Chapitre I. Régime continu et Théorèmes fondamentaux

1.Définitions

Un composant électrique ne peut fonctionner que s'il est parcouru par un courant électrique. Il doit donc pouvoir laisser entrer le courant électrique et le laisser sortir.

- **Borne**

Il s'agit de la partie d'un composant électrique qui peut laisser entrer ou sortir le courant électrique(voir FigureI.1). Les bornes permettent aussi de réaliser des connexions, c'est à dire de relier un composant électrique à un autre composant électrique.

- **Dipôle**

C'est un composant électrique qui possède deux bornes (FigureI.1). Les lampes, les interrupteurs, les générateurs, les piles, les diodes, les LED, les résistances et les moteurs sont des dipôles.

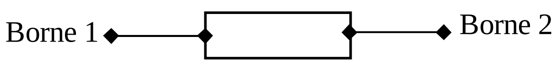


Figure I.1. Dipôle

Le dipôle est un composant électrique possédant deux bornes : une borne d'entrée de courant électrique ainsi qu'une borne de sortie. Un composant électrique ne peut pas posséder moins de deux bornes. Par contre il existe des composants électriques plus complexes que les dipôles disposant de trois, quatre bornes ou plus, on parle alors de tripôles, de quadripôles, etc. A titre d'exemple, les transistors, les transformateurs, ou les amplificateurs opérationnels ne sont pas des dipôles. Chaque dipôle possède une représentation simplifiée appelée symbole normalisé. On distingue en général deux sortes de dipôles :

Dipôle active : Les générateurs qui peuvent produire du courant électrique.

Dipôle passive : Les récepteurs qui reçoivent le courant électrique.

Le comportement d'un dipôle peut être décrit par une courbe caractéristique soit

$$I = f(U) \tag{I.1}$$

ou

$$U = f(I) \tag{I.2}$$

Un dipôle est passif si sa caractéristique passe par zéro. Le comportement d'un dipôle est caractérisé par deux grandeurs électriques duales : la tension et le courant. La tension aux bornes d'un dipôle représente la différence de potentiel u(t) entre les deux bornes du dipôle. La tension s'exprime en Volt (V).

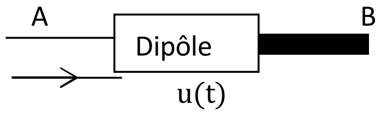


Figure I.2. Tension aux bornes d'un dipôle

$$u(t) = V_A - V_B \tag{I.3}$$

Le courant traversant un dipôle correspond au déplacement de charges électriques sous l'effet du champ électrique induit par la différence de potentiel aux bornes du dipôle. A tout instant le courant entrant par une borne d'un dipôle est égal au courant sortant par l'autre borne. L'intensité i(t) le débit des charges électriques qui traversent une section de conducteur pendant <u>une durée de temps dt</u> :

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \tag{I.4}$$

L'intensité s'exprime en Ampère (A). Le courant électrique est une grandeur orientée. Conventionnellement le sens positif correspond au sens de déplacement des charges positives.

Figure I.3. Le courant dans un dipôle

$$i(t) = i_A(t) = i_B(t) \tag{I.5}$$

Il existe deux possibilités pour le choix des sens conventionnels de la tension et du courant. Selon que u et i sont de même sens ou non nous avons :

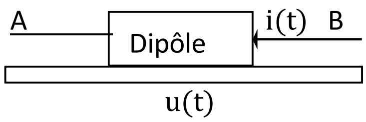


Figure I.4. Récepteur

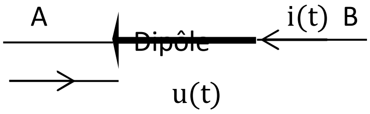


Figure I.5. Générateur

En régime stationnaire, indépendant du temps, il existe une relation entre l'intensité i traversant le dipôle et la tension u entre ses bornes. Cette relation peut se mettre sous la forme $i = i(u)$ ou $u = u(i)$.

Les graphes obtenus sont appelés caractéristiques statiques :

$i = i(u)$: caractéristique statique courant-tension du dipôle

$u = u(i)$: caractéristique statique tension-courant du dipôle

Un dipôle est passif si son intensité de court-circuit et sa tension en circuit ouvert sont nulles : ses caractéristiques statiques passent par l'origine. Il est dit actif dans le cas contraire. Un dipôle est linéaire si :

$$i\,(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha\, i(v_1) + \beta\, i(v_2) \qquad \text{(I.6)}$$

$$u\,(\alpha i_1 + \beta i_2) = \alpha\, u(i_1) + \beta\, u(i_2) \qquad \text{(I.7)}$$

- **Réseau**

On appelle réseau un ensemble de dipôles reliés entre eux par des fils conducteurs derésistance négligeable.

- **Nœud**

En électricité comme en électronique, un nœud est le point de connexion électrique entreplusieurs composants.

- **Branche**

On appelle branche d'un réseau un ensemble de dipôles reliés en série.

- **Maille**

On appelle maille d'un réseau un ensemble de branches formant un circuit fermé dans lequelchaque nœud n'est rencontré qu'une fois.

