



---

## نظرية الإحتمالات

---

أساس الاحتمالات هو التجارب العشوائية، و هي التجارب التي يمكن حصر نتائجها مسبقا و لكن لا يمكن العزم ماذا ستكون النتيجة. فمثلا إذا ألقينا قطعة زهرة النرد، فإننا نعلم مسبقا أن النتائج الممكنة لهذه التجربة قد تكون: 1 أو 2 أو 3 أو 4 أو 5 أو 6، و لكن لا يمكن العزم على أي رقم سيكون هو المحصل عليه، و نفس الشيء إذا ألقيا قطعة نقود مثلا

### مبادئ الاحتمالات:

من أهم مبادئ الاحتمالات:

1. التجربة العشوائية: و هي التجربة التي لا يمكن معرفة نتائجها مسبقا قبل إجرائها.
2. فضاء العينة ( $\Omega$ ): و هو مجموعة من النقاط التي تمثل جميع النتائج الممكنة للتجربة العشوائية، بحيث كل نتيجة تمثل بنقطة في فضاء العينة.

مثال:- رمي قطعة نقود مرة واحدة، إذن:  $\Omega = \{ P, F \}$  بحيث أن: P : PILE ، F

FACE:

3. الحدث (A): و هو نقطة أو عدة نقاط من فضاء العينة (نتيجة ممكن الحصول عليها)، و نميز ما بين عدة أنواع من الحوادث:

أ. الحدث الأكيد: يقع دائما عند القيام بالتجربة (أكيد حدوثه)

ب. الحدث المستحيل: و هو عكس الحدث الأكيد أي لا يمكن حدوثه أبدا عند القيام بالتجربة.

ت. الحدث العشوائي: وهو الحدث الممكن وقوعه عند القيام بالتجربة. فمثلا: سحب كريات حمراء من صندوق يحتوي على كريات حمراء و بيضاء، فممكّن الحصول على كريات حمراء و ممكن لا.

ث. **الحوادث المتنافية**: نقول عن حدثان (A) و (B) أنهما متنافيان إذا استحال وقوعهما معا في آن واحد أي:  $A \cap B = \phi$  و العكس صحيح في حالة الحوادث الغير متنافية.

ج. **الحوادث المستقلة**: نقول عن حدثان (A) و (B)، هما مستقلان، إذا كان وقوع أحدهما لا يؤثر في وقوع الثاني، و العكس صحيح بالنسبة للحوادث الغير مستقلة.

### حساب الإحتمالات:

$$P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الكلية الممكنة}}$$

- ملاحظة: يتم حساب عدد الحالات الملائمة و الكلية من خلال استعمال التحليلي التوافقي.

➤ خواص:

$$\forall A \in \Omega \quad n \leq N, 0 \leq P(A) \leq 1 \quad \checkmark$$

$$(A) = P(A), P(\Omega) = 1 \quad \checkmark \quad (n = N) : \text{الحدث الأكيد}$$

$$(A) = 0, (A) = 0 \quad \checkmark \quad (n = 0) : \text{الحدث المستحيل}$$

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1 \quad \checkmark \quad \text{بحيث أن } (\bar{A}) : \text{الحدث العكسي.}$$

$$P(\phi) = 0 \quad \checkmark$$

$$\sum p(A) = 1 \quad \checkmark$$

$$P(\Omega) = 1 \quad \checkmark$$

قوانين الإحتمالات:

أ. الجمع (الإتحاد  $\cup$ ): ليكن (A) و (B) حدثان، فإن:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad \checkmark \text{ إذا كان (A) و (B) متنافيان}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \checkmark \text{ إذا كان (A) و (B) غير متنافيان}$$

$$P(A \cap B)$$

ب. الضرب (التقاطع  $\cap$ ): ليكن (A) و (B) حدثان، فإن:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad \checkmark \text{ إذا كان (A) و (B) مستقلان}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A) \quad \checkmark \text{ إذا كان (A) و (B) غير مستقلان}$$

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A | B)$$

الإحتمالات الشرطية (conditional probability):

إذا كان الحدثان (A) و (B) غير مستقلان، أي وقوع احدهما يؤثر فقي وقوع الثاني، فإن احتمال وقوع

الحدث (A) علما أن الحدث (B) وقع يسمى احتمال شرطي:  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$  بحيث أن:

$$P(B) > 0$$

نظرية الإحتمالات الكلية و نظرية بايز (Bayes):

1. نظرية الإحتمالات الكلية:

$$\forall A_1, A_2, \dots, A_n \in \Omega$$

فإن احتمال أي حدث (B) من ( $\Omega$ ) هو :

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \setminus A_i) \cdot P(A_i)$$

$$= P(B \setminus A_1) \cdot P(A_1) + P(B \setminus A_2) \cdot P(A_2) + \dots + P(B \setminus A_n) \cdot P(A_n)$$

2. نظرية بايز (Bayes):

$$\forall A_k \in \Omega, (k = 1, 2, \dots, n)$$

$$P(B) = \frac{\sum_{i=1}^n P(B \setminus A_k) \cdot P(A_k)}{\sum_{i=1}^n P(B \setminus A_i) \cdot P(A_i)}$$