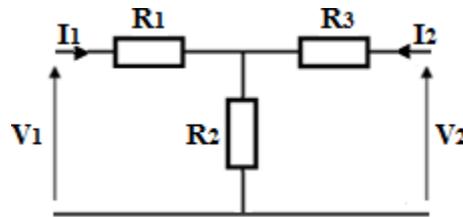


**TD2 : Quadripôles passifs**

**Exercice 1:**

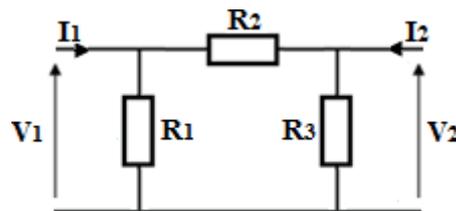
Soit le quadripôle en T suivant.  $R_1 = 5 \Omega$ ,  $R_2 = 15 \Omega$ ,  $R_3 = 10 \Omega$ .



1. Déterminer les paramètres de la matrice impédance  $[Z]$  de ce quadripôle en utilisant :
  - ✓ Les définitions de ces paramètres.
  - ✓ La loi des mailles.
2. Connaissant la matrice  $[Z]$ , déterminer la matrice  $[Y]$ .

**Exercice 2:**

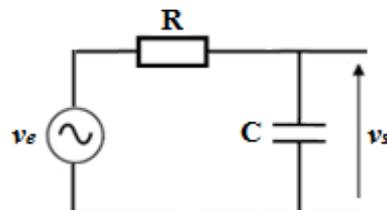
Soit le quadripôle en  $\pi$  suivant.



1. Déterminer les paramètres de la matrice admittance  $[Y]$ .
2. Déterminer les paramètres de la matrice hybride  $[h]$ .
3. Déterminer les expressions du gain en courant et de la résistance d'entrée lorsque le quadripôle est fermé sur une résistance  $R_L$ .
4. Déterminer l'expression de la résistance de sortie lorsque le quadripôle est alimenté par un générateur de résistance interne  $R_g$ .

**Exercice 3:**

Soit le filtre suivant :



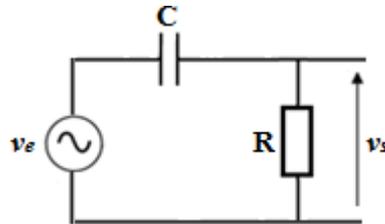
1. Donner l'expression de la fonction de transfert  $H(j\omega) = v_s/v_e$ .
2. Mettre  $H(j\omega)$  sous la forme  $\frac{H_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$ . Donner la valeur de  $H_0$  et l'expression de  $\omega_0$ .

$\omega_0$

3. Quel est le type et l'ordre de ce filtre?
4. Exprimer la fréquence de coupure  $f_c$  en fonction de  $R$  et  $C$ .
5. Tracer les courbes de gain et de phase dans le plan de Bode.

**Exercice 4:**

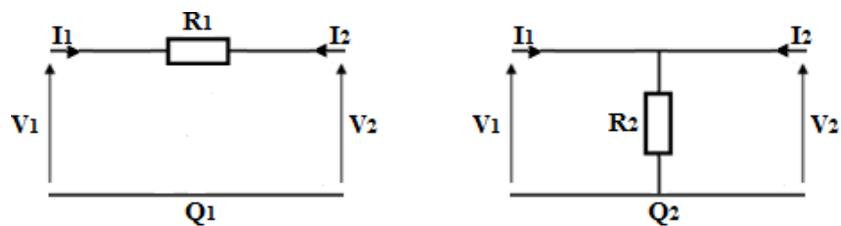
Soit le filtre suivant :