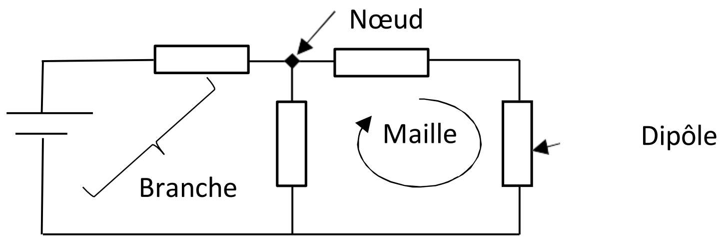
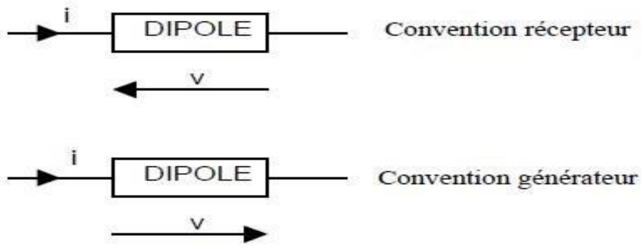


Figure I.6. Réseau électrique

2. Tensions et courants continus :

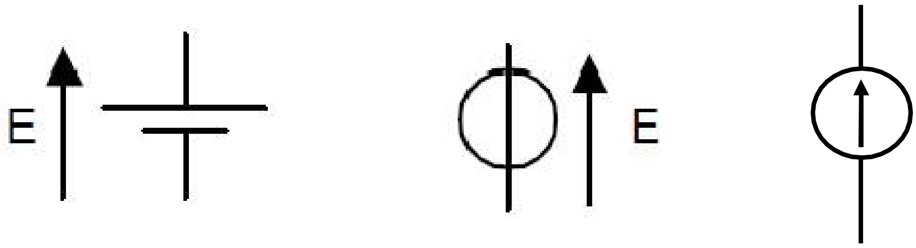
Selon la forme de la tension (ou du courant) délivrée par le générateur qui alimente un circuit, on dit que ce circuit fonctionne selon un certain régime. S'il délivre une tension constante, le circuit fonctionne en régime continu.

Il existe deux choix pour l'orientation du courant *i* et de la différence de potentiel *v*



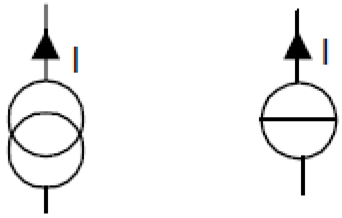
i. Générateur de tension idéal :

Un générateur de tension idéal délivre une différence de potentiel constante et indépendante du courant qu'il délivre.



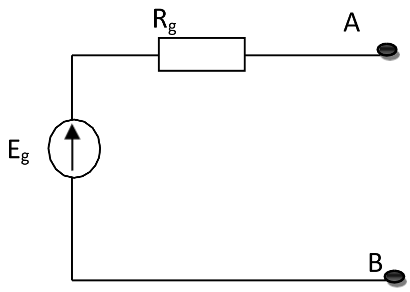
a. Générateur de courant idéal

Un générateur de courant idéal délivre un courant constant et indépendamment de ladifférence de potentiel entre ses bornes.



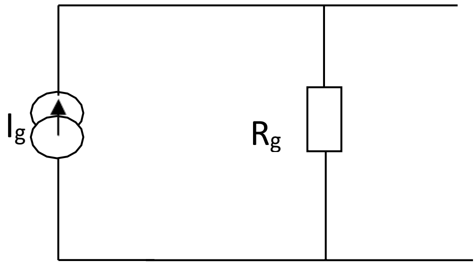
b. Générateur réel de tension

Un générateur réel de tension possède souvent une résistance interne R_g placée ensérie avec le générateur idéal de tension E_g.



c. générateur réel de courant

Un générateur réel de courant possède souvent une résistance interne R_g placée enparallèle avec le générateur idéal de courant I_g.



3. Relation tension-courant :

a) Cas d'une Résistance

La résistance est définie par la relation qui s'établit entre la tension à ses bornes et lecourant qui la traverse, appelée loi d'ohm :

$$U(t) = R\,i(t)$$

La puissance instantanée dissipée par une résistance est :

$$P(t) = u(t)\,i(t) \text{ en watt}$$

b) Cas d'un condensateur

Pour un condensateur, l'équation :

$$i(t) = c\,du(t)/dt$$

montre que si u(t) = cste on a bien : i(t) = 0.
Donc en régime continu, aucun courant ne traverser un condensateur, et le condensateur se comporte comme **circuit- ouvert.**

a) Cas d'une bobine

Si une inductance L parcourue par un courant d'intensité i, la tension aux bornes de l'inductance est :

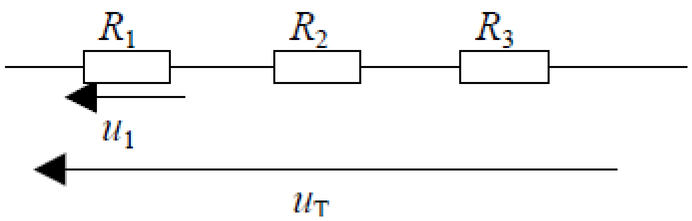
$$U(t) = L\,di(t)/dt$$

En régime continu, une bobine présentera toujours une différence de potentiel nulle à ses bornes, et la bobine se comporte comme **court-circuit.**

