعداد الزوجية.

أوجد $\bar{A}$؟

A :مجموعة الأعداد الزوجية. $\Longrightarrow A=\{2,4,6,8,10\}$

$\bar{A}$:مجموعة الأعداد الفردية. $\Longrightarrow \bar{A}=\{1,3,5,7,9\}$

II. 6.المجموعات المنتهية:

يقصد بالمجموعة المنتهية ، كل مجموعة تحتوي على عدد منتهي من العناصر ، أي بعبارة أخرى عدد عناصرها يمكن تحديده.

مثال: لتكن (A) مجموعة الأعداد الطبيعية التي تزيد عن 5 وتقل عن 15، إذن :

$$A=\{6,7,8,9,10,11,12,13,14\}$$

6.III المجموعات الغير المنتهية:

هي عكس المجموعة السابقة، فهي كل مجموعة تحتوي على عدد غير منتهي من العناصر ، أي بعبارة أخرى عدد عناصرها لا يمكن

مثال : لتكن (A) مجموعة مضاعفات العدد 5

في هذه الحالة، (A) هي مجموعات غير منتهية وذلك لأن عناصرها غير محددة

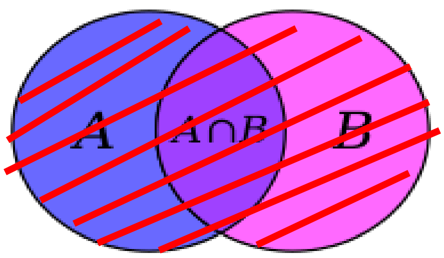
ملاحظة: : كل مجموعة يمكن أن تكون ضمن واحدة أو أكثر من هذه التسميات

III. العمليات على المجموعات:

III. 1الإتحاد:

عملية اتحاد مجموعتين A وB يرمز لها بـ $\{A \cup B\}$ ونتيجتها هي مجموعة جديدة تحوي العناصر التي تنتمي لمجموعة واحدة من المجموعتين A أو B. أي أن عنصر x ينتمي إلى $\{A \cup B\}$ إذا وفقط إذا x ينتمي إلى A أو x ينتمي إلى B

$$\{ x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \}$$



A ∪ B

و من خلال تعريف الإتحاد بين المجموعات ، ينتج:

- $A \cup A = A$
- $A \cup \Omega = \Omega$
- $A \cup B = B \cup A$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

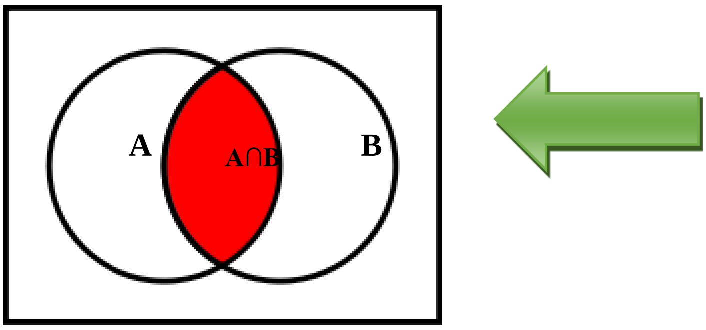
مثال: لتكن $A=\{3,7,4\}$، $B=\{2,5,1\}$

A∪B={1,2,3,4,5,7}

III. 2.التقاطع:

عملية تقاطع مجموعتين A وB يرمز لها بـ $A \cap B$ونتيجتها هي مجموعة جديدة تحوي العناصر المشتركة بين A وB. أي أن عنصر x ينتمي إلى $A \cap B$ إذا وفقط إذا x ينتمي إلى A وأيضاً x ينتمي إلى B.

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$$



و من خلال تعريف التقاطع بين المجموعات ، ينتج:

- A∩A=A
- A∩Ω=A
- A∩∅=∅
- A∩B=B∩A
- (A∩B)∩C=A∩(B∩C)
- (A∩B) ∪C=(A∪C) ∩(B∪C)

مثال: لتكن A={5,6,7,11,12,18}،B={3,5,10,13,18}

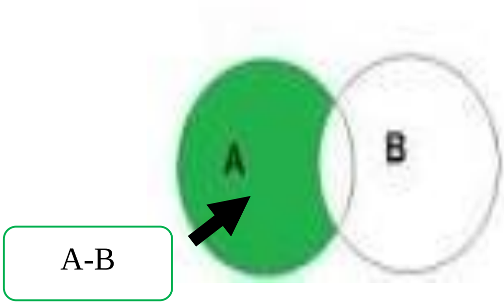
A∩B={5,18}

III. 3.الفرق:

عملية الفرق بين مجموعتين A وB يرمز لها بـ $(A - B)$ونتيجتها هي مجموعة جديدة تحوي العناصر التي تنتمي إلى A ولا تنتمي إلى B. أي أن عنصر x ينتمي إلى $(A - B)$إذا وفقط إذا x ينتمي إلى A وأيضاً x لا ينتمي إلى B