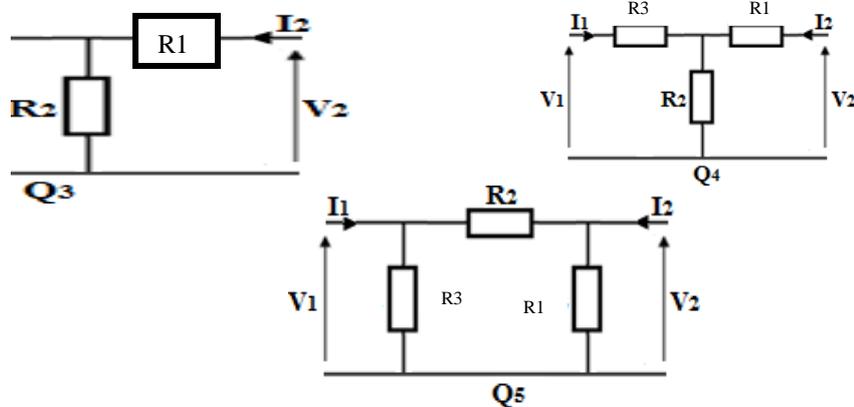
1. Donner l'expression de la fonction de transfert  $H(j\omega) = v_s/v_e$ .
2. Mettre  $H(j\omega)$  sous la forme  $\frac{H_0 j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$ 
  - Donner la valeur de  $H_0$  et l'expression de  $\omega_0$ .
3. Quel est le type et l'ordre de ce filtre?
4. Exprimer la fréquence de coupure  $f_c$  en fonction de  $R$  et  $C$ .
5. Tracer les courbes de gain et de phase dans le plan de Bode.

**Exercice 5:**

Soient les quadripôles  $Q_1$  et  $Q_2$  suivants :

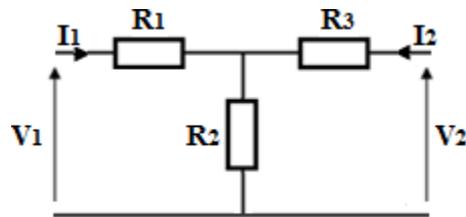


1. Déterminer la matrice de transfert  $[T]$  de chaque quadripôle
2. En déduire les matrices de transferts des quadripôles  $Q_3$ ,  $Q_4$  et  $Q_5$ :



## Corrigé TD2

### Exercice 1:



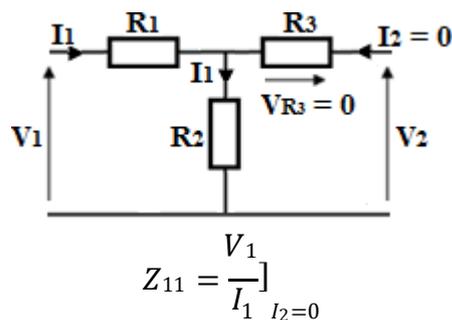
$$R_1 = 5 \Omega, R_2 = 15 \Omega, R_3 = 10 \Omega.$$

1. Détermination des paramètres de la matrice impédance  $[Z]$  du quadripôle en utilisant leurs définitions :

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{cases}$$

- Détermination de  $Z_{11}$  et  $Z_{21}$  :

$I_2 = 0$  : Sortie en circuit ouvert.



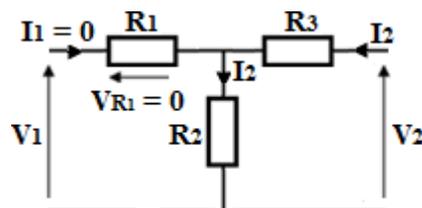
$$V_1 - R_1I_1 - R_2I_1 = 0 \rightarrow V_1 = (R_1 + R_2)I_1 \rightarrow Z_{11} = R_1 + R_2$$

$$Z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0}$$

$$V_2 - R_2I_1 = 0 \rightarrow V_2 = R_2I_1 \rightarrow Z_{21} = R_2$$

- Détermination de  $Z_{12}$  et  $Z_{22}$  :

-  $I_1 = 0$  : Entrée en circuit ouvert.



$$Z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0}$$

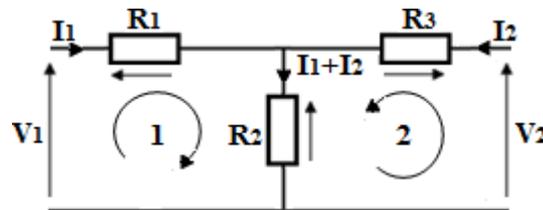
$$V_1 - R_2 I_2 = 0 \rightarrow V_1 = R_2 I_2 \rightarrow Z_{11} = R_2$$

$$Z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0}$$

$$V_2 - R_3 I_2 - R_2 I_2 = 0 \rightarrow V_2 = (R_3 + R_2) I_2 \rightarrow Z_{22} = R_3 + R_2$$