4. Théorèmes fondamentaux :

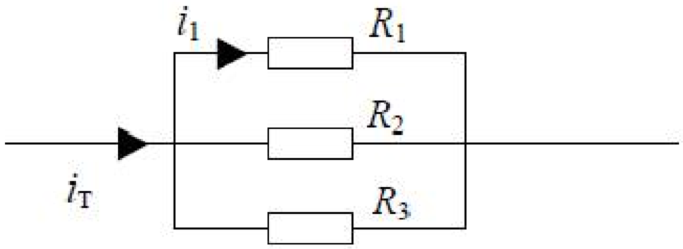
Diviseur de tension :

Lorsqu'on a une association série de résistances, on peut exprimer la tension aux bornes de l'une d'elles, connaissant la tension au bornes de l'ensemble.



$$u_1 = u_T \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} = u_T \cdot \frac{R_1}{\sum R_i}$$

Diviseur de courant :
Lorsqu'on a une association parallèle de résistances, on peut exprimer le courant dans l'une d'elles, connaissant le courant global.



$$\boxed{i_1 = i_T \cdot \frac{G_1}{G_1 + G_2 + G_3} = i_T \cdot \frac{G_1}{\sum_i G_i} = i_T \cdot \frac{\frac{1}{R_1}}{\sum_i \frac{1}{R_i}}}$$

Théorème de superposition :

Soit un réseau linéaire comportant *n* sources indépendantes de tension et de courant que nous pouvons noter : S_1, S_2, . . ., S_n, et une grandeur à calculer, comme par exemple I_K le courant dans la branche K. Appelons I_{K1}, I_{K2}, . . . , I_{Kn}, les valeurs de cette grandeur crée individuellement dans cette branche par chaque source agissant seule. Les autres sources étant passivées.

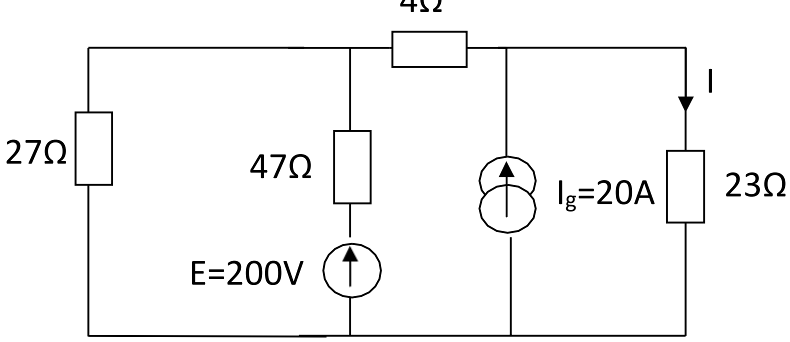
$$\boldsymbol{I_K = I_{K1} + I_{K2} + \cdots + I_{Kn}}$$

Remarque :

Passiver une source revient à la remplacer par sa résistance interne. Autrement dit, ceci revient à court-circuiter les sources de tension et à ouvrir les sources de courant.

Exemple :

Calculer le courant dans la résistance de 23Ω en utilisant le principe de superposition, dans le circuit suivant :

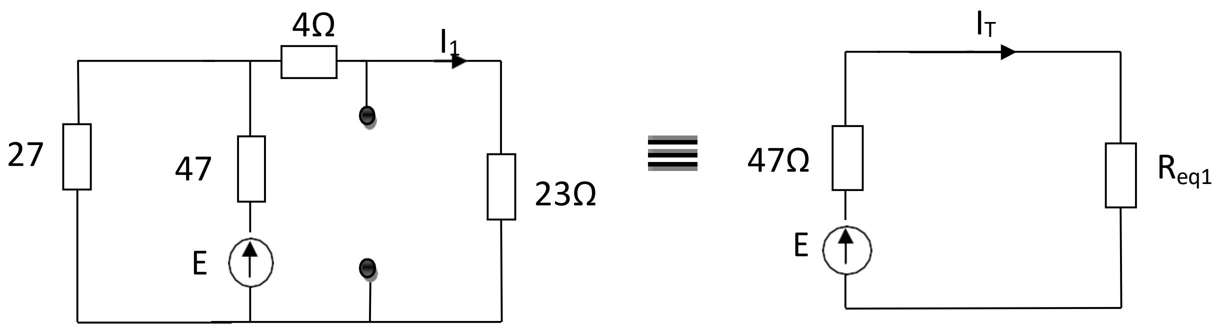


Solution :

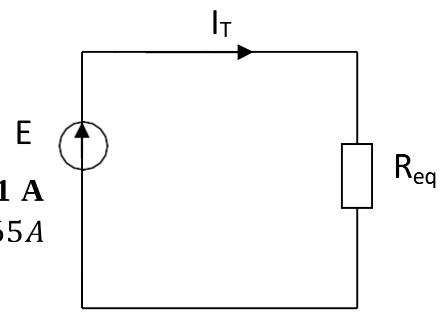
Etape 1 : En supposant que seule la source de 200V est active, la source de courant de 20A est passivée.