هناء

$$x \in (A - B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$$



و من خلا ل تعريف الفرق بين المجموعات، ينتج:

$$A\ \ B \neq B-A$$

$$A-\emptyset=A$$

$$A-A=\emptyset$$

$$A-B=A-(A\cap B)$$

$$B-A=B-(A\cap B)$$

® ملاحظة: إذا كانت (B) محتواة في (A) ، فإن (A-B) هو متتم ل (B)، و نكتب:

إذا كانت $B\subseteq A$ فإن $\overline{B} = A-B$

مثال: لتكن $A=\{4,7,9,11\}$، $B=\{5,2,9,10,11\}$

$$A-B=A-(A\cap B)= \{4,7,9,11\}-\{9,11\}=\{4,7\}$$

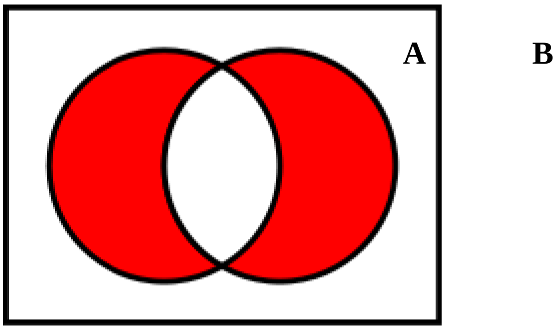
$$B-A=B-(A\cap B)= \{5,2,9,10,11\}-\{9,11\}=\{5,2,10\}$$

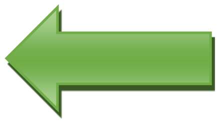
III. 4.الفرق التناظري أو المتماثل:

الفرق التماثلي $A\Delta B$)) ، هو المجموعة المجموعة التي تحتوي كل العناصر التي تنتمي إلى المجموعة A و لا تنتمي إلى المجموعة B، زائد كل العناصر التي تنتمي إلى المجموعة B و لا تنتمي إلى المجموعة A.

$x\in A\Delta B \Leftrightarrow x\in A$ أو $x\in B$

هناء





و من خلال تعريف الفرق التناظري، ينتج:

- $A\Delta\emptyset=\emptyset$
- $A\Delta A=\emptyset$
- $A\Delta B=B\Delta A$
- $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$
- $A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)$
- $A\Delta B=(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)$
- $(A\Delta B)\,\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$

مثال: لتكن:

A: مجموعة مضاعفات العدد 2 الأصغر من 10

B: مجموعة مضاعفات العدد 4 الأصغر من 16

أوجد $A\Delta B$؟

$A=\{0,2,4,6,8\}$

$B=\{0,4,8,12\}$

$A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)=\{0,2,4,6,8,12\}-\{0,4,8\}=\{2,6,12\}$

III. 5.الجداء الديكارتي :

إذا كانت لدينا مجموعتين(A) و (لB)، فإن الجداء الديكارتي بين المجموعتين هو مجموعة الثنائيات التي ينتمي مسقطها الأول إلى (A) و ينتمي مسقطها الثاني إلى (B) ، و يرمز له ب $A\otimes B$.

هناء

$$A\otimes B=\{Z=(x,y)/x\in A \text{ و } y\in B\}$$

®**ملاحظة**: إذا كانت $A=B$ فإن $A\otimes B=B\otimes A$

و من خلال تعريف الجداء الديكارتي، ينتج:

- $A\otimes B\neq B\otimes A$
- $A\otimes\emptyset=\emptyset$
- $B\otimes\emptyset=\emptyset$
- $A\otimes(B\cup C)=(A\otimes B)\cup(A\otimes C)$
- $A\otimes(B\cap C)=(A\otimes B)\cap(A\otimes C)$

III. **قوانين في نظرية المجموعات**:

1. $A\subset B \text{ et } B\subset C \Rightarrow A\subset C$
2. $A\cup B=B\cup A$
3. $A\cap B=B\cap A$
4. $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C=A\cup B\cup C$
5. $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C=A\cap B\cap C$
6. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
7. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
8. $A-B=A\cap\overline{B}$
9. $si\ (A\subset B)\ alors\ (\overline{B}\subset\overline{A})$
10. $A\cup\emptyset=A\ ,\ A\cap\emptyset=\emptyset$
11. $(\overline{A\cup B})=(\overline{A}\cap\overline{B})$

12. $\overline{A \cap B} = (\bar{A} \cup \bar{B})$

$A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$