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \rightarrow [Z] = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 & R_2 \\ R_2 & R_3 + R_2 \end{bmatrix}$$

✓ Paramètres de la matrice impédance  $[Z]$  du quadripôle en utilisant la loi des mailles :



$$\begin{cases} V_1 - R_1 I_1 - R_2 (I_1 + I_2) = 0 & \text{(maille 1)} \\ V_2 - R_3 I_2 - R_2 (I_1 + I_2) = 0 & \text{(maille 2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_1 = R_1 I_1 + R_2 (I_1 + I_2) \\ V_2 = R_3 I_2 + R_2 (I_1 + I_2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_1 = (R_1 + R_2) I_1 + R_2 I_2 \\ V_2 = R_2 I_1 + (R_3 + R_2) I_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ V_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \end{cases} \text{ et } [Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \rightarrow [Z] = \begin{bmatrix} R_1 + R_2 & R_2 \\ R_2 & R_3 + R_2 \end{bmatrix}$$

A.N :

$$R_1 = 5 \Omega, R_2 = 15 \Omega, R_3 = 10 \Omega.$$

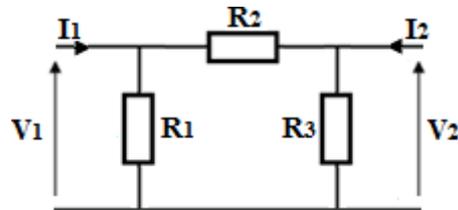
$$[Z] = \begin{bmatrix} 20 & 15 \\ 15 & 25 \end{bmatrix}$$

2. Matrice  $[Y]$ , connaissant la matrice  $[Z]$  :

$$[Y] = \begin{bmatrix} \frac{Z_{22}}{\Delta Z} & \frac{-Z_{12}}{\Delta Z} \\ \frac{-Z_{21}}{\Delta Z} & \frac{Z_{11}}{\Delta Z} \end{bmatrix}, \Delta Z = Z_{11} Z_{22} - Z_{21} Z_{12} \rightarrow [Y] = \begin{bmatrix} \frac{25}{275} & \frac{-15}{275} \\ \frac{-15}{275} & \frac{20}{275} \end{bmatrix}$$

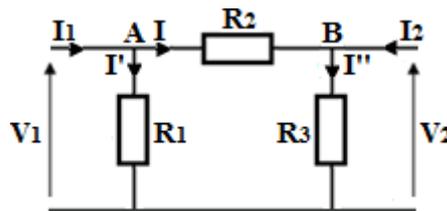
$$[Y] = \begin{bmatrix} \frac{1}{55} & -\frac{3}{55} \\ -\frac{3}{55} & \frac{4}{55} \end{bmatrix}$$

**Exercice 2:**



1. Paramètres de la matrice admittance  $[Y]$  :

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \\ I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} I_1 = I + I' & (\text{nœud A}) \\ I + I_2 = I'' & (\text{nœud B}) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} I_1 = I + I' \\ I_2 = I'' - I \end{cases}$$

$$I = \frac{V_1 - V_2}{R_2}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{V_1 - V_2}{R_2} + \frac{V_1}{R_1} & I_1 &= \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)V_1 - \frac{1}{R_2}V_2 \\ \begin{cases} I_2 &= \frac{V_2}{R_3} - \frac{V_1 - V_2}{R_2} \end{cases} & \rightarrow & I_2 &= -\frac{1}{R_2}V_1 + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2}\right)V_2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \\ I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \end{cases} \text{ et } [Y] = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \rightarrow [Y] = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2} \end{bmatrix}$$

2. Paramètres de la matrice hybride  $[h]$  :

$$\begin{cases} V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \\ I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \end{cases}$$