Etape 1 : E ≠ 0 et I_g = 0 :

Le schéma devient :



avec : R_{eq1} =**27 // (4+23) = 27.27 / (27+27) = 13.5Ω.**



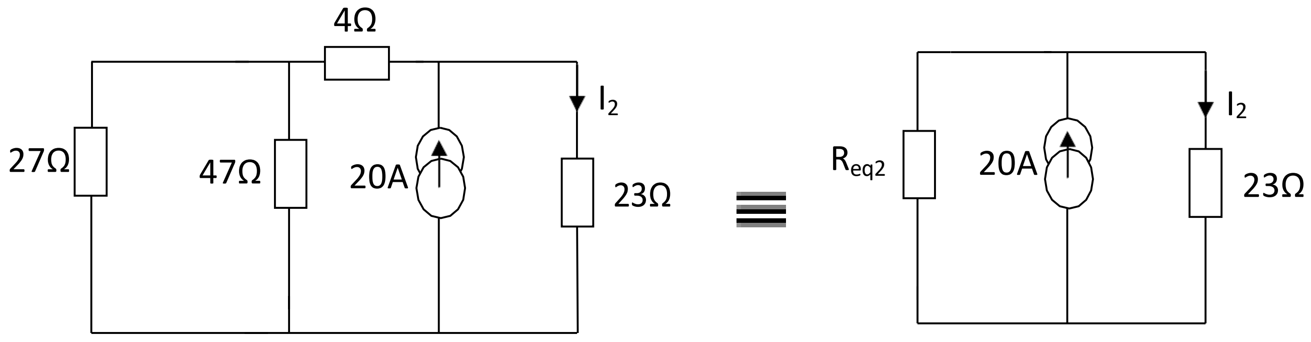
Ensuite on associe les deux résistances 47Ω et R_{eq1}

Et calculer le courant total, le schéma devient :

avec : $R_{eq} = 47 + R_{eq1} = 60.5\Omega$, donc : $I_T = 200/60.5 =$ **3.31 A**

En utilisant le diviseur de courant on a: $I_1 = 27 \text{x}\ 3.31/54 = 1.65A$

Etape2 : **E = 0 et I_g ≠ 0 :**



$R_{eq2} = 4 + 27.47/74 = \mathbf{21.15\ \Omega}$

En utilisant le diviseur de courant:

$I_2 = 21.15 \,.\, 20/(21.15 + 23) = \mathbf{9.58A}$

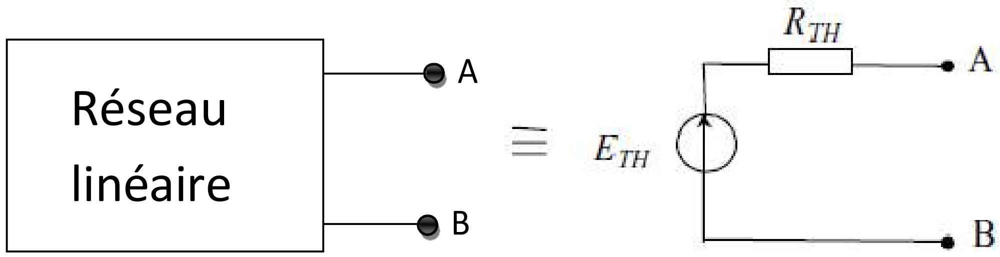
Etape3: Le courant I dans la résistance 23Ω est la somme algébrique des courants I_1 et I_2 :

$$\boxed{I = I_1 + I_2 = 11.23A}$$

Théorème de Thévenin :

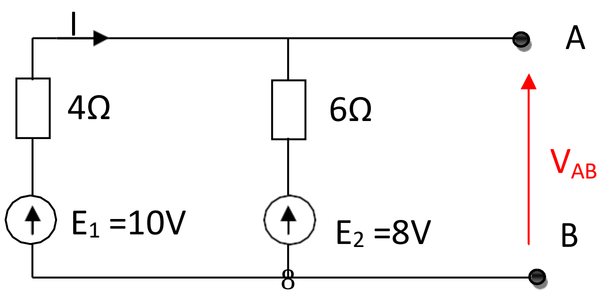
Considérons un circuit électrique linéaire placé entre deux points A et B. le circuit précédent peut être remplacé par un générateur équivalent de Thévenin de force électromotrice E_{TH} et de résistance interne R_{TH}.

- La valeur E_{TH} est égale à la tension mesurée entre A et B à vide, c'est-à-dire lorsque le dipôle n'est pas connecté à d'autres éléments externes (charge déconnectée).
- La résistance interne R_{TH} correspond à la valeur de la résistance vue entre A et B lorsque les sources indépendantes sont passivées.



Exemple :

Dans le circuit suivant déterminer les éléments du générateur équivalent de Thévenin.



Solution :
Etape 1 : calcul de E_{th} à vide.