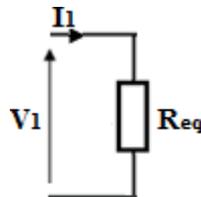
$$V_2 = -R_L I_2 \rightarrow I_2 = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} I_1 - \frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_3(R_1 + R_2)} R_L I_2$$

$$I_2 \left(1 + R_L \frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_3(R_1 + R_2)}\right) = -\frac{R_1}{R_1 + R_2} I_1$$

$$A_I = \frac{-R_1 R_3}{R_3(R_1 + R_2) + R_L(R_1 + R_2 + R_3)}$$

✓ Résistance d'entrée

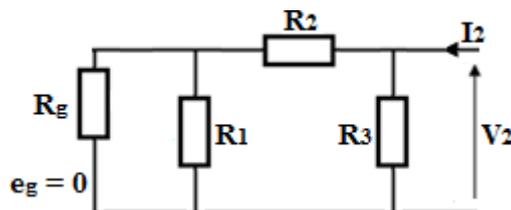
$$R_e = \frac{V_1}{I_1}$$



$$V_1 = R_{eq} I_1 \rightarrow V_1 = [(R_3 // R_L + R_2) // R_1] I_1 \rightarrow R_e = (R_3 // R_L + R_2) // R_1$$

4. Résistance de sortie lorsque le quadripôle est alimenté par un générateur de résistance interne  $R_g$ .

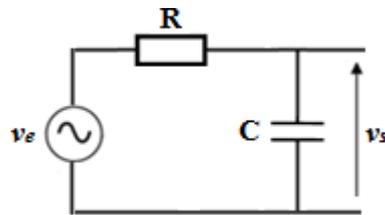
$$R_s = \left. \frac{v_2}{i_2} \right|_{e_g=0, R_L \text{ déconnectée}}$$



$$V_2 = [(R_g // R_1 + R_2) // R_3] I_2 \rightarrow R_s = (R_g // R_1 + R_2) // R_3$$

**Exercice 3:**

1. Expression de la fonction de transfert  $H(j\omega)$ :



En appliquant le diviseur de tension, on obtient :

$$v_s = \frac{Z_C}{R + Z_C} v_e \rightarrow v_s = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} v_e$$

$$H = \frac{v_s}{v_e} \rightarrow T = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} \rightarrow T = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

1.  $H(j\omega)$  sous la forme :  $\frac{T_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$ . Valeur de  $H_0$  et expression de  $\omega_0$ .

$$H = \frac{1}{1 + jRC\omega} \rightarrow H = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

avec :

$$H_0 = 1 \text{ et } \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

2. Type et ordre du filtre : Filtre passe-bas du premier ordre.  
 3. Fréquence de coupure  $f_c$  en fonction de  $R$  et  $C$  :

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} = 2\pi f_c \rightarrow f_c = \frac{1}{2\pi RC}$$

4. Courbe de gain:

$$H = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \rightarrow |H| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

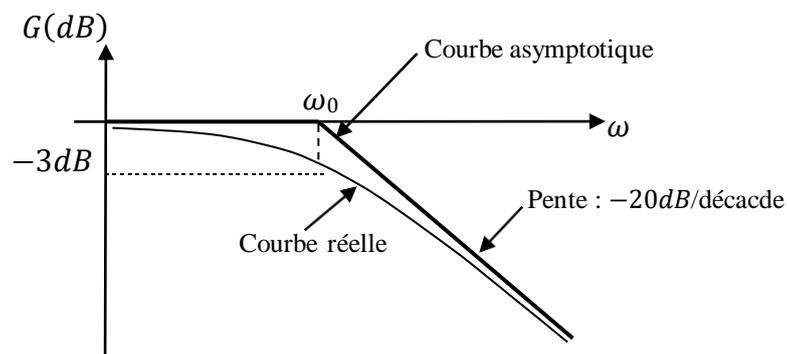
$$G(dB) = 20\log_{10}|T| \rightarrow G(dB) = -20\log_{10}\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$G(dB) = -10\log_{10}\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)$$

Pour  $\omega \ll \omega_0$  :  $G(dB) \rightarrow 0$

Pour  $\omega \gg \omega_0$  :  $G(dB) \rightarrow -20\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$

Pour  $\omega = \omega_0$  :  $G(dB) = -20\log_{10}\sqrt{2} = -3dB$



Courbe de phase :