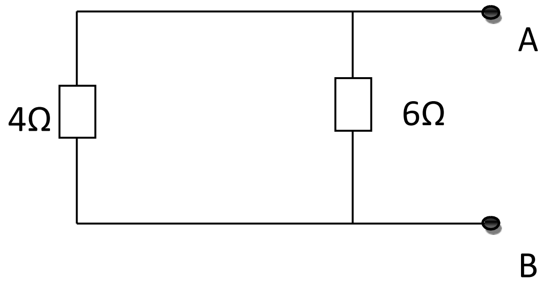
$$E_{th} = V_{AB} = 6I + 8$$

On doit calculer le courant I, d'après la loi de Kirchoff :

Maille: $E_1 - 4I - 6I - E_2 = 0 \Rightarrow I = (E1 - E2)/10 = 2/10 = 0.2A$

donc : $\boxed{E_{th} = 9.2V}$

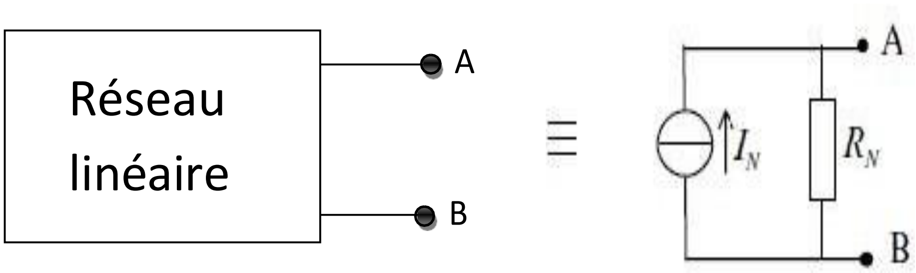
Etape 2 calcul de la résistance R_{th} lorsque tous les générateurs sont passivés, on obtient :



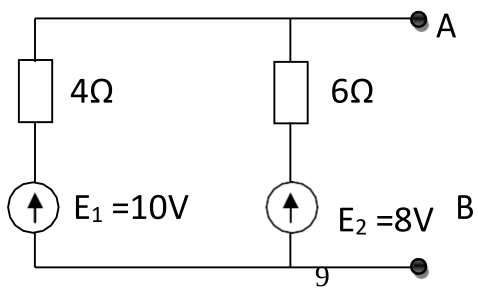
$$R_{th} = 4\Omega // 6\Omega = \frac{4.6}{4+6} = 2.4\Omega$$

Théorème de Norton :
Tout circuit électrique linéaire peut être remplacé par un dipôle équivalent vis-à-vis des points A et B, c'est-à-dire vu d'un élément placé entre A et B par un générateur de Norton équivalent de courant $\boldsymbol{I_N}$ et de résistance interne $\boldsymbol{R_N}$.

- La valeur $\boldsymbol{I_N}$ du générateur de courant équivalent est égale à l'intensité mesurée entre A et B dans un court-circuit (charge court-circuitée).
- La résistance interne $\boldsymbol{R_N}$ correspond à la valeur de la résistance vue entre A et B lorsque les sources indépendantes sont passivées.

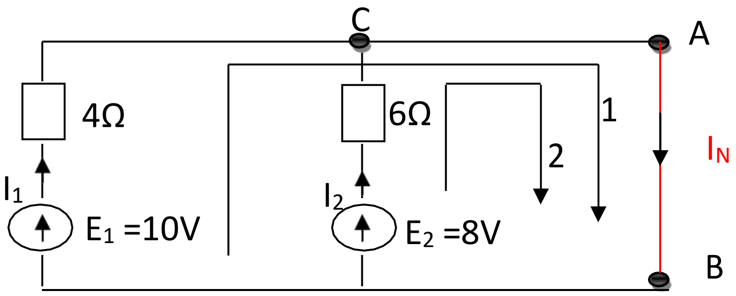


Exemple :
Dans le circuit suivant déterminer les éléments du générateur équivalent de Norton.



Solution :

Etape1 : calcul du courant I_N de court-circuit. Donc il faut court-circuiter la branche AB.



D'après les lois de Kirchoff :

Maille 1: $E_1 - 4I_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_1 = 10/4 = 2.5A$

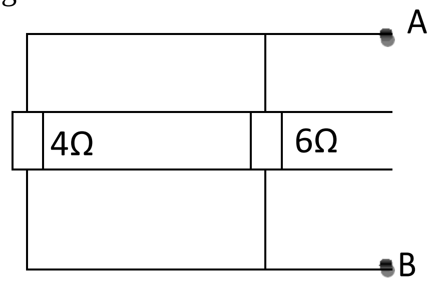
Maille 2: $E_2 - 6I_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad I_2 = 8/6 = 1.33A$

Noeud C: $I_1 + I_2 = I_N \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{I_N = 3.83A}}$

Etape 2 : pour calculer $\mathbf{R_N}$ il faut passiver les générateurs de tension et de courant :

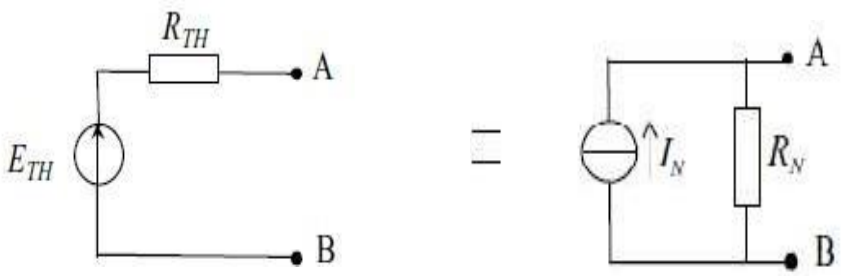
$$R_N = 4\Omega // 6\Omega = \frac{4.6}{4+6} = 2.4\Omega$$

$$\boxed{\mathbf{R_N = 2.4\ \Omega}}$$



Equivalence Thévenin-Norton

Un générateur de tension de thévenin, de force électromotrice $\boldsymbol{E_{th}}$ et de résistance interne $\boldsymbol{R_{th}}$ est équivalent à un générateur de Norton, de courant $\boldsymbol{I_N = E_{th} / R_{th}}$ et de même résistance interne $\boldsymbol{R_N}$.



Théorème de Millman :

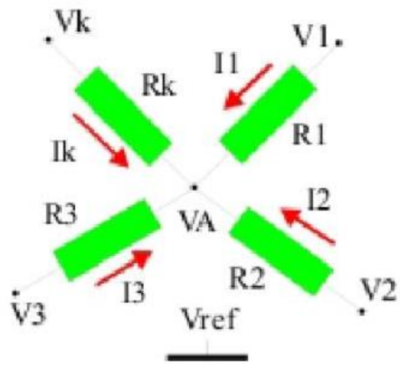
Le théorème de Millman permet la détermination directe de potentiel de nœud d'un réseau de résistance par rapport à un potentiel de référence, à partir de la loi des nœuds. On considère un nœud A auquel aboutissent K branches, les potentiels V_i des extrémités des branches sont tous définis par rapport à un même potentiel de référence V_{ref} ; R_i la résistance de la branche i ; G_i sa Conductance.

La loi des nœuds s'écrit :

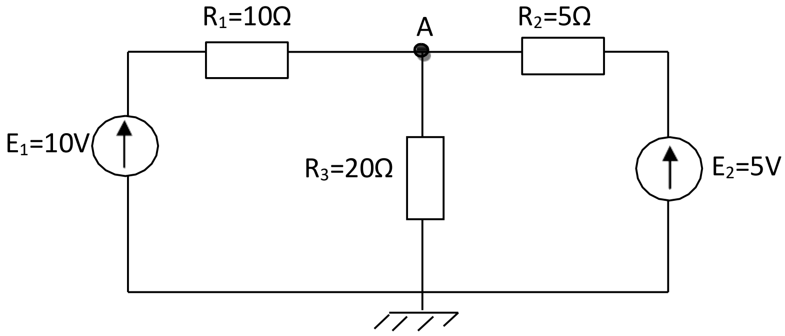
$$\sum I_e = \sum I_s$$

$$\Rightarrow \frac{V_1 - V_A}{R_1} + \frac{V_2 - V_A}{R_2} + \cdots + \frac{V_k - V_A}{R_k} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{V_A = \frac{\sum_{i=1}^{k} V_i G_i}{\sum_{i=1}^{k} G_i}}$$



Exemple :
Dans le montage suivant, déterminer le potentiel au point A par utilisation du théorème de Millman :



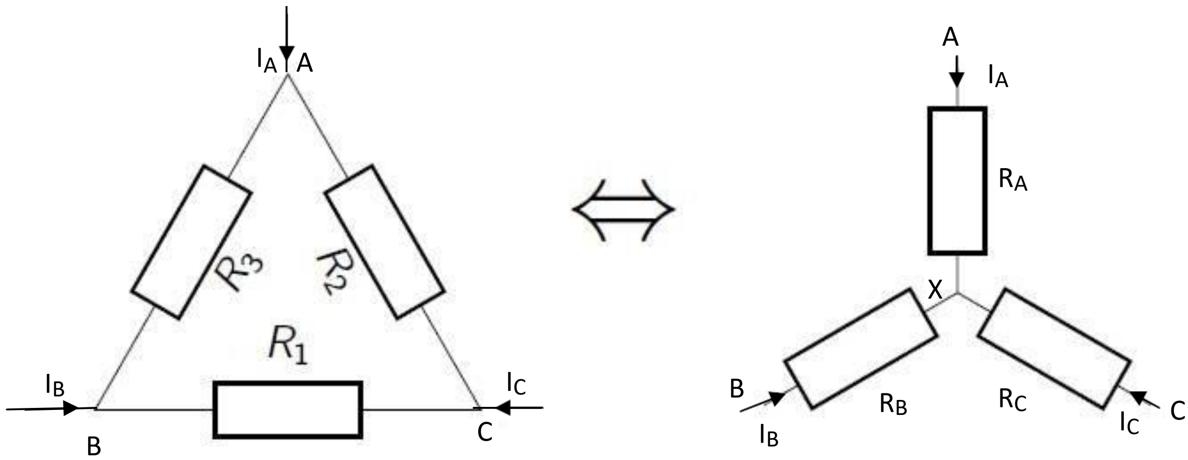
Solution :
Appliquons le théorème de Millman au point A:

$$V_A = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \frac{0}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