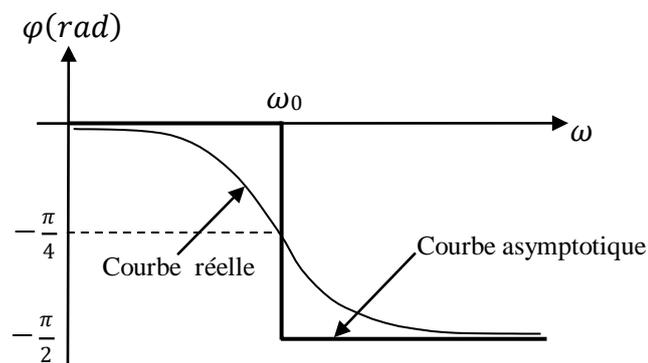
$$H = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} \rightarrow \varphi(\omega) = \arg(H) = \arg(1) - \arg\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

$$\varphi(\omega) = 0 - \arctg\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \rightarrow \varphi(\omega) = -\arctg\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

Pour  $\omega \ll \omega_0$  :  $\varphi(\omega) \rightarrow 0$

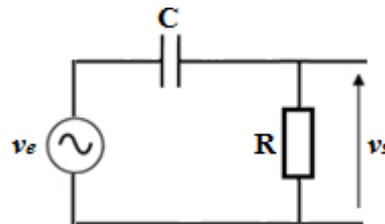
Pour  $\omega \gg \omega_0$  :  $\varphi(\omega) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$

Pour  $\omega = \omega_0$  :  $\varphi(\omega) \rightarrow -\frac{\pi}{4}$



#### Exercice 4:

1. Expression de la fonction de transfert  $H(j\omega)$  :



En appliquant le diviseur de tension, on obtient :

$$v_s = \frac{R}{R + Z_C} v_e \rightarrow v_s = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} v_e$$

$$H = \frac{v_s}{v_e} \rightarrow H = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} \rightarrow H = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

2.  $T(j\omega)$  sous la forme :  $\frac{H_0 j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$  et expression de  $\omega_0$ .

$$H = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} \rightarrow H = \frac{H_0 j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

Avec:

$$H_0 = 1 \text{ et } \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

3. Type et ordre du filtre : Filtre passe-haut du premier ordre.

4. Fréquence de coupure  $f_c$  en fonction de R et C :

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} = 2\pi f_c \rightarrow f_c = \frac{1}{2\pi RC}$$

5. Courbe de gain:

$$|H| = \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

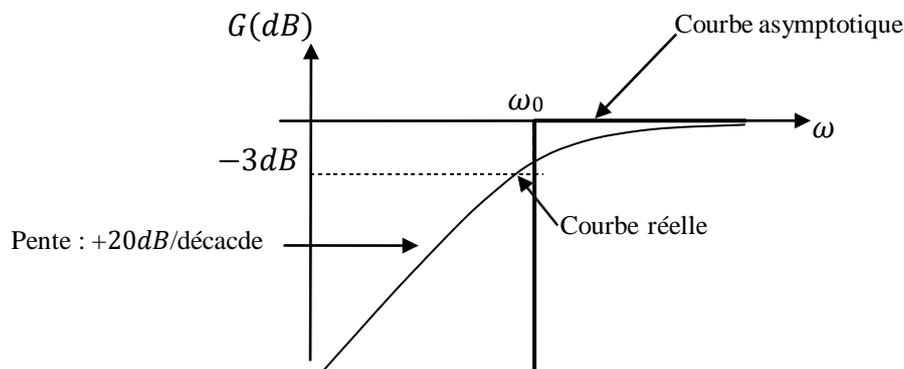
$$G(dB) = 20 \log_{10} |H| \rightarrow G(dB) = 20 \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - 20 \log_{10} \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$G(dB) = 20 \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - 10 \log_{10} \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)$$

Pour  $\omega \ll \omega_0$  :  $G(dB) \rightarrow 20 \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$

Pour  $\omega \gg \omega_0$  :  $G(dB) \rightarrow 20 \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - 10 \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = 0$

Pour  $\omega = \omega_0$  :  $G(dB) = -20 \log_{10} \sqrt{2} = -3dB$



Courbe de phase :

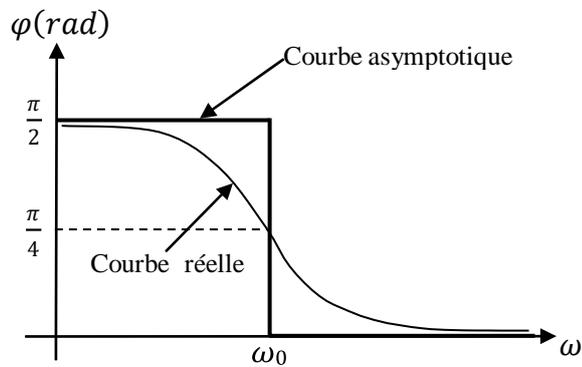
$$H = \frac{\omega}{\omega_0 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \rightarrow \varphi(\omega) = \arg(H) = \arg\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - \arg\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

$$\varphi(\omega) = \arg(H) = \frac{\pi}{2} - \arctg\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