AN :

$$\boxed{V_A = \frac{\frac{10}{10} + \frac{5}{5}}{\frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20}} = 5.7V}$$

Théorème de Kennelly:
Ce théorème permet de transformer le schéma d'un réseau en triangle en un schéma étoile, ou « **Π** » en un schéma en « **T** ». On considère l'association des trois résistances R_A, R_B, R_c dite en étoile, soient I_A, I_B, I_c les courants entrants respectivement aux points A, B, C et V_A, V_B, V_c les tensions en ces mêmes points :



On applique le théorème de Millman au point X pour exprimer V_X :

$$V_K = \frac{\frac{V_A}{R_A} + \frac{V_B}{R_B} + \frac{V_C}{R_C}}{\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C}}$$

Calculons les courants I_A, I_B, I_C :

$$I_A = \frac{V_A - V_K}{R_A} = \frac{1}{R_A R_B + R_C R_B + R_A R_C}\left[(R_B + R_C)V_A - R_C V_B - R_B V_c\right] \quad (1)$$

$$I_B = \frac{V_B - V_K}{R_B} = \frac{1}{R_A R_B + R_C R_B + R_A R_C}\left[-R_C V_A + (R_A + R_C)V_B - R_A V_c\right] \quad (2)$$

$$I_C = \frac{V_C - V_K}{R_C} = \frac{1}{R_A R_B + R_C R_B + R_A R_C}\left[-R_B V_A - R_A V_B + (R_B + R_A)V_c\right] \quad (3)$$

Pour l'association des résistances R_1, R_2, R_3 en triangle on a :
Le courant I_A est la somme des courants dans R_3 et dans R_2 :

$$I_A = \frac{V_A - V_B}{R_3} + \frac{V_A - V_C}{R_2} = \left[\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)V_A - \frac{1}{R_3}V_B - \frac{1}{R_2}V_c\right] \quad (4)$$

$$I_B = \frac{V_B - V_A}{R_3} + \frac{V_B - V_C}{R_1} = \left[-\frac{1}{R_3}V_A + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}\right)V_B - \frac{1}{R_1}V_c\right] \quad (5)$$

$$I_C = \frac{V_C - V_A}{R_2} + \frac{V_C - V_B}{R_1} = \left[-\frac{1}{R_2}V_A - \frac{1}{R_1}V_B + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)V_c\right] \quad (6)$$

Les deux schémas doivent être équivalents quelles que soient V_A, V_B, V_c, donc :
de (2) et (5) on a :

$$\boxed{R_1 = \frac{R_A R_B + R_C R_B + R_A R_C}{R_A}} \qquad \boxed{R_2 = \frac{R_A R_B + R_C R_B + R_A R_C}{R_B}}$$

de (1) et (4) on a :

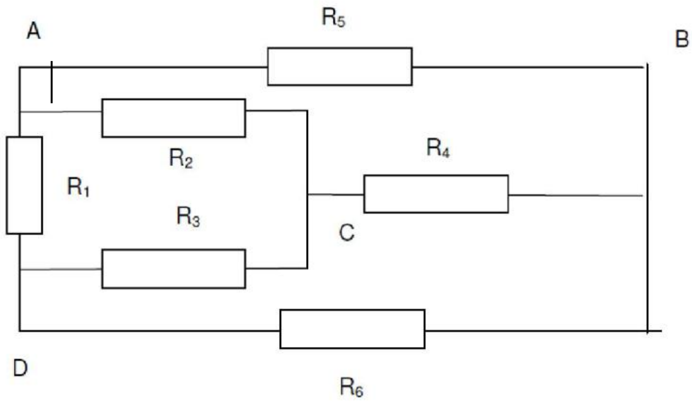
$$\boxed{R_3 = \frac{R_A R_B + R_C R_B + R_A R_C}{R_C}}$$

On peut également exprimer les résistances R_A, R_B, R_c en fonction des résistances R_1, R_2, R_3. On obtient alors les relations :

$$\boxed{R_A = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}} \qquad \boxed{R_B = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}}$$

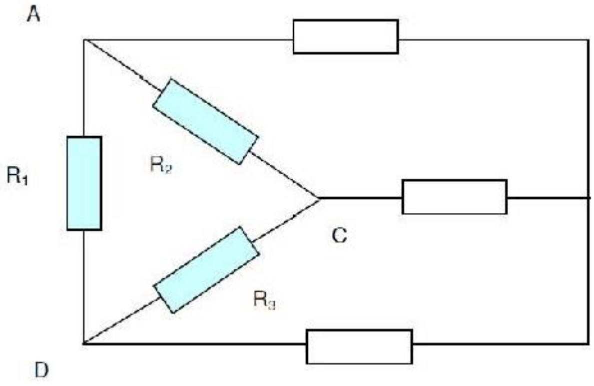
$$\boxed{R_C = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}}$$