Pour  $\omega \ll \omega_0$  :  $\varphi(\omega) \rightarrow \frac{\pi}{2}$

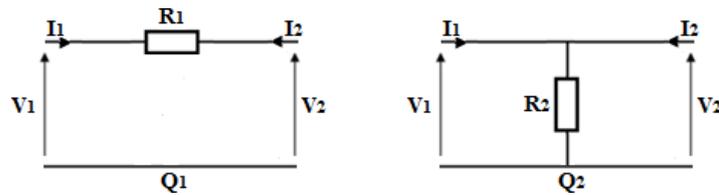
Pour  $\omega \gg \omega_0$  :  $\varphi(\omega) \rightarrow 0$

Pour  $\omega = \omega_0$  :  $\varphi(\omega) \rightarrow \frac{\pi}{4}$



**Exercice 5:**

1. Matrice de transfert  $[T]$  de quadripôles  $Q_1$  et  $Q_2$ .



(On peut écrire soit les grandeurs d'entrée en fonction des grandeurs de sorties ; soit le contraire c.-à-d les grandeurs de sorties en fonction des grandeurs d'entrée)

On a donc:  $V_2 = T^{-1}_{11}V_1 - T^{-1}_{12}I_1$

$$I_2 = T^{-1}_{21}V_1 - T^{-1}_{22}I_1 \quad [T^{-1}] = \begin{bmatrix} T^{-1}_{11} & T^{-1}_{12} \\ T^{-1}_{21} & T^{-1}_{22} \end{bmatrix}$$

Ou bien

$$\begin{cases} V_1 = T_{11}V_2 - T_{12}I_2 \\ I_1 = T_{21}V_2 - T_{22}I_2 \end{cases}, \quad [T] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$$

✓  $Q_1$ :

$$\begin{cases} V_1 + R_1 I_2 - V_2 = 0 \\ I_1 = -I_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_1 = V_2 - R_1 I_2 \\ I_1 = -I_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_1 = V_2 - R_1 I_2 \\ I_1 = 0 \cdot V_2 - I_2 \end{cases} \rightarrow T_1 = \begin{bmatrix} 1 & R_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

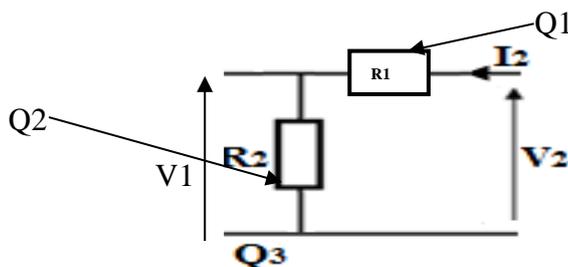
✓  $Q_2$ :

$$\begin{cases} V_1 = V_2 \\ V_2 = (I_1 + I_2)R_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_1 = V_2 - 0 \cdot I_2 \\ V_2 = I_1 R_2 + I_2 R_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} V_1 = V_2 - 0 \cdot I_2 \\ I_1 = \frac{1}{R_2} V_2 - I_2 \end{cases} \rightarrow [T_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R_2} & 1 \end{bmatrix}$$

2. Matrices de transferts des quadripôles  $Q_3$ ,  $Q_4$  et  $Q_3$ :

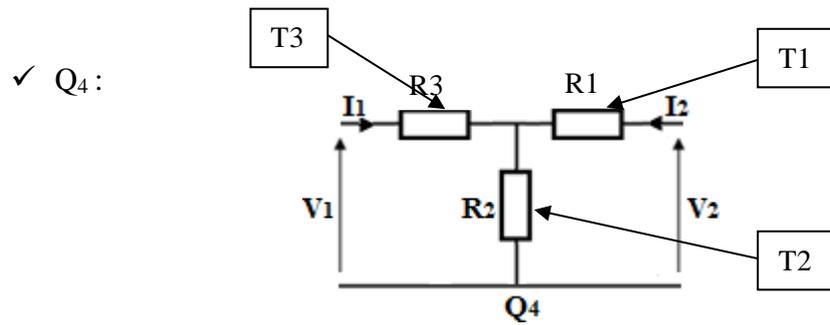
REMARQUE :

Pour calculer la matrice de transfert pour une association des quadripôles en cascade on fait le produit de la matrice de transfert de dernière quadripôle et la matrice de transfert de quadripôle qui suivre



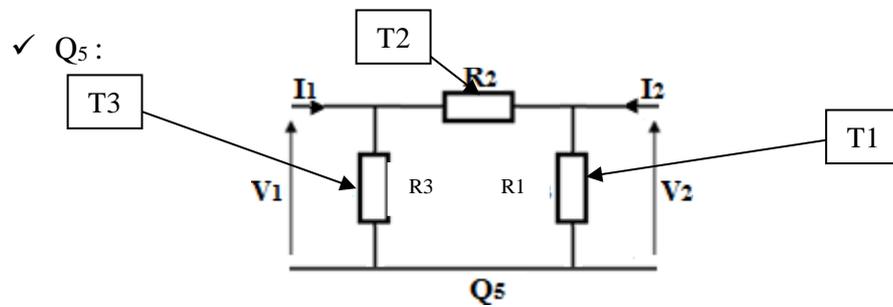
✓  $Q_3$ :

$$[T3] = [T1] * [T2] + \begin{bmatrix} 1 & R1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/R2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + R1/R2 & R1 \\ 1/R2 & 1 \end{bmatrix}$$



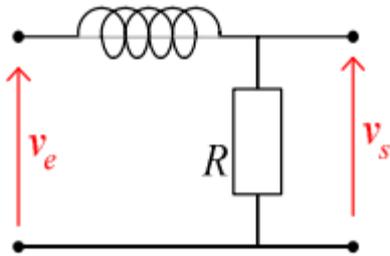
$$[T4]=[T1]*[T2]*[T3]$$

$$[T4] = \begin{bmatrix} 1 & R1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/R2 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & R3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + R1/R2 & R1 \\ 1/R2 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & R3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + R1/R2 & R3 + R1 * \frac{R3}{R2} + R1 \\ 1/R2 & \frac{R3}{R2} + 1 \end{bmatrix}$$



$$[T5] = [T1] * [T2] * [T3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/R1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & R2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/R3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R2 \\ 1/R1 & R2/R1 + 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/R3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R2}{R3} + 1 & R2 \\ \frac{1}{R1} + \frac{R2}{R1 * R3} + 1/R3 & \frac{R2}{R1} + 1 \end{bmatrix}$$

**Exercice supplémentaire sur les filtres :**

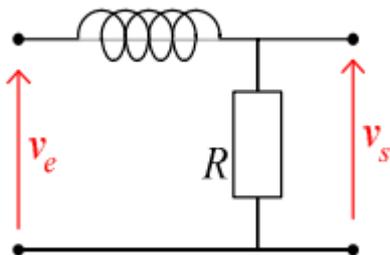


1. Donner l'expression de la fonction de transfert  $H(j\omega) = v_s/v_e$ .
2. Mettre  $H(j\omega)$  sous la forme  $\frac{1}{1 + j\omega/\omega_0}$ .

$$\frac{1}{1 + j\omega/\omega_0}$$

- Calculer  $\omega_0$
- quel est le type de filtre.

**Solution :**



$$H(j\omega) = v_s/v_e$$

on applique le diviseur de tension :

$$v_s = (R / (R + Z_L)) \cdot v_e$$

$$v_s = (R / (R + jL\omega)) \cdot v_e$$

$$v_s/v_e = R / (R + jL\omega) = H(j\omega) = [(1/R) \cdot R] / [(1/R) \cdot (R + jL\omega)] = 1 / (1 + (jL\omega/R))$$

$$H(j\omega) = [(1/R) \cdot R] / [(1/R) \cdot (R + jL\omega)] = 1 / (1 + (jL\omega/R))$$

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + j\omega / \omega_0}, \text{ avec } \omega_0 = \frac{R}{L}.$$

On a donc un filtre passe-bas.