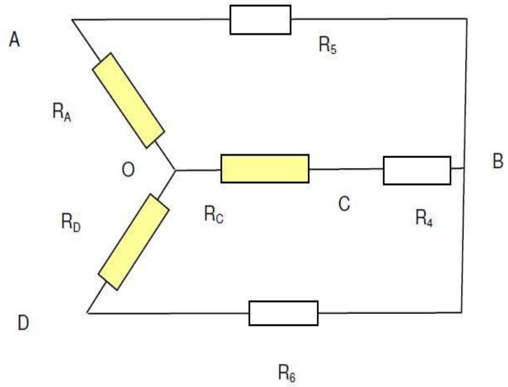
Exemple :
Par application du théorème de Kennelly, déterminer R_{AB} :



$R_1 = 2\Omega$ $R_2 = 3\Omega$ $R_3 = 5\Omega$ $R_4 = 1\Omega$ $R_5 = 5\Omega$ $R_6 = 6\Omega$

Solution :





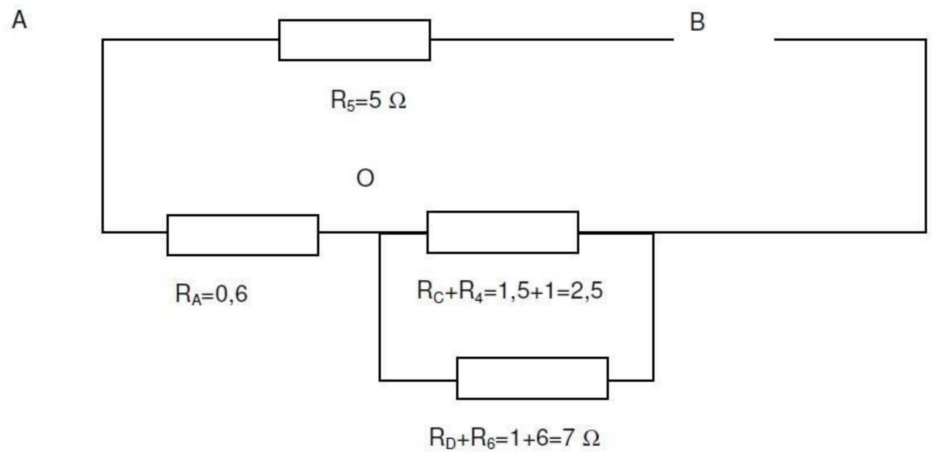
Aux points A, C et D, on effectue une transformation étoile triangle :

$$R_A = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = 0,6\Omega \qquad R_C = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 1,5\Omega$$

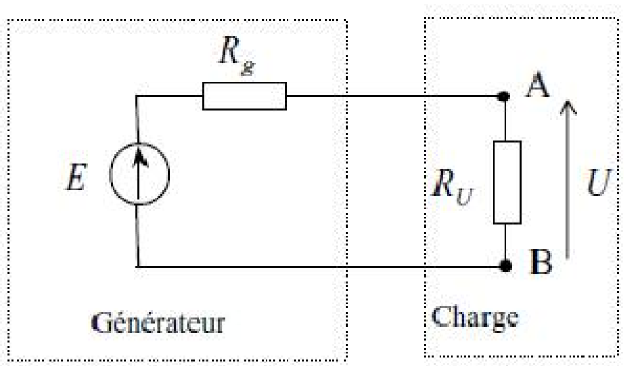
$$R_D = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 1\Omega$$

Les valeurs des résistances sont indiquées sur le schéma.

$$R_{AB} = \frac{5\left(0,6 + \frac{2,5\times 7}{2,5+7}\right)}{5 + \left(0,6 + \frac{2,5\times 7}{2,5+7}\right)} = 1,64\ \Omega$$



Théorème du transfert maximal de puissance:
Dans un réseau électrique, le générateur est censé fournir l'énergie nécessaire à un récepteur qui l'accepte. Considérons le réseau élémentaire constitué d'un générateurréel de tension et d'une résistance de charge R_U.



La puissance fournie par le générateur est égale à :

$$P_f = E.I = Rg.I_2 + R_U.I_2 = Rg + R_U$$

La puissance absorbée par la charge :

$$\mathbf{P_u = R_u .I^2}$$

Comment faut-il choisir R_U vis-à-vis de R_g pour que la puissance transmise soitmaximale ?
Nous cherchons la valeur optimale de la résistance d'utilisation $R_{U(opt)}$. Pour cela, calculons la puissance P_U en fonction de R_g :

$$P_U = R_U.I^2 = R_U\left(\frac{E}{R_g + R_U}\right)^2$$

Étudions la loi de variation de la puissance en calculant sa dérivée :

$$\frac{\mathrm{d}P_U}{\mathrm{d}R_U} = \frac{E^2\left(R_g + R_U\right)^2 - E^2.R_U\left(2R_g + 2R_U\right)^2}{\left(R_g + R_U\right)^4} = \frac{E^2\left(R_g + R_U\right) \times \left(R_g + R_U - 2R_U\right)}{\left(R_g + R_U\right)^4}$$

La puissance transmise est maximale (en mathématiques, nous disons que la courbepasse par un extremum) lorsque cette dérivée s'annule, c'est à dire pour $R_U = R_g$.
Elle vaut alors :

$$\boxed{P_{U(\max)} = \frac{E^2.R_U}{\left(R_g + R_U\right)^2} = \frac{E^2}{4R_g^2}}